ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 10, с. 1676–1696

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 519.63

БЕЗРИСКОВЫЕ ИНВЕСТИЦИИ И ИХ СРАВНЕНИЕ С ПРОСТЫМИ РИСКОВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ В МОДЕЛИ ПЕНСИОННОГО СТРАХОВАНИЯ: РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Т. А. Белкина[1,*], Н. Б. Конюхова[2,], Б. В. Славко[3,***]**

[1] *117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия*

[2] *119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия*

[3] *2006 Сидней, NSW, Университет Сиднея, Австралия*

**e-mail: tbel@cemi.rssi.ru*

***e-mail: nadja@ccas.ru*

****e-mail: slavkobogdan@gmail.com*

Поступила в редакцию 26.12.2019 г.
Переработанный вариант 25.02.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

Изучается коллективная модель пенсионного страхования (пожизненной ренты) с учетом *безрисковых* инвестиций, когда весь резерв страховой компании в каждый момент времени инвестируется в безрисковый актив (банковский счет). Дается сравнение этой стратегии с изученными ранее простыми *рисковыми* стратегиями инвестиций, при которых, независимо от размера резерва страховой компании, в каждый момент времени постоянную положительную долю этого резерва составляют рисковые активы (акции), а оставшаяся доля инвестируется в банковский счет. Сравнение стратегий основывается на традиционном критерии платежеспособности – вероятности неразорения. Исходная модель страхования является дуальной по отношению к классической модели Крамéра–Лундберга: изменение капитала по портфелю однотипных договоров описывается суммой убывающей детерминированной линейной функции, отвечающей выплате суммарных пенсий, и составного пуассоновского процесса с положительными скачками, соответствующими доходам, получаемым страховой компанией в моменты передачи собственности страхователей. При экспоненциальном распределении размеров скачков показано, что в случае *безрисковых* инвестиций вероятность неразорения как функция начального капитала, определенная на неотрицательной вещественной полуоси, является решением сингулярной задачи для интегродифференциального уравнения с невольтерровым интегральным оператором. Получено решение поставленной задачи, проведено аналитическое исследование его свойств, приводятся численные примеры. На примерах дается сравнение влияния рисковых и безрисковых инвестиций на вероятность неразорения в данной модели. Библ. 17. Фиг. 11.

Ключевые слова: пенсионное страхование, дуальная модель риска, вероятность неразорения, инвестиции, безрисковые активы, экспоненциальное распределение размеров поступлений, интегродифференциальное уравнение, сингулярная задача.

DOI: 10.31857/S0044466920100051

ВВЕДЕНИЕ

В работе продолжаются исследования влияния инвестиций на вероятность неразорения (ВНР) страховой компании (СК) в так называемой *дуальной модели риска*, начатые в [1]. Данная модель является дуальной по отношению к классической модели коллективного риска в страховании – модели Крамéра–Лундберга (КЛ) – и может рассматриваться как *коллективная модель пенсионного страхования*, или модель пожизненной ренты. Дуальная модель риска, называемая также моделью аннуитета в страховании жизни (*life annuity insurance model*, см. [2]), получается из модели КЛ заменой знаков на противоположные у составляющих случайного процесса, описывающего динамику рискового резерва (процесса риска). Получившиеся в результате такой инверсии составляющие указанного процесса приобретают новый смысл: детерминированная линейно убывающая функция соответствует суммарной выплате пенсий (пособия) по портфелю договоров, а составной пуассоновский процесс с положительными скачками определяет случайные приращения резерва (доходы СК) в случайные моменты перехода к СК собственности страхователей. (Подробнее о дуальной модели риска и некоторых задачах для нее см. [3]–[5].)

В [1] поставлена, исследована (и полностью решена в случае экспоненциального распределения случайных доходов СК) задача об определении влияния рисковых инвестиций на ВНР в дуальной модели риска, а именно, в предположении, что все свои страховые резервы СК инвестирует в два вида активов – рисковые, цена которых подчиняется процессу геометрического броуновского движения, и безрисковые (банковский счет с постоянной процентной ставкой). При этом предполагается, что в инвестиционном портфеле сохраняется постоянная пропорция активов двух указанных видов, причем доля рискового актива строго положительна. Такие стратегии инвестиций (как при постоянной положительной, так и при нулевой доле рискового актива) называем *простыми стратегиями*, причем при положительной доле рискового актива – *простыми рисковыми стратегиями*, или, для краткости, рисковыми инвестициями. В данной работе изучается проблема исследования ВНР в случае *простой безрисковой стратегии*, т.е. когда доля рисковых инвестиций в инвестиционном портфеле нулевая и резерв СК полностью инвестируется в безрисковый актив. С точки зрения постановки задачи этот случай может рассматриваться как вырожденный по отношению к исследованной в [1] более общей ситуации. При этом следует отметить, что утверждения о виде ВНР, доказанные для простой рисковой стратегии в [1], не дают возможности получить ответ в "вырожденной" модели, устремляя долю рискового актива к нулю, – такой переход оказывается сингулярным по параметру, и по этой причине задача требует отдельного рассмотрения.

Исследование в рамках данной модели при простых стратегиях инвестиций – как рисковых, так и безрисковых – основано на связи ВНР как функции начального капитала (НК) с решением корректно поставленных сингулярных задач для некоторых интегродифференциальных уравнений (ИДУ). Эти ИДУ порождаются инфинитезимальными операторами случайных процессов, описывающих динамику резерва СК при использовании соответствующей инвестиционной политики.

В случае рисковых инвестиций и экспоненциального распределения случайных доходов для поставленной сингулярной краевой задачи (КрЗ) в [1] доказаны существование и единственность ее решения, исследовано его асимптотическое поведение как при больших, так и при малых значениях НК, а также предложен алгоритм численного решения этой задачи (как отмечено в [1], асимптотическое поведение ВНР при больших значениях НК ранее исследовалось в [6] другими методами). На основании теоретических исследований и численных экспериментов сделаны выводы о влиянии на ВНР рисковых инвестиций в рассматриваемой модели. В частности, теоретически показано, что при положительной *нагрузке безопасности* в дуальной модели риска (т.е. при условии на параметры модели, когда ожидаемый доход СК в единицу времени от случайных поступлений больше выплачиваемых пенсий) и при больших значениях НК рисковые инвестиции не выгодны, так как дают уменьшение ВНР по сравнению с ВНР в случае отсутствия инвестиций. Точнее, при так называемых "надежных" рисковых инвестициях асимптотическое стремление ВНР к единице (при больших НК) характеризуется степенной функцией, в то время как при отсутствии инвестиций – экспонентой; "ненадежные" инвестиции вообще дают разорение с вероятностью единица. В то же время результаты численных расчетов в [1] позволили прийти к выводу о том, что даже в случае отрицательной нагрузки безопасности в исходной модели страхового риска применение достаточно надежного рискового инвестиционного портфеля (т.е. портфеля с не слишком большой волатильностью) позволяет повышать ВНР при малых значениях НК – когда разорение в отсутствие инвестиций наиболее вероятно (а при отрицательной нагрузке безопасности и вовсе неминуемо).

Для более полного (по сравнению с [1]) исследования роли рисковых инвестиций в повышении платежеспособности СК необходимо провести сравнение ВНР, получаемой в результате применения простых рисковых стратегий, с ВНР, соответствующей применению безрисковой стратегии. Так как сравнение рисковых и безрисковой простых стратегий является итоговой целью данной работы, здесь кратко описывается подход к изучению ВНР, используемый в [1], и приводятся основные результаты. Это дает возможность увидеть, с одной стороны, единство используемого метода, основанного на исследовании сингулярных задач для ИДУ, а с другой стороны, обнаружить, что "вырожденный" случай приводит к задаче качественно другого вида, что и является причиной его отдельного изучения в данной работе.

Работа организована следующим образом.

В разд. 1 даются описание модели и постановка задачи, которая рассматривается также в контексте более общей модели, предполагающей использование рисковых стратегий. Приводятся вспомогательные результаты, касающиеся ВНР, в частности, ее связи с решениями сингулярных задач для ИДУ.

В разд. 2 формулируются доказанные в [1] некоторые утверждения для модели с простыми рисковыми стратегиями инвестиций и экспоненциальным распределением случайных поступлений: основная теорема о виде ВНР как решения сингулярной КрЗ для ИДУ второго порядка, лемма об эквивалентности этой задачи для ИДУ и некоторой сингулярной КрЗ для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) третьего порядка, на которой основывается доказательство основной теоремы.

В разд. 3 приводятся сингулярные задачи для вырожденных (по отношению к общей модели) ИДУ первого порядка и ОДУ второго порядка, доказываются лемма об их эквивалентности и основная теорема о виде ВНР как решения сингулярной задачи для ИДУ. Указанные утверждения не являются следствием доказанных в [1] соответствующих утверждений для более общей модели, так как задачи для ИДУ сформулированы при различных условиях на решения, продиктованных свойствами ВНР – различными в “общем” и “вырожденном” случаях. Более того, исследование свойств решений показывает, что эти решения в двух описанных случаях действительно находятся, вообще говоря, в различных классах функций – таких, что ни один из них не включает в себя другой. В частности, показано, при каких параметрах модели в случае безрисковой стратегии ВНР является негладким *вязкостным решением* соответствующего ИДУ, определенного на $\mathbb{R}_+$, в то время как при рисковых инвестициях решения являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями (о вязкостных решениях в некоторой более общей модели см. [7], о применении понятия вязкостного решения к исследованию ВНР в дуальной модели риска см. [8]).

В разд. 4 приводятся результаты численных исследований влияния на ВНР простых инвестиционных стратегий – как рисковых, так и безрисковых, – и сравнительный анализ этих результатов. В конце работы делаются заключительные выводы.

Данная работа (в совокупности с [1]) является итоговой по дуальной модели риска с простыми стратегиями инвестиций и экспоненциальным распределением случайных доходов (некоторые ее результаты коротко отражены в [9], [10]).

Далее используются обозначения: $\mathbf{P}(A)$ – вероятность события A; $\mathbf{E}X$ – математическое ожидание случайной величины X. Остальные обозначения и сокращения вводятся по мере необходимости.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ПЕНСИОННОГО СТРАХОВАНИЯ (ДУАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РИСКА) С БЕЗРИСКОВЫМИ ИНВЕСТИЦИЯМИ

1.1. Исходный процесс риска для модели без инвестиций

Приведем здесь кратко описание модели пенсионного страхования, более подробно описанной в [1]. Данная модель представляется процессом динамики капитала СК по портфелю договоров пожизненной ренты (процессом риска), имеющим вид

$$R_t = u - ct + \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \quad t \geq 0. \tag{1.1}$$

Здесь R_t – размер капитала в момент времени t, $t \geq 0$; u – размер НК, $0 < c$ – размер затрат на выплату пенсий в единицу времени, $N(t)$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ ($\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), описывающий количество поступивших премий к моменту времени t; Z_k $(k = 1, 2, \ldots)$ – размеры премий – независимые одинаково распределенные (невырожденные) неотрицательные случайные величины (СВ), не зависящие от процесса $N(t)$ и имеющие функцию распределения (ФР) $F(z)$ такую, что

$$F(0) = 0, \quad \int_0^\infty z dF(z) = m, \quad 0 < m < \infty. \tag{1.2}$$

Напомним, что относительной нагрузкой (коэффициентом) безопасности для процесса риска (1.1) называется величина

$$\rho = (\lambda m - c)/c = \lambda m/c - 1. \tag{1.3}$$

Положим $\varphi_0(u) = \mathbf{P}(R_t \geq 0,\ t \geq 0 | R_0 = u)$, тогда $\varphi_0(u)$ определяет ВНР для процесса (1.1) на бесконечном интервале времени.

В случае положительности нагрузки безопасности, т.е. если ожидаемые поступления средств в единицу времени больше выплат за то же время, процесс (1.1) имеет положительный снос, и можно показать, что ВНР $\varphi_0(u)$ является решением сингулярной КрЗ для ИДУ (см. подробнее [1]):

$$-c\varphi_0'(u) - \lambda\varphi_0(u) + \lambda\int_0^\infty \varphi_0(u+z)dF(z) = 0, \quad u > 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi_0(u) = 1.$$

В случае экспоненциального распределения размеров поступлений, т.е. когда

$$F(z) = 1 - \exp(-z/m), \quad m > 0, \tag{1.4}$$

ВНР $\varphi_0(u)$ является решением эквивалентной сингулярной КрЗ для ОДУ:

$$(c/m - \lambda)\varphi_0'(u) - c\varphi_0''(u) = 0, \quad u > 0, \quad \varphi_0(0) = 0, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi_0(u) = 1. \tag{1.5}$$

Эта задача имеет точный ответ:

$$\varphi_0(u) = 1 - \exp(-(\lambda m - c)u/(cm)) = 1 - \exp(-\rho u/m), \quad u \geq 0. \tag{1.6}$$

При отрицательном или нулевом значении коэффициента нагрузки безопасности (1.3) разорение неминуемо, т.е. $\varphi_0(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$.

1.2. Модель с инвестициями в безрисковые активы как частный случай простых стратегий инвестирования, включающих рисковый актив

Пусть весь капитал фонда непрерывно инвестируется в безрисковый актив – банковский счет при постоянной процентной ставке $r > 0$, эволюция которого описывается ОДУ

$$dB_t = rB_t dt, \quad t \geq 0, \tag{1.7}$$

где B_t – величина банковского счета в момент времени t.

В этом случае динамика капитала компании X_t описывается стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ)

$$dX_t = rX_t dt + dR_t, \quad t \geq 0, \tag{1.8}$$

с начальным условием $X_0 = u$.

Процесс (1.8) может рассматриваться как соответствующий "вырожденному" случаю при введении так называемых простых инвестиционных стратегий, включающих, наряду с безрисковым, также рисковый актив; такие стратегии исследовались в [1]. Под простыми стратегиями понимаем такие стратегии, которые обеспечивают постоянство пропорции рисковой и безрисковой частей инвестиционного портфеля в каждый момент времени. Точнее, пусть динамика цены рискового актива моделируется процессом геометрического броуновского движения

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dw_t, \quad t \geq 0,$$

где S_t – цена акции в момент времени t, μ – ожидаемая доходность, $\mu > r$, σ – волатильность, w_t – стандартное броуновское движение. При указанных предположениях относительно простых стратегий соответствующий процесс риска удовлетворяет СДУ

$$dX_t = \mu_\alpha X_t dt + \sigma_\alpha X_t dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \tag{1.9}$$

с начальным условием $X_0 = u$, где α – доля рискового актива в портфеле, $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$\mu_\alpha = \alpha\mu + (1-\alpha)r > 0, \quad \sigma_\alpha = \alpha\sigma \geq 0. \tag{1.10}$$

В случае $\alpha = 0$ СДУ (1.9) приобретает вид (1.8) и соответствует полному вложению капитала в безрисковый актив. *Рисковыми простыми стратегиями* инвестиций (или, для краткости, "рисковыми инвестициями") называем стратегии, соответствующие случаю $0 < \alpha \leq 1$, а при $\alpha = 0$ стратегии (инвестиции) называем *безрисковыми*.

Положим $\varphi(u) = \mathbf{P}(X_t \geq 0,\ t \geq 0 | X_0 = u)$, тогда $\varphi(u)$ определяет ВНР на бесконечном интервале времени для процесса X_t.

1.2.1. Предварительные утверждения о вероятности неразорения. В [1] доказана следующая

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi(u)$ — *ВНР процесса* (1.9) *с начальным условием* $X_0 = u$, *где* R_t *определено в* (1.1), *параметры* c, λ, m — *положительные числа*, μ_α *и* σ_α — *любые числа. Тогда* $\varphi(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(0) = 0, \tag{1.11}$$

т.е. при нулевом начальном состоянии разорение неминуемо (*как в случае простой стратегии, так и при отсутствии инвестиций*).

Из этой леммы следует, что условие (1.11) выполнено и в частном случае, соответствующем безрисковым инвестициям, т.е. для ВНР процесса (1.8). Более того, справедлива

Лемма 2. *Пусть функция* $\varphi(u)$ — *ВНР процесса* (1.8) *с начальным условием* $X_0 = u$, *где* R_t *определено в* (1.1), *параметры* c, λ, m, r — *положительные числа. Тогда* $\varphi(u)$ *удовлетворяет условию*

$$\varphi(u) \equiv 1, \quad u \geq c/r, \tag{1.12}$$

т.е. при безрисковой стратегии разорение никогда не произойдет при НК $u \geq c/r$.

Доказательство основано на том факте, что соотношение (1.12), очевидно, имеет место для решения уравнения $d\tilde{X}_t = r\tilde{X}_t dt - cdt$, $t \geq 0$, с условием $\tilde{X}_0 = u$. В то же время для решения (1.8) справедливо соотношение

$$X_t - \tilde{X}_t = e^{rt}\sum_{i=1}^{N(t)} Z_i e^{-r\theta_i} \geq 0, \quad t \geq 0,$$

где θ_i — момент i-го скачка процесса $N(t)$.

В [1] полностью решена задача исследования ВНР (как функции НК u на всей неотрицательной вещественной полуоси его возможных значений) при $0 < \alpha \leq 1$ в случае экспоненциального распределения скачков процесса (1.1) (а следовательно, и процесса (1.9)). В случае того же распределения, но при $\alpha = 0$ (т.е. при безрисковой стратегии), с учетом леммы 2, необходимо изучить поведение ВНР на интервале $[0, c/r]$ для процесса (1.8), что позволит завершить исследование влияния простых стратегий инвестирования, сравнив результаты применения рисковых и безрисковых стратегий. В качестве средства решения задачи для безрисковых стратегий используются корректная постановка и решение сингулярной задачи для ИДУ, которому, как будет показано, удовлетворяет ВНР всюду за исключением, быть может, точки $u = c/r$.

Из дальнейшего следует, что в отличие от ВНР, соответствующей рисковой стратегии и являющейся дважды непрерывно дифференцируемой функцией, ВНР при безрисковой стратегии не является, вообще говоря, гладкой функцией на всей неотрицательной полуоси: ее производная может иметь разрыв в точке $u = c/r$.

1.2.2. Инфинитезимальный оператор для процесса риска и предварительные утверждения о свойствах решений соответствующего интегродифференциального уравнения. Напомним (см. [1]), что инфинитезимальный оператор, соответствующий однородному марковскому процессу $X_t = X_t^\alpha$, удовлетворяющему СДУ (1.9), имеет вид

$$(\mathcal{A}^\alpha f)(u) = \frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 u^2 f''(u) + f'(u)(\mu_\alpha u - c) - \lambda f(u) + \lambda\int_0^\infty f(u+z)dF(z), \quad u > 0. \tag{1.13}$$

Полагая μ_α, σ_α определенными в (1.10), при $0 < \alpha \leq 1$ в качестве области определения оператора рассматриваем некоторый класс функций $f(u)$ в пространстве $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$ дважды непрерывно дифференцируемых на $(0, \infty)$ функций.

В [1] для случая экспоненциальной ФР $F(z)$ вида (1.4) показано, что ВНР процесса X_t^α как функция НК является дважды непрерывно дифференцируемой на $(0, \infty)$ функцией и удовлетворяет уравнению

$$(\mathcal{A}^\alpha f)(u) = 0, \quad u > 0, \tag{1.14}$$

имеющему (при замене f на φ) вид линейного ИДУ

$$\frac{1}{2}\sigma_\alpha^2 u^2\varphi''(u) + (\mu_\alpha u - c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda\int_0^\infty \varphi(u+z)dF(z) = 0, \quad u > 0. \tag{1.15}$$

Более того, показано, что при выполнении условия *надежности портфеля активов*, т.е. неравенства

$$2\mu_\alpha > \sigma_\alpha^2, \tag{1.16}$$

ВНР является единственным решением сингулярной КрЗ для ИДУ (1.15) с условием в нуле (1.11) и предельным условием на бесконечности $\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1$.

При $\alpha = 0$ оператор (1.13) приобретает вид

$$(\mathscr{A}^0 f)(u) = f'(u)(ru - c) - \lambda f(u) + \lambda\int_0^\infty f(u+z)dF(z), \quad u > 0. \tag{1.17}$$

При формальном рассмотрении ИДУ второго порядка (1.15) в случае $\alpha = 0$ оно вырождается в ИДУ первого порядка с особенностью на $\mathbb{R}_+$ в точке $u = u_{\text{sing}} = c/r > 0$:

$$(ru - c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda\int_0^\infty \varphi(u+z)dF(z) = 0, \quad u > 0. \tag{1.18}$$

Дальнейшими задачами при изучении ВНР, соответствующей безрисковой инвестиционной стратегии, являются: 1) определение класса функций, которому принадлежит ВНР в случае $\alpha = 0$; 2) постановка и исследование соответствующей сингулярной задачи для ИДУ; 3) нахождение решения данной задачи в случае экспоненциального распределения скачков; 4) доказательство того, что найденное решение определяет ВНР процесса (1.8).

Как показано в начале этого подразд. 1.2, модель с инвестициями в безрисковые активы может рассматриваться как частный случай простых стратегий инвестирования, включающих рисковый актив. В то же время результаты для ВНР в случае безрисковых инвестиций не могут быть получены как соответствующий частный случай результатов исследования в [1] сингулярных задач для ИДУ и ОДУ – в силу вырождения последних при $\alpha \to 0$ (или $\sigma \to 0$; подробнее см. разд. 3). Тем не менее исследование поставленных в данной работе задач, с учетом результатов предыдущих исследований для случая рисковых инвестиций, позволяет обнаружить единство применяемых подходов и провести сравнительный анализ влияния рисковых и безрисковых инвестиций на ВНР.

Учитывая описанные в п. 1.2.1 свойства ВНР в случае рисковых и безрисковых простых стратегий, рассмотрим два класса функций (первый из них введен в [1]).

Определение 1. Под $\mathscr{K}$ понимаем класс функций $f(u)$, принадлежащих $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+)$ и удовлетворяющих условиям

$$\lim_{u\to+0} f(u) = 0, \quad \lim_{u\to+\infty} f(u) = 1.$$

Определение 2. Под $\mathscr{L}$ будем понимать класс функций $f(u)$, определенных на $[0,\infty)$, непрерывно дифференцируемых на $(0, c/r)$ и удовлетворяющих условиям

$$f(0) = 0, \quad \lim_{u\to c/r-0} f(u) = 1, \quad f(u) = 1, \quad u \ge c/r. \tag{1.19}$$

Напомним, что при $\alpha = 0$ ИДУ (1.15) переходит в ИДУ (1.18).

Далее в этом пункте считаем (как и при описании модели риска), что $F(z)$ – ФР неотрицательной (невырожденной) СВ с конечным математическим ожиданием (см. (1.2)). Справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Пусть значения всех параметров в* (1.18) *положительны*: $c > 0$, $\lambda > 0$, $r > 0$, *и пусть функция* $f(u)$, $u \ge 0$, *принадлежит классу* $\mathscr{L}$ *и удовлетворяет ИДУ*

$$(\mathscr{A}^0 f)(u) = 0 \tag{1.20}$$

для всех $u > 0$ (*быть может, за исключением точки* $u = c/r$), *где оператор* $\mathscr{A}^0$ *определен в* (1.17). *Тогда:* 1) *это решение единственно в классе* $\mathscr{L}$; 2) *решение* $f(u)$ *удовлетворяет ограничениям* $0 \le f(u) \le 1$, $u \in \mathbb{R}_+$; 3) *если, кроме того,* $F(c/r) < 1$, *а для функции* $f(u)$ *выполнено условие*

$$\lim_{u \to +0} |f'(u)| < \infty, \tag{1.21}$$

то справедливо неравенство

$$f'(+0) > 0. \tag{1.22}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 3 из [1] (для функций из класса $\mathcal{K}$), но с некоторыми изменениями, учитывающими отличие рассматриваемого здесь класса функций $\mathcal{L}$, а именно то, что при $u \geq c/r$ все функции из этого класса совпадают и равны единице, а гладкость имеет место на интервале $(0, c/r)$. Для полноты изложения приведем здесь соответствующие рассуждения.

1) Предположим противное, т.е. в классе $\mathcal{L}$ существует еще решение $\overline{f}(u) \not\equiv f(u)$ ИДУ (1.20). Обозначим $\eta(u) = \overline{f}(u) - f(u)$. Очевидно, $\eta(u)$ удовлетворяет ИДУ (1.20), причем в силу условий (1.19) для функций из рассматриваемого класса $\lim_{u \to +0} \eta(u) = \lim_{u \to c/r - 0} \eta(u) = 0$, $\eta(u) = 0$, $u \geq c/r$. Это означает, что на интервале $(0, c/r)$ существует точка максимума $u = \hat{u} > 0$ функции $\eta(u)$ (либо минимума, но в этом случае вместо $\eta(u)$ можно рассмотреть $-\eta(u)$). Пусть также $\hat{u}$ — максимальная из всех точек максимума $\eta(u)$. Тогда, в силу условий $\eta'(\hat{u}) = 0$, $\eta(u) = 0$, $u \geq c/r$, из ИДУ (1.20) получаем

$$0 = \lambda\left(\eta(\hat{u}) - \int_0^\infty \eta(\hat{u} + z)dF(z)\right) > \lambda\left(\eta(\hat{u}) - \int_0^\infty \eta(\hat{u})dF(z)\right) = 0,$$

что ведет к противоречию. Утверждение 1) доказано.

2) Покажем, что $f(u) \geq 0$ для всех $u > 0$. Предположим противное: существует $u > 0$ такое, что $f(u) < 0$. Тогда, так как $f(u)$ удовлетворяет условиям (1.19), то на интервале $(0, c/r)$ существует точка минимума $u = \breve{u} > 0$, в которой выполняется условие $f'(\breve{u}) = 0$. Пусть $\breve{u}$ — максимальная из всех таких точек минимума $f(u)$. Тогда из (1.20) получаем

$$0 = \lambda\left(f(\breve{u}) - \int_0^\infty f(\breve{u} + z)dF(z)\right) < \lambda\left(f(\breve{u}) - \int_0^\infty f(\breve{u})dF(z)\right) = 0,$$

что демонстрирует противоречие. Аналогично от противного показывается, что $f(u) \leq 1$ для всех $u > 0$ (в противном случае, при условиях (1.19), она имеет точку максимума на $(0, c/r)$). Утверждение 2) доказано.

3) Покажем теперь, что, по крайней мере, при выполнении дополнительных условий этого пункта леммы, для производной решения выполнено неравенство (1.22). Действительно, для решения ИДУ (1.20) в классе $\mathcal{L}$, удовлетворяющего также (1.21), выполнено соотношение

$$-cf'(+0) + \lambda\int_0^{c/r} f(z)dF(z) + \lambda(1 - F(c/r)) = 0. \tag{1.23}$$

Отсюда, с учетом доказанного свойства неотрицательности функции f и выполнения условий (1.19) для нее как функции из класса $\mathcal{L}$, условия на ФР $F(z)$ и положительности c, заключаем, что $f'(+0) > 0$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть c, λ, m — фиксированные положительные числа, и пусть функция $f(u)$ принадлежит классу $\mathcal{L}$. Тогда соотношение* (1.23) *эквивалентно нелокальному соотношению*

$$cg(+0) = \lambda\int_0^{c/r} g(y)(1 - F(y))dy, \tag{1.24}$$

где $g(u) = f'(u)$, $u \in (0, c/r)$.

Указанная эквивалентность легко проверяется интегрированием по частям в (1.23) с учетом условий (1.19).

1.2.3. Утверждение о связи вероятности неразорения с решением сингулярной задачи для ИДУ (проверочная теорема).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы 3. Тогда для любого* $u \in \mathbb{R}_+$ *значение* $f(u)$ *функции, определенной в лемме* 3, *является ВНР для процесса* (1.8) *с начальным условием* $X_0 = u$, *т.е.* $f(u) \equiv \varphi(u)$.

Доказательство этой теоремы приведено в [10]. Утверждения такого типа называем также теоремами достаточности [11]: они сводят задачу исследования ВНР как функции НК, определенной на неотрицательной полуоси, к проблеме исследования некоторых корректно поставленных задач для ИДУ.

Для модели с рисковыми стратегиями инвестиций утверждения, аналогичные приведенным в леммах 3, 4 и теореме 1, но для функций из класса $\mathcal{K}$, доказаны в [1]. Заметим, что ни один из классов $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ (в которых, как выяснится далее, находятся функции ВНР в "общей" и "вырожденной" моделях соответственно) не является подмножеством другого.

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ИССЛЕДОВАНИЯ СИНГУЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИДУ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОМУ ОПЕРАТОРУ ПРОЦЕССА РИСКА В СЛУЧАЕ *РИСКОВЫХ* ИНВЕСТИЦИЙ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЧКОВ

В этом разделе формулируются некоторые суммарные результаты [1] по задаче, указанной в названии (с добавлением некоторых замечаний), необходимые для дальнейшего сравнения рисковых и безрисковых стратегий.

Далее, если не оговорено особо, при $0 < \alpha \leq 1$ опускаем индекс α в обозначениях СДУ (1.9) и ИДУ (1.15) и полагаем $\mu > 0$, $\sigma > 0$. В этом случае (1.9) и (1.15) приобретают соответственно вид

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dw_t + dR_t, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 \varphi''(u) + (\mu u - c)\varphi'(u) - \lambda\varphi(u) + \lambda\int_0^\infty \varphi(u+z)dF(z) = 0, \quad u > 0. \tag{2.2}$$

При $\alpha = 0$ из (1.10) получаем $\mu = r$, $\sigma = 0$, и тогда имеем дело с СДУ (1.8) и ИДУ (1.18).

Для дальнейшего заметим, что невольтерров интегральный оператор в (1.13) может быть переписан в виде

$$\int_0^\infty f(u+z)dF(z) = \int_u^\infty f(s)dF(s-u), \quad u \geq 0. \tag{2.3}$$

2.1. Сингулярная задача для ИДУ в случае рисковых инвестиций и основная теорема для вероятности неразорения

При $F(z)$ вида (1.4) преобразование (2.3) невольтеррова интегрального оператора в (1.13) приводит его к виду сингулярного вольтеррова оператора из бесконечности:

$$(J_m f)(u) := \frac{1}{m}\int_0^\infty f(u+z)\exp(-z/m)dz = \frac{1}{m}\int_u^\infty f(z)\exp(-(z-u)/m)dz, \quad u \geq 0. \tag{2.4}$$

С учетом (1.4), (2.4) для ИДУ (2.2) приведем сформулированную в [1] сингулярную КрЗ:

$$(\sigma^2 u^2/2)f''(u) + (\mu u - c)f'(u) - \lambda f(u) + (\lambda/m)\int_u^\infty f(z)\exp(-(z-u)/m)dz = 0, \quad u > 0, \tag{2.5}$$

$$\lim_{u\to+0} f(u) = 0, \tag{2.6}$$

$$\lim_{u\to+0}|f'(u)| < \infty, \quad \lim_{u\to+0}[uf''(u)] = 0, \tag{2.7}$$

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = 1, \tag{2.8}$$

$$\lim_{u\to\infty}[uf'(u)] = 0, \quad \lim_{u\to\infty}[u^2 f''(u)] = 0. \tag{2.9}$$

В [1] доказана следующая

Теорема 2. *Пусть* $F(z)$ *имеет вид* (1.4), *все параметры* μ, σ^2, c, m, λ – *фиксированные положительные числа*, *и пусть выполнено условие* “*надежности акций*”:

$$2\mu > \sigma^2. \tag{2.10}$$

Тогда следующие утверждения справедливы:

(I) *ВНР* $\varphi(u)$ *процесса* (2.1) *с начальным условием* $X_0 = u$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}$ *и является решением сингулярной КрЗ для ИДУ* (2.5), (2.6), (2.8);

(II) *это решение существует и единственно в классе* $\mathcal{K}$, *оно удовлетворяет условиям* (2.7), (2.9) *и соотношениям*:

$$0 \le \varphi(u) \le 1, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad 0 < \lim_{u\to+0} \varphi'(u) < \infty;$$

(III) *при малых* $u > 0$ *для* $\varphi(u)$ *справедливо асимптотическое представление*

$$\varphi(u) \sim D_1\left(u + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^k/k\right), \quad u \sim +0, \tag{2.11}$$

где $D_1 = \varphi'(+0) > 0$, *а коэффициенты* D_2, D_3, … *определяются по рекуррентным формулам*:

$$D_2 = (\mu - \lambda + c/m)/c, \tag{2.12}$$

$$D_3 = [D_2(2\mu + \sigma^2 - \lambda + c/m) - \mu/m]/(2c), \tag{2.13}$$

$$D_{k+1} = [D_k(k(k-1)\sigma^2/2 + \mu k - \lambda + c/m) - D_{k-1}((k-2)\sigma^2/(2m) + \mu/m)]/(kc), \quad k = 3, 4, \dots. \tag{2.14}$$

(IV) *при больших* u *для ВНР* $\varphi(u)$ *справедливо асимптотическое представление*

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-2\mu/\sigma^2}(1 + o(1)), \quad u \to \infty, \tag{2.15}$$

где $0 < K$ – *постоянная*;

(V) *при* $u \to +0$ *поведение производных решения зависит от соотношения между параметрами*, *которое может быть выражено*, *в частности*, *в терминах значения нагрузки безопасности* ρ, *определенной в* (1.3): 1) *если* $\rho \ge \mu m/c$, *то* $\lim_{u\to+0} \varphi''(u) \le 0$, *и решение* $\varphi(u)$ *вогнуто на* $\mathbb{R}_+$; 2) *если* $\rho < \mu m/c$, *то* $\lim_{u\to+0} \varphi''(u) > 0$, *решение* $\varphi(u)$ *выпукло в некоторой окрестности нуля и имеет точку перегиба на* $\mathbb{R}_+$;

(VI) *ВНР* $\varphi(u)$ *может быть найдена по формуле*

$$\varphi(u) = 1 - \int_u^{\infty} g(s)ds, \tag{2.16}$$

где $g(u)$ – *решение сингулярной задачи для ОДУ*

$$\frac{1}{2}\sigma^2u^2g''(u) + \left(\mu u + \sigma^2 u - c - \frac{1}{2m}\sigma^2u^2\right)g'(u) + \left(\mu - \lambda - \frac{\mu u - c}{m}\right)g(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2.17}$$

$$\lim_{u\to+0} |g(u)| < \infty, \quad \lim_{u\to+0} [ug'(u)] = 0, \tag{2.18}$$

$$\lim_{u\to\infty} [ug(u)] = 0, \quad \lim_{u\to\infty} [u^2g'(u)] = 0, \tag{2.19}$$

с условием нормировки

$$\int_0^{\infty} g(s)ds = 1. \tag{2.20}$$

Замечание 1. ОДУ (2.17) обладает двойным степенным вырождением: по u при $u \to +0$ и по σ^2 при $\sigma^2 \to +0$. Тогда можно показать (см., например, подход к подобным задачам в [12] и библиографию там), что решение $\tilde{g}(u, \sigma^2)$ сингулярной задачи без начальных данных (2.17), (2.18) обладает двойной асимптотикой: 1) при малых $u > 0$ (равномерно по σ^2 в некоторой окрестности нуля) оно представимо асимптотическим рядом

$$\tilde{g}(u,\sigma^2) \sim D_1\left(1+\sum_{k=2}^{\infty} D_k(\sigma^2)u^k\right), \quad u \sim +0,$$

где D_1 – произвольная постоянная, а коэффициенты $D_k = D_k(\sigma^2)$, $k \geq 2$, определяются по рекуррентным формулам (2.12)–(2.14); 2) при малых σ^2 (равномерно по $u > 0$ на некотором малом интервале) решение $\tilde{g}(u,\sigma^2)$ представимо асимптотическим рядом

$$\tilde{g}(u,\sigma^2) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}_k(u)\sigma^{2k}, \quad \sigma^2 \sim +0, \tag{2.21}$$

где коэффициенты–функции $\tilde{g}_k(u)$ определяются из (2.17) формальной постановкой ряда (2.21). Эта подстановка приводит для $\tilde{g}_k(u)$ к последовательности ОДУ первого порядка:

$$(\mu u - c)\tilde{g}_0' + [\mu - \lambda - (\mu u - c)/m]\tilde{g}_0 = 0, \quad u \geq 0;$$

$$(\mu u - c)\tilde{g}_k' + [\mu - \lambda - (\mu u - c)/m]\tilde{g}_k = -(u^2/2)\tilde{g}_{k-1}''(u) - u(1-u/(2m))\tilde{g}_{k-1}'(u), \quad u \geq 0, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.22}$$

Ссылку на это замечание см., в частности, в разд. 3 при доказательстве теоремы 4.

2.2. Эквивалентность сингулярных задач для ИДУ и ОДУ

Чтобы проследить в дальнейшем единство подходов при доказательстве основных утверждений о виде ВНР в случае рисковых и безрисковых инвестиций, заметим, что доказательство теоремы 2 в [1] основано на переходе от КрЗ (2.5)–(2.9) для ИДУ к эквивалентной КрЗ для ОДУ, доказательстве существования и единственности ее решения, а также описании свойств этого решения. Окончательное заключение о свойствах ВНР осуществляется с использованием утверждения, аналогичного приведенному выше в теореме 1 (точнее, см. теорему 1 в [1], в которой дополнительным условием в случае рисковых инвестиций является требование (1.16) надежности инвестиционного портфеля).

Эквивалентность КрЗ для ИДУ второго порядка и ОДУ третьего порядка устанавливает следующая лемма, доказанная в [1].

Лемма 5. *Пусть в ИДУ* (2.5) *все параметры* c, m, λ, σ^2, μ *– фиксированные положительные числа. Тогда сингулярная КрЗ* (2.5)–(2.9) *для ИДУ второго порядка эквивалентна следующей сингулярной КрЗ для ОДУ третьего порядка*:

$$\frac{1}{2}\sigma^2u^2f'''(u) + \left(\mu u + \sigma^2 u - c - \frac{1}{2m}\sigma^2u^2\right)f''(u) + \left(\mu - \lambda - \frac{\mu u - c}{m}\right)f'(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2.23}$$

$$\lim_{u\to+0} f(u) = 0, \tag{2.24}$$

$$\lim_{u\to+0}|f'(u)| < \infty, \quad \lim_{u\to+0}[uf''(u)] = 0, \tag{2.25}$$

$$\lim_{u\to\infty} f(u) = 1, \tag{2.26}$$

$$\lim_{u\to\infty}[uf'(u)] = 0, \quad \lim_{u\to\infty}[u^2f''(u)] = 0. \tag{2.27}$$

Замечание 2. При $\mu = \sigma^2 = 0$ из ОДУ (2.23) получаем формально ОДУ (1.5) для модели без инвестиций (с учетом разницы в обозначении функции).

Наконец, опишем еще один из важных этапов доказательства основного утверждения о ВНР (теоремы 2) – следующую теорему из [1] об эквивалентности сингулярной КрЗ для ИДУ и сингулярной задачи для ОДУ второго порядка с условием нормировки.

Теорема 3. *Пусть в ИДУ* (2.5) *все параметры* c, m, λ, σ^2, μ *– фиксированные положительные числа. Функция* $f(u)$ *является решением сингулярной задачи для ИДУ* (2.5)–(2.9) *тогда и только тогда, когда она представима в виде*

$$f(u) = 1 - \int_u^{\infty} g(s)ds,$$

где $g(u)$ *есть решение сингулярной задачи для ОДУ* (2.17)–(2.20).

В [1] предложен устойчивый численный метод решения сингулярной задачи для ОДУ (2.17)–(2.20), который, с учетом соотношения (2.16), позволил провести расчеты ВНР в широком диапазоне изменения параметров модели.

3. БЕЗРИСКОВАЯ СТРАТЕГИЯ ИНВЕСТИЦИЙ: ВЫРОЖДЕННЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИДУ И ОДУ И ИХ ИССЛЕДОВАНИЕ

Напомним, что безрисковой стратегией инвестиций называем простую стратегию, состоящую в инвестировании всего резерва СК в безрисковый актив – банковский счет с постоянной процентной ставкой, т.е. весь капитал фонда постоянно держится на банковском счете, эволюция которого описывается ОДУ (1.7), где B_t – величина банковского счета в момент времени t ($t \geq 0$) при постоянной процентной ставке $r > 0$. Тогда динамика капитала X_t (результирующий процесс риска) в соответствующей модели описывается начальной задачей для СДУ (1.8), где R_t определено в (1.1). Эта модель рассматривается в подразд. 1.2 как частный случай более общей модели с простыми стратегиями инвестиций, описываемой СДУ (1.9), и этот случай соответствует значению $\alpha = 0$.

Для ВНР $\varphi(u)$ процесса (1.8), в силу лемм 1 и 2, имеют место соотношения (1.11), (1.12). Целью данного раздела является изучение влияния безрисковых инвестиций на ВНР при НК u, находящемся в интервале $[0, c/r]$; кроме того, предполагается сравнить его с влиянием рисковых инвестиций, изученным в [1].

Обратимся к ИДУ

$$(ru - c)f'(u) - \lambda f(u) + \lambda\int_u^{\infty} f(z)dF(z - u) = 0, \quad u > 0, \tag{3.1}$$

которое является частным случаем ИДУ (1.14) при $\alpha = 0$ (с учетом преобразования (2.3) интегрального оператора в (1.13) и замены обозначения r на μ). Таким образом, ИДУ (3.1) можно рассматривать как "вырожденное" по отношению к сингулярному ИДУ второго порядка (1.14) для той же исходной модели риска (1.1) в условиях вложения фиксированной доли α текущего капитала в рисковый актив. С другой стороны, ИДУ (1.14) вырождается в ИДУ (3.1) при $\sigma^2 \to 0$ и $\alpha = 1$, т.е. при вложении всего капитала в акции при стремлении к нулю их волатильности. Напомним, что в случае $F(z)$, имеющей вид (1.4) (т.е. в случае экспоненциального распределения скачков процесса риска), ИДУ (1.14) при $\alpha = 1$ приобретает вид (2.5).

Как и в случае рисковых инвестиций, будем изучать далее случай экспоненциального распределения скачков процесса риска (размеров случайных доходов). Тогда, с учетом обозначения (2.4) для интегрального оператора, перепишем ИДУ (3.1) в виде

$$(ru - c)f'(u) - \lambda f(u) + \lambda(J_m f)(u) = 0, \quad u \geq 0. \tag{3.2}$$

Нелокальное соотношение в нуле (1.23) для решения ИДУ (3.2) в классе $\mathcal{L}$, в предположении конечности производной этого решения в нуле, приобретает вид

$$-cf'(+0) + \lambda(J_m f)(0) = 0,$$

из которого следует неравенство $f'(+0) > 0$ (см. также утверждение 3) леммы 3).

Поставим (пока формально) сингулярную задачу для ИДУ (3.2):

$$(ru - c)f'(u) - \lambda f(u) + (\lambda/m)\int_u^{\infty} f(z)\exp(-(z - u)/m)dz = 0, \quad u > 0, \tag{3.3}$$

$$\lim_{u\to+0} f(u) = 0, \tag{3.4}$$

$$\lim_{u\uparrow c/r} f(u) = 1, \quad f(u) = 1, \quad u \geq c/r, \tag{3.5}$$

$$\lim_{u\uparrow c/r}[(ru - c)f'(u)] = 0. \tag{3.6}$$

Лемма 6. *Пусть в ИДУ* (3.3) *все параметры* c, m, λ, r *— фиксированные положительные числа. Тогда сингулярная задача* (3.3)–(3.6) *для ИДУ первого порядка эквивалентна сингулярной задаче для ОДУ второго порядка*

$$(ru - c)f''(u) + [r - \lambda - (ru - c)/m]f'(u) = 0, \quad u \geq 0, \tag{3.7}$$

с теми же условиями (3.4)–(3.6).

Доказательство. Докажем, что любое решение ИДУ (3.3) является также решением ОДУ (3.7). Нетрудно подсчитать, что для оператора, введенного в (2.4), имеет место соотношение

$$\frac{d}{du}(J_m f)(u) = \frac{1}{m}(J_m f)(u) - \frac{1}{m}f(u). \tag{3.8}$$

Дифференцируя исходное ИДУ (3.3) и учитывая соотношение (3.8), получаем

$$(ru - c)f''(u) + (r - \lambda)f'(u) + \frac{\lambda}{m}[(J_m f)(u) - f(u)] = 0, \quad u > 0. \tag{3.9}$$

Взяв очевидную линейную комбинацию ИДУ (3.3) и ИДУ (3.9), приводящую к исключению интегрального слагаемого $(J_m f)(u)$, получаем ОДУ (3.7).

Обратно: пусть функция $\hat{f}(u)$ удовлетворяет ОДУ (3.7) и условиям (3.4), (3.6). Покажем, что она удовлетворяет также ИДУ (3.3). Обозначим левую часть ИДУ (3.3) с функцией $\hat{f}(u)$ через $h(u)$, т.е.

$$h(u) = -\lambda\hat{f}(u) + \lambda(J_m\hat{f})(u) + (ru - c)\hat{f}'(u). \tag{3.10}$$

Дифференцируя (3.10) и учитывая ОДУ (3.7), получаем, что $h(u)$ удовлетворяет ОДУ

$$h'(u) - h(u)/m = 0, \quad u > 0, \tag{3.11}$$

решение которого имеет вид

$$h(u) = C\exp(u/m), \quad u > 0, \tag{3.12}$$

где C — произвольная постоянная. Кроме того, в силу условий (3.5), (3.6) для $h(u)$ выполнено соотношение $\lim_{u\uparrow c/r} h(u) = 0$, откуда, учитывая общий вид решения (3.12), получаем $h(u) \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть в ИДУ* (3.3) *все параметры* c, m, λ, r *— фиксированные положительные числа, и пусть функция* $f(u)$ *является решением сингулярной задачи для ИДУ* (3.3)–(3.6). *Тогда*

$$f(u) = 1 - \int_u^{c/r} g(s)ds, \quad 0 \leq u < c/r, \tag{3.13}$$

где $g(u)$ *есть решение сингулярной задачи для ОДУ*

$$(ru - c)g'(u) + [r - \lambda - (ru - c)/m]g(u) = 0, \quad u \geq 0, \tag{3.14}$$

$$\lim_{u\uparrow c/r}[(ru - c)g(u)] = 0, \quad g(u) = 0, \quad u \geq c/r, \tag{3.15}$$

с условием нормировки

$$\int_0^{c/r} g(s)ds = 1. \tag{3.16}$$

Обратно: если функция $g(u)$ *есть решение сингулярной задачи для ОДУ* (3.14)–(3.16), *то функция* $f(u)$, *определенная в* (3.13) *при* $0 \leq u < c/r$ *и равная единице при* $u \geq c/r$, *есть решение сингулярной задачи для ИДУ* (3.3)–(3.6).

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2 из [1].

Заметим, что то же ОДУ (3.14) получается из ОДУ (2.17) при $\sigma = 0$, $\mu = r$ (см. также ОДУ (2.22) в замечании 1). Нетривиальные решения ОДУ (3.14) на интервале $[0, c/r]$ определяются явно с точностью до постоянного множителя, в котором в качестве неопределенной константы положим $D_1 = \lim_{u\to 0} g(u)$ (для удобства дальнейшего согласования с формулой (2.11)). Тогда из этого семейства

$$g(u, D_1) = D_1(c/r)^{1-\lambda/r}(c/r - u)^{\lambda/r-1}\exp(u/m)$$

выделим нужное решение $g(u)$ условием нормировки (3.16), откуда получим

$$D_1 = \left[\int_0^{c/r} (c/r - u)^{\lambda/r - 1} \exp(u/m) du \right]^{-1} (c/r)^{\lambda/r - 1}. \tag{3.17}$$

В итоге для $u \in [0, c/r]$ имеем

$$g(u) = \left[\int_0^{c/r} (c/r - u)^{\lambda/r - 1} \exp(u/m) du \right]^{-1} (c/r - u)^{\lambda/r - 1} \exp(u/m). \tag{3.18}$$

Тогда функция $f(u)$ на интервале $[0, c/r)$ определяется формулой (3.13).

В соответствии с приведенными выше утверждениями получаем, что определенная таким образом функция $f(u)$ удовлетворяет ИДУ (3.2) (за исключением, быть может, точки c/r) и принадлежит классу $\mathcal{L}$. Следовательно, для этой функции выполнены условия леммы 3. По теореме 1, для любого $u \in \mathbb{R}_+$ значение $f(u)$ определяет ВНР для процесса (1.8) с начальным условием $X_0 = u$, т.е. $f \equiv \varphi$. Кроме того, в силу утверждения 1) леммы 3, для функции ВНР с необходимостью выполнено условие (3.6) (то же следует из формулы (3.18)). Таким образом, получаем, что верна следующая основная

Теорема 5. *Пусть* $F(z) = 1 - \exp(-z/m)$, *все параметры* r, c, m, λ — *фиксированные положительные числа. Тогда*:

(I) *ВНР* $\varphi(u)$ *процесса* (1.8) *с начальным условием* $X_0 = u$, $u \geq 0$, *принадлежит классу* $\mathcal{L}$ *и является решением сингулярной задачи для ИДУ* (3.3)–(3.6);

(II) *это решение единственно в классе* $\mathcal{L}$ *и определяется соотношениями*

$$\varphi(u) = 1 - \int_u^{c/r} g(s) ds, \quad 0 \leq u < c/r, \quad \varphi(u) = 1, \quad u \geq c/r, \tag{3.19}$$

где $g(u)$ *определяется формулой* (3.18).

Замечание 3. Из (3.18) следует, что при $u \to +0$ решение $g(u)$ (производная ВНР) имеет положительный конечный предел (при этом удовлетворяется соотношение (1.24)). В то же время характер поведения $g(u)$ в окрестности точки $u = \tilde{u} = c/r$ зависит от соотношения параметров λ и r:

(1) при $\lambda > r$ будет $\lim_{u \uparrow c/r} g(u) = 0$;

(2) при $\lambda = r$ имеем положительный конечный предел,

$$\lim_{u \uparrow c/r} g(u) = m^{-1} [\exp(c/(rm)) - 1]^{-1} \exp(c/(rm)) > 0,$$

а для функций $g(u)$, $\varphi(u)$ из (3.18), (3.19) окончательно имеем

$$g(u) = m^{-1} [\exp(c/(rm)) - 1]^{-1} \exp(u/m), \quad 0 \leq u \leq c/r,$$

$$\varphi(u) = [\exp(c/(rm)) - 1]^{-1} [\exp(u/m) - 1], \quad 0 \leq u \leq c/r;$$

(3) при $\lambda < r$ будет $\lim_{u \uparrow c/r} g(u) = \infty$, где функция $g(u)$ интегрируема в точке $u = \tilde{u} = c/r$.

Таким образом, получаем, что ВНР в рассматриваемой модели является непрерывной, но, вообще говоря, негладкой функцией НК u: в случае выполнения (1.4) и при условии $\lambda \leq r$ она имеет точку разрыва производной $u = \tilde{u} = c/r > 0$ (при $\lambda > r$ ВНР является гладкой функцией на всей неотрицательной полуоси). Здесь можно отметить, что при $\lambda \leq r$ ВНР является *вязкостным негладким решением* ИДУ (3.2) (о понятии *вязкостных решений* в некоторой более общей модели см. [7]).

Замечание 4. Доказательство существования вязкостного решения ИДУ с заданными краевыми условиями может служить, наряду с теоремой достаточности, инструментом обоснования того факта, что полученное решение определяет ВНР в рассматриваемой модели. При этом принимаются во внимание доказанные в [7] утверждения: теорема о том, что ВНР является вязкостным решением соответствующего ИДУ, и теорема единственности вязкостного решения ИДУ с заданными краевыми условиями в нуле и на бесконечности (подробнее о применении этого подхода см. в [8]).

Для полноты описания поведения данной функции, в частности, ее выпуклости или вогнутости в окрестности нуля и возможного излома в точке $u = \tilde{u} = c/r$, а также наличия или отсутствия точки перегиба на $(0, c/r)$, вычислим производную от $g(u)$:

$$g'(u) = D_1(c/r)^{1-\lambda/r}(c/r-u)^{\lambda/r-1}\exp(u/m)[1/m-(\lambda/r-1)(c/r-u)^{-1}],$$

где D_1 определено в (3.17). В частности, получаем

$$g'(+0) = g(+0)[1/m-(\lambda-r)/c], \tag{3.20}$$

т.е. здесь имеет место такая же связь второй и первой производных функции $\varphi(u)$ в нуле, что и в случае $\sigma^2 > 0$ (при замене μ на r; ср. с представлением (2.11) с учетом формулы (2.12)). Отсюда знак $\varphi''(+0)$ определяется знаком выражения в квадратных скобках в соотношении (3.20). При этом функция $g'(u)$ в точке

$$\hat{u} = c/r - m(\lambda/r-1) \tag{3.21}$$

обращается в ноль, и нетрудно проверить, что это точка безусловного максимума $g(u)$.

Замечание 5. Опишем более подробно качественное поведение функции $\varphi(u)$, включая поведение ее первой и второй производных, на интервале $(0,\ c/r)$ в зависимости от параметров модели и с использованием понятия нагрузки безопасности (1.3).

(1) Пусть $\lambda > 2r$. Тогда $\lim_{u\uparrow c/r}\varphi''(u) = 0$, и функция $\varphi(u)$ дважды непрерывно дифференцируема на $(0,\infty)$.

Если при этом $\rho \ge rm/c$, то $\hat{u} \le 0$, где $\hat{u}$ определена в (3.21), $\lim_{u\downarrow 0}\varphi''(u) \le 0$, и $\varphi(u)$ – вогнутая функция на $\mathbb{R}_+$.

Если $\rho < rm/c$, то $0 < \hat{u} < c/r$, так что на интервале $(0, c/r)$ имеется точка перегиба функции $\varphi(u)$, $\lim_{u\downarrow 0}\varphi''(u) > 0$, и в окрестности нуля $\varphi(u)$ – выпуклая функция (ср. с п. (V) теоремы 2).

(2) Пусть $r < \lambda \le 2r$. Тогда на интервале $(0,\ \infty)$ функция $\varphi(u)$ не является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, так как $\lim_{u\uparrow c/r}\varphi''(u) = -\infty$ при $\lambda < 2r$, а при $\lambda = 2r$ постоянная D_1 вычисляется явно,

$$D_1 = m^{-2}[\exp(c/(rm)) - 1 - c/(rm)]^{-1}(c/r),$$

и имеем точный ответ

$$\lim_{u\uparrow c/r}\varphi''(u) = -m^{-2}[\exp(c/(rm)) - 1 - c/(rm)]^{-1}\exp(c/(rm)) < 0.$$

Выводы относительно поведения функции в нуле остаются такими же, как в п. (1) этого замечания.

(3) Пусть $\lambda \le r$. Тогда функция $\varphi(u)$ не является гладкой, имея разрыв производной в точке $u = \tilde{u} = c/r$ (см. пп. (2) и (3) замечания 3). При этом $\hat{u} \ge c/r$, $\lim_{u\downarrow 0}\varphi''(u) > 0$, и $\varphi(u)$ – выпуклая функция на отрезке $[0, c/r]$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ВНР КАК ФУНКЦИИ НК: СЛУЧАИ РИСКОВЫХ И БЕЗРИСКОВЫХ ИНВЕСТИЦИЙ И ИХ СРАВНЕНИЕ

По аналогии с [13], приведем замечание о размерности параметров модели и способе их “обезразмеривания” для последующих вычислений.

Замечание 6. В ИДУ (2.5), (3.3) параметр m – безразмерный (при безразмерных переменных u и φ), а каждый из параметров σ^2, μ, r, c и λ имеет размерность $1/[t]$, где $[t]$ – размерность времени. Чтобы перейти к безразмерным величинам, достаточно разделить ИДУ (2.5) (или (3.3)) на какую-либо характерную положительную постоянную той же размерности: такое деление приводит задачу (2.5)–(2.9) (или (3.3)–(3.6)) к задаче того же вида с новыми параметрами $\tilde{\sigma}^2$, $\tilde{\mu}$, $\tilde{c}$ и $\tilde{\lambda}$ ($\tilde{r}$, $\tilde{c}$ и $\tilde{\lambda}$ соответственно). В частности, удобно в (2.5)–(2.9) и (3.3)–(3.6) в качестве параметра “обезразмеривания” выбрать λ: если положить $\lambda = 1$, то остальные параметры будут измеряться в долях λ и при необходимости их можно пересчитать в размерном виде простым умножением на величину $\lambda > 0$. В результате, оставляя λ в формулах, как это принято в литературе, полагаем всюду в расчетах $\lambda = 1$.

Чтобы завершить начатое в [1] исследование роли рисковых активов в возможном увеличении ВНР в рассматриваемой дуальной модели риска, необходимо сравнить ее с влиянием, которое оказывает на ВНР в области малых значений НК вложение всего текущего капитала в безрисковый актив, а также провести сравнение различных простых инвестиционных стратегий, соответствующих различным долям рискового актива в портфеле. Для этой цели проводятся численные расчеты ВНР как решений соответствующих исследованных сингулярных задач для ИДУ.

Напомним, что при больших значениях НК вопрос о сравнении простых рисковых и безрисковой стратегий имеет простое теоретическое обоснование в виде леммы 2. Но несмотря на то, что безрисковый актив однозначно предпочтительнее в этом случае, так как дает неразорение с вероятностью единица при достаточно больших НК (точнее, при значениях, не меньших величины c/r), при малых его значениях ответ на вопрос может быть получен путем численных расчетов.

Кроме того, напомним, что асимптотическое представление ВНР (2.15) при простых рисковых стратегиях, переписанное с учетом опущенного в подразд. 2.1 индекса α (доли рискового актива в портфеле, $0 < \alpha \leq 1$), имеет вид

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-2\mu_\alpha/\sigma_\alpha^2}\left(1 + o(1)\right), \quad u \to \infty, \tag{4.1}$$

где параметры μ_α, σ_α^2 определены в (1.10) и удовлетворяют условию (1.16), а $0 < K$ – постоянная, которая не может быть определена методами локального анализа и находится численно – решением соответствующей сингулярной КрЗ для ВНР. Тем самым данная постоянная зависит от параметров модели и характер этой зависимости, в том числе зависимости от α, неизвестен. Несмотря на то что показатель степени в асимптотическом представлении (4.1), очевидно, является убывающей функцией α, однозначно судить о возрастании ВНР при уменьшении α не представляется возможным в силу указанной причины. Таким образом, в каждой конкретной ситуации для сравнения различных простых рисковых портфелей также необходимы численные расчеты.

Если асимптотически экспоненциальное возрастание к единице ВНР делает трудно различимым эффект влияния на ВНР изменения доли рискового актива в портфеле, то в области малых значений НК численные расчеты покажут, что этот эффект уже хорошо заметен, и он может быть противоположными при различных параметрах модели. Кроме того, в некоторых случаях при малых НК влияние рисковых инвестиций по сравнению с безрисковыми оказывается полностью противоположным их влиянию при больших НК, а именно, рисковый портфель дает большие значения ВНР, чем безрисковые инвестиции.

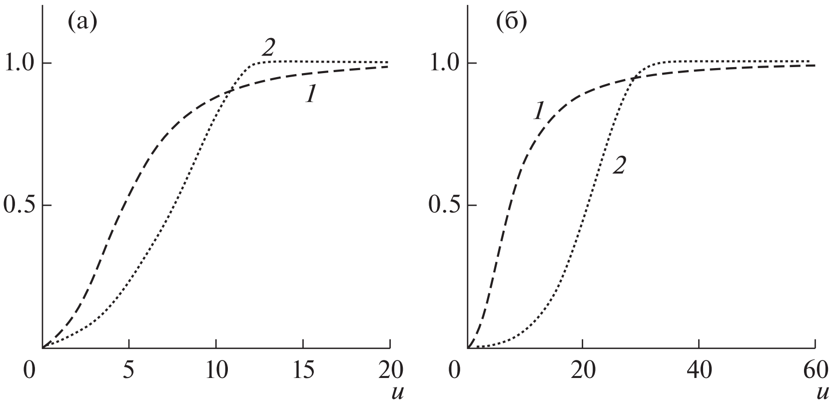
Далее для моделей с рисковыми и безрисковыми инвестициями приводятся графики $\varphi(u)$ зависимостей ВНР от НК при разных наборах значений параметров задач. При $\mu > 0$, $\sigma \neq 0$ для всех примеров расчетов выполняется либо условие надежности акций (2.10), либо условие надежности для рассматриваемых портфелей (1.16); при положительной нагрузке безопасности ρ дается также сравнение результатов расчетов с аналитическим решением $\varphi_0(u)$ в модели без инвестиций (см. (1.6)). Параметры задач μ, σ^2, c, λ указываются в безразмерном виде (см. замечание 6).

Графики этого раздела иллюстрируют утверждения теорем 2, 5 и замечаний 3, 5. Кроме того, на основе анализа численных примеров проводится сравнение влияния на ВНР рисковых и безрисковых инвестиций, а также различных простых стратегий при любых значениях НК.

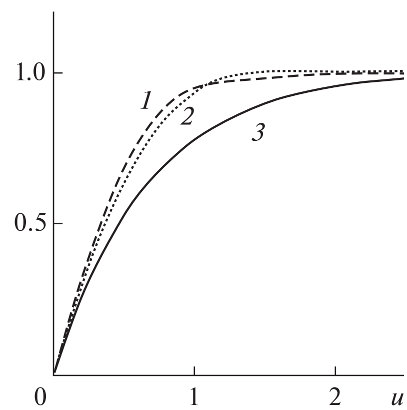
Для всех примеров расчетов зафиксированы значения $\lambda = 1$, $m = 2$. Для графиков *1* на фиг. 1–6 зафиксировано значение $\sigma^2 = 0.3$; для всех графиков *2* на фиг. 1–8 и графиков *5* на фиг. 9–11 зафиксировано значение $\sigma^2 = 0$ (решения в модели с безрисковыми инвестициями). Аналитические формулы для решений при $\lambda = r$ и $\lambda = 2r$, приведенные в замечаниях 3 и 5, наряду с качественным анализом поведения решений в нуле и в особой точке $u = c/r$, могут служить дополнительным контролем правильности вычислений.

Данные к графикам на фиг. 1: $c = 4$ ($\rho = -1/2$); для графиков *1* (решения в модели с рисковыми инвестициями): $\mu = 0.7$, $\varphi'(0) \approx 0.042$, $\varphi''(0) \approx 0.018$; для графиков *2* (решения в модели с безрисковыми инвестициями при $\lambda > 2r$): $r = 0.3$ ($c/r = 40/3 \approx 13.3333$), $\varphi'(0) \approx 0.02$, $\varphi''(0) \approx 0.00658$ на фиг. 1а; $r = 0.1$ ($c/r = 40$), $\varphi'(0) \approx 0.001461$, $\varphi''(0) \approx 0.0004$ на фиг. 1б.

Данные к графикам на фиг. 2: $c = 0.5$ ($\rho = 3$); для графика *1* (решение в модели с рисковыми инвестициями): $\mu = 0.7$ ($\rho > \mu m/c = 2.8$, $\varphi'(0) \approx 1.737$, $\varphi''(0) \approx -1.472$); для графика *2* (решение в модели с



Фиг. 1. ВНР как функция НК в случае отрицательной нагрузки безопасности.



Фиг. 2. ($\rho = 3$).

безрисковыми инвестициями при $\lambda > 2r$): $r = 0.3$ ($\rho > rm/c = 1.2$, $\varphi'(0) \approx 1.63$, $\varphi''(0) \approx -1.467$; $c/r = 5/3 \approx 1.6666$); для графика *3* (решение в модели без инвестиций): $\varphi_0'(0) = 1.5$, $\varphi_0''(0) = -2.25$.

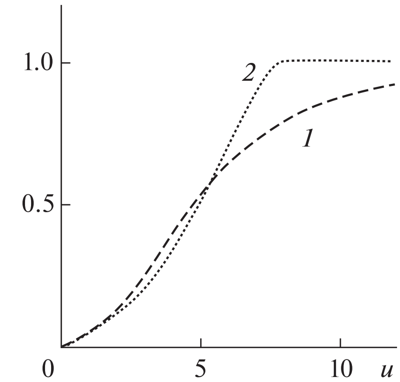
Данные к графикам на фиг. 3: $c = 4$ ($\rho = -1/2$); для графика *1* (решение в модели с рисковыми инвестициями): $\mu = 0.7$ ($\varphi'(0) \approx 0.042$, $\varphi''(0) \approx 0.018$); для графика *2* (решение в модели с безрисковыми инвестициями при $\lambda = 2r$): $r = 0.5$ ($\varphi'(0) \approx 0.04$, $\varphi''(0) \approx 0.015$; $c / r = 40/5 = 8$).

Данные к графикам на фиг. 4, 5: $c = 4$ ($\rho = -1/2$); для графиков *1* (решения в модели с рисковыми инвестициями): $\mu = 1$ ($\varphi'(0) \approx 0.065$, $\varphi''(0) \approx 0.035$) на фиг. 4 и $\mu = 1.5$ ($\varphi'(0) \approx 0.093$, $\varphi''(0) \approx 0.078$) на фиг. 5; для графиков *2* (решение в модели с безрисковыми инвестициями): $r = 0.75$ ($\varphi'(0) \approx 0.061$, $\varphi''(0) \approx 0.027$; $c/r = 400/75 \approx 5.3333$) на фиг. 4 (случай $r < \lambda < 2r$); $r = 1$ ($\varphi'(0) \approx 0.066$, $\varphi''(0) \approx 0.039$; $c/r = 4$) на фиг. 5 (случай $\lambda = r$).

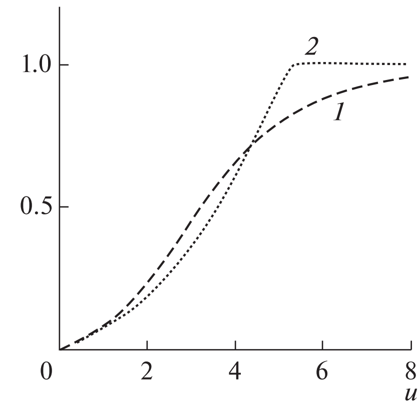
Данные к графикам на фиг. 6: $c = 4$ ($\rho = -1/2$); для графика *1*: $\mu = 1.75$ ($\varphi'(0) \approx 0.105$, $\varphi''(0) \approx 0.085$); для графика *2*: $r = 1.5$ ($\varphi'(0) \approx 0.104$, $\varphi''(0) \approx 0.065$; $c/r = 40/15 \approx 2.6666$) (случай $\lambda < r$).

Данные к графикам на фиг. 7а (графики на фиг. 7б те же в другом масштабе): $c = 1.95$ ($\rho \approx 0.026$); для графика *1*: $\mu = 0.2$ ($\rho < \mu m/c \approx 0.2$) и $\sigma^2 = 0.275$, $\varphi'(0) \approx 0.065$, $\varphi''(0) \approx 0.005457$; для графика *2*: $\sigma^2 = 0$, $r = 0.01$ ($\rho > rm/c \approx 0.01$), $\varphi'(0) \approx 0.048$, $\varphi''(0) \approx -0.000368$ (случай $\lambda > r$); для графика *3* – графика функции $\varphi_0(u)$ в модели без инвестиций: $\mu = \sigma^2 = 0$, $\varphi_0'(0) \approx 0.013$, $\varphi_0''(0) \approx -0.000164$.

Графики на фиг. 1–7 демонстрируют преимущества применения рисковых инвестиций по сравнению с безрисковыми в зоне малых значений НК, причем это преимущество может быть более или менее значительным в зависимости от параметров, в частности, от разницы между па-



Фиг. 3. ($\rho = -1/2$).

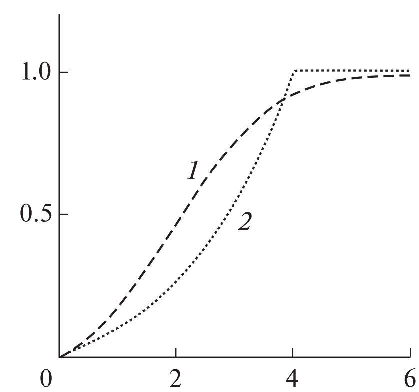


Фиг. 4.

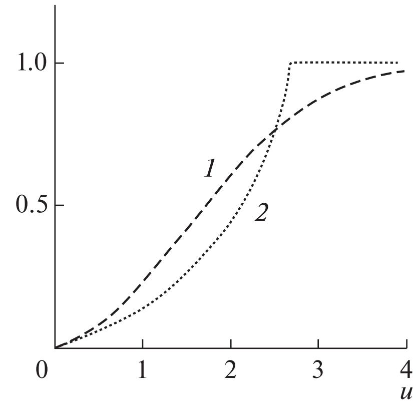
раметрами μ и r. Кроме того, фиг. 3–6 демонстрируют зависимость наличия или отсутствия гладкости ВНР, соответствующей безрисковой стратегии, от соотношения параметров λ и r (см. также замечания 3, 5).

Данные к графикам на фиг. 8: $c = 4$ ($\rho = -1/2$); для графика *1*: $\mu = 0.25$ $\sigma^2 = 0.2$, $\varphi'(0) \approx 0.00734$, $\varphi''(0) \approx 0.002392$; для графика *2*: $\sigma^2 = 0$, $r = 0.2$, $\varphi'(0) \approx 0.009743$, $\varphi''(0) \approx 0.002923$ (случай $\lambda > r$).

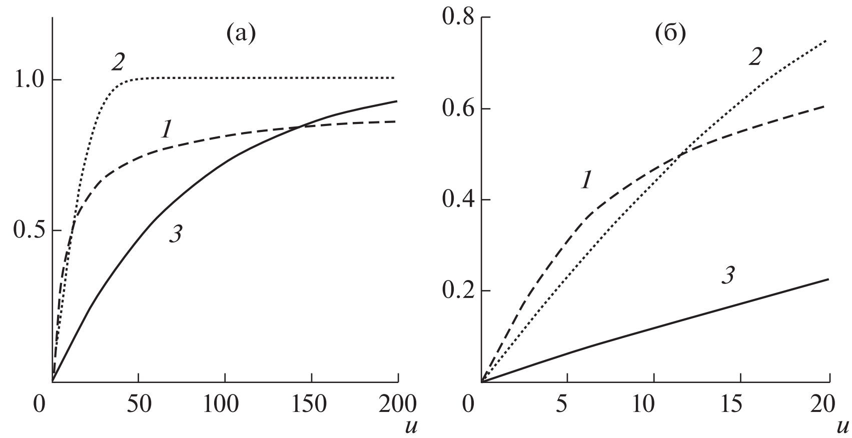
Графики на фиг. 8 показывают, что при малой разнице параметров μ и r безрисковый актив может полностью доминировать рисковый с рассматриваемыми параметрами при всех значениях НК.



Фиг. 5. ВНР как функция НК в случае отрицательной нагрузки безопасности.

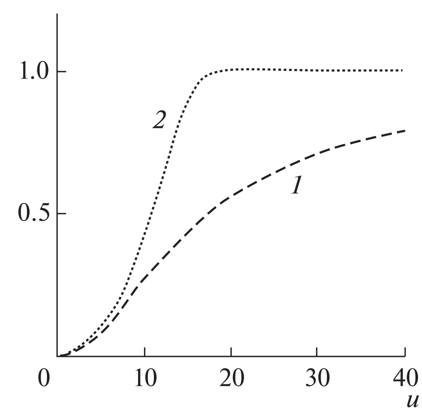


Фиг. 6. ВНР как функция НК в случае отрицательной нагрузки безопасности.

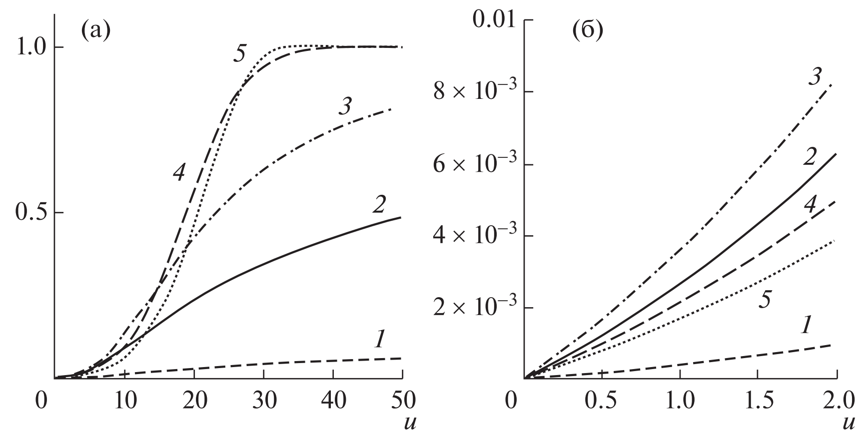


Фиг. 7. ВНР в случае относительно малого положительного значения нагрузки безопасности.

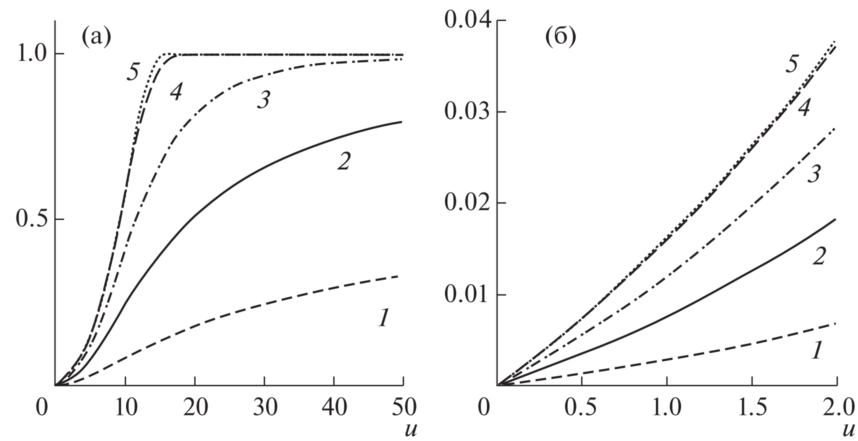
Данные к графикам на фиг. 9а (графики на фиг. 9б те же в другом масштабе): $c = 4$ ($\rho = -1/2$); параметры составляющих портфеля: $\mu = 0.25$, $\sigma^2 = 0.855$; $r = 0.1$; для графика *1*: $\alpha = 2/3$, $\varphi'(0) \approx$ ≈ 0.0003634, $\varphi''(0) \approx 0.0001617$; для графика *2*: $\alpha = 0.5$, $\varphi'(0) \approx 0.002272$, $\varphi''(0) \approx 0.0006904$; для графика *3*: $\alpha = 1/3$, $\varphi'(0) \approx 0.003087$, $\varphi''(0) \approx 0.001055$; для графика 4: $\alpha = 0.1$, $\varphi'(0) \approx 0.002273$, $\varphi''(0) \approx 0.0006872$; для графика *5*: $\alpha = 0$, $\varphi'(0) \approx 0.001461$, $\varphi''(0) \approx 0.0004019$ (случай $\lambda > r$).



Фиг. 8. ВНР как функция НК в случае отрицательной нагрузки безопасности.

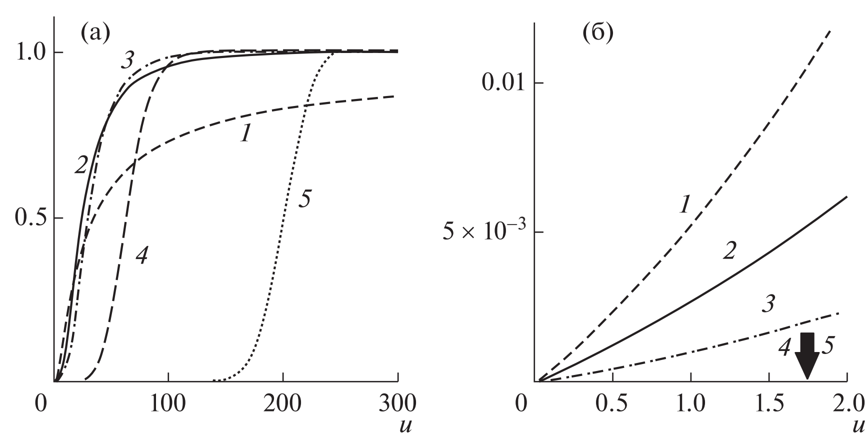


Фиг. 9. ВНР при простых стратегиях с изменением доли рискового актива в портфеле.



Фиг. 10. ВНР при простых стратегиях с изменением доли рискового актива в портфеле.

Данные к графикам на фиг. 10а (графики на фиг. 10б те же в другом масштабе): $c = 4$ ($\rho = -1/2$); параметры составляющих портфеля: $\mu = 0.25$, $\sigma^2 = 0.855$; $r = 0.24$; для графика *1*: $\alpha = 2/3$, $\varphi'(0) \approx 0.002442$, $\varphi''(0) \approx 0.0008301$; для графика *2*: $\alpha = 0.5$, $\varphi'(0) \approx 0.006558$, $\varphi''(0) \approx 0.001938$; для



Фиг. 11. ВНР при простых стратегиях с изменением доли рискового актива в портфеле.

графика *3*: $\alpha = 1/3$, $\varphi'(0) \approx 0.01$, $\varphi''(0) \approx 0.003708$; для графика *4*: $\alpha = 0.1$, $\varphi'(0) \approx 0.014$, $\varphi''(0) \approx 0.004755$; для графика *5*: $\alpha = 0$, $\varphi'(0) \approx 0.014$, $\varphi''(0) \approx 0.004306$ (случай $\lambda > r$).

Данные к графикам на фиг. 11а (графики на фиг. 11б те же в другом масштабе): $c = 4$ ($\rho = -1/2$); параметры составляющих портфеля: $\mu = 0.25$, $\sigma^2 = 0.3$; $r = 0.01$; для графика *1*: $\alpha = 1$, $\varphi'(0) \approx 0.00681$, $\varphi''(0) \approx 0.121$; для графика *2*: $\alpha = 0.5$, $\varphi'(0) \approx 0.002296$, $\varphi''(0) \approx 0.0007372$; для графика *3*: $\alpha = 1/3$, $\varphi'(0) \approx 0.0009082$, $\varphi''(0) \approx 0.0002571$; для графика *4*: $\alpha = 0.1$, $\varphi'(0) \approx 0.0000042$, $\varphi''(0) \approx 0.0000016$; для графика *5*: $\alpha = 0$, $\varphi'(0) \approx 0$, $\varphi''(0) \approx 0$ (случай $\lambda > r$).

Графики на фиг. 9–11 показывают, как может меняться ВНР при изменении доли рискового актива в портфеле. Наиболее явно это влияние можно проследить при малых значениях НК. На фигурах видно, что для выбранных значений доли рискового актива возможны различные ситуации при ее уменьшении вплоть до нулевого значения: на фиг. 9б ВНР сначала возрастает (графики *1–3*), а потом убывает (графики *3–5*); на фиг. 10б ВНР только возрастает; а на фиг. 11б – только убывает.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ВЫВОДЫ

Завершено начатое в [1] исследование задачи о влиянии простых инвестиционных стратегий на ВНР в коллективной модели пенсионного страхования в случае экспоненциального распределения случайных доходов СК по договорам пожизненной ренты. Рассматривается ВНР на бесконечном интервале времени при постоянном сохранении фиксированной пропорции рискового и безрискового активов, причем доля рискового актива в инвестиционном портфеле может быть как строго положительной (рисковые инвестиции), так и нулевой (безрисковые инвестиции).

В данной работе кратко формулируются результаты исследования влияния рисковых инвестиций, подробно изложенные в [1], основное же внимание уделяется изучению ВНР при безрисковой стратегии и сравнению ее с рисковыми стратегиями с точки зрения возможности увеличения ВНР при различных значениях НК. Исследование в рамках данной модели, как и в [1], основано на связи ВНР как функции НК с решением корректно поставленной сингулярной задачи для ИДУ, порожденного инфинитезимальным оператором случайного процесса, описывающего динамику резерва СК при рассматриваемой инвестиционной стратегии. Показано, что ИДУ в данном случае является “вырожденным” по отношению к исследованному в [1], однако, сингулярная задача для ИДУ ставится в принципиально другом классе, свойства функций которого определяются “физическими” свойствами ВНР в модели с безрисковыми инвестициями. В частности, устанавливается, что при значениях НК, не меньших величины c/r, разорение никогда не произойдет, т.е. ВНР при таких значениях равна единице, что невозможно при рисковых инвестициях. С другой стороны, в то время как ВНР в модели с рисковыми инвестициями является, по крайней мере, дважды непрерывно дифференцируемой функцией, выясняется, что ВНР при безрисковой стратегии может (при некоторых соотношениях параметров модели) оказаться даже негладкой функцией, имея разрыв производной в точке c/r и удовлетворяя ИДУ всюду, за исключением указанной точки (см. фиг. 5, 6).

В результате исследования ВНР в модели с безрисковой стратегией и экспоненциальным распределением случайных доходов доказаны существование и единственность решения соответствующей “вырожденной” сингулярной задачи для ИДУ и эквивалентность этой задачи некоторой сингулярной задаче для ОДУ, получено ее явное решение, исследованы свойства этого решения, позволяющие судить о качественном характере поведения ВНР при значениях НК, меньших величины c/r.

При заданных параметрах процесса страхового риска и финансовых активов судить о целесообразности включения в портфель рисковых активов в той или иной пропорции по отношению к безрисковой части с точки зрения возможности увеличения ВНР при малых значениях НК (точнее, при НК, не превосходящем величины c/r), позволяют теоретически обоснованные численные расчеты, примеры которых представлены на фиг. 1–11. (При значениях НК, не меньших этого уровня, как уже говорилось, неразорение с вероятностью единица обеспечивается вложением всего капитала в безрисковый актив, а вложение в рисковый всегда приводит к ненулевой вероятности разорения, и включать его в портфель в таком случае не является целесообразным.) Представленные графики показывают, что при малых значениях НК простые рисковые стратегии (напомним, что параметры μ, σ могут интерпретироваться как параметры инвестиционного портфеля) в некоторых случаях дают существенное увеличение ВНР по сравнению с безрисковой стратегией. С другой стороны, как показано в [1], применение рисковых портфелей с относительно большой волатильностью дает уменьшение ВНР по сравнению с ВНР в модели без инвестиций при любом значении НК, и в этом случае безрисковые инвестиции, очевидно, являются предпочтительными.

Как уже отмечалось в [1], для того, чтобы более полно ответить на вопрос о том, какую роль рисковые активы могут играть в увеличении ВНР, необходимо изучить задачу оптимального динамического управления портфелем активов, в предположении, что доля рискового актива может меняться со временем. Эта задача является предметом отдельного рассмотрения, связанного с исследованием нелинейных ИДУ, что выходит за рамки данной работы (о проблеме оптимального управления инвестициями в разных постановках для классической модели коллективного риска см. [14]–[17]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Славко Б.В.* Платежеспособность страховой компании в дуальной модели риска с учетом инвестиций: анализ и численные исследования сингулярных краевых задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 174–198.
2. *Grandell J.* Aspects of Risk Theory. New York: Springer, 1991. 175 p.
3. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin Probabilities. Advanced series on statistical science and applied probability. V. 14. Singapore: World Scientific, 2010. 602 p.
4. *Albrecher H., Badescuc A., Landriaultd D.* On the dual risk model with tax payments// Insurance Math. Econom. 2008. V. 42. № 3. P. 1086–1094.
5. *Avanzia B., Gerber H.U., Shiub E.S.W.* Optimal dividends in the dual model // Insurance Math. Econom. 2007. V. 41. № 1. P. 111–123.
6. *Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous: the case of negative risk sums // Finance Stochast. 2016. V. 20. № 2. P. 355–379.
7. *Белкина Т.А., Кабанов Ю.М.* Вязкостные решения интегродифференциальных уравнений для вероятности неразорения // Теория вероятностей и ее применения. 2015. Т. 60. № 4. С. 802—810.
8. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б.* Вероятность неразорения в коллективной модели пожизненной ренты как вязкостное решение интегродифференциального уравнения// Вестник ЦЭМИ РАН. 2018. Вып. 1. С. 1–9.
https://doi.org/10.33276/S0000097-9-1
9. *Belkina T.A., Konyukhova N.B., Slavko B.V.* Analytic-numerical investigations of singular problems for survival probability in the dual risk model with simple investment strategies// Analytical and Computational Methods in Probability Theory and Its Applications (V.V. Rykov et al. (Eds.)) / Series: Lecture Notes in Computer Science (LNCS). 2017. V. 10684. P. 236–250 (Springer International Publishing AG 2017).
https://doi.org/10.1007/978-3-319-71504-9
10. *Belkina T.A., Konyukhova N.B.* On sufficient conditions for survival probability in the life annuity insurance model with risk–free investment income // In: “IX Moscow International Conference on Operations Research (ORM2018; Moscow, October 22–27, 2018). Proceedings. In two volumes / Editor-in-chief F. Ereshko”. Moscow: MAKS Press, 2018. V. 1. P. 213–218.
11. *Belkina T.* Risky investment for insurers and sufficiency theorems for the survival probability // Markov Processes Relat. Fields. 2014. № 20. P. 505–525.
12. *Конюхова Н.Б.* Сингулярные задачи Коши для сингулярно возмущенных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // I: Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 1. С. 52–61; II: Дифференц. ур-ния. 1996. Т. 32. № 4. С. 491–500.
13. *Белкина Т.А., Конюхова Н.Б., Курочкин С.В.* Динамические модели страхования с учетом инвестиций: сингулярные задачи с ограничениями для интегродифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 1. С. 47–98.
14. *Hipp C., Plum M.* Optimal investment for insurers // Insurance Math. Econom. 2000. V. 27. № 2. P. 215–228.
15. *Hipp C., Plum M.* Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers // Finance Stochast. 2003. V. 7. № 3. P. 299–321.
16. *Azcue P., Muler M.* Optimal investment strategy to minimize the ruin probability of an insurance company under borrowing constraints // Insurance Math. Econom. 2009. V. 44. № 1. P. 26–34.
17. *Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M.* Optimal constrained investment in the Cramer-Lundberg model // Scandinavian Actuarial Journal. 2014. Issue 5. P. 383–404.