

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРОВ  
ЭЙЛЕРА–ПУАНСО К ВЫБОРУ ТРИАНГУЛЯЦИОННОЙ СЕТКИ  
ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА<sup>1)</sup>© 2020 г. А. А. Буров<sup>1,2,\*</sup>, В. И. Никонов<sup>1,2,\*</sup><sup>1</sup> 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия<sup>2</sup> 101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, НИУ ВШЭ, Россия

\*e-mail: jtm@narod.ru, nikon\_v@list.ru

Поступила в редакцию 03.02.2020 г.

Переработанный вариант 03.02.2020 г.

Принята к публикации 07.06.2020 г.

Для вычисления инерциальных характеристик небесных тел могут быть использованы триангуляционные разбиения таких объектов, построенные на основании данных фотометрических наблюдений. Эти разбиения могут уточняться по мере накопления необходимой информации. В связи с этим возникает вопрос, в какой мере “восприимчивы” к выбору таких разбиений приближения инерциальных характеристик небесных тел, в частности, приближения компонент тензора Эйлера–Пуансо разных порядков. Такие компоненты присутствуют в разложении гравитационного потенциала в ряд по гармоническим многочленам. В настоящей работе для некоторых малых небесных тел выполняется сравнение указанных коэффициентов при переходе от грубых к более точным разбиениям. Библ. 44. Табл. 10.

**Ключевые слова:** приближение гравитационного потенциала, тензор Эйлера–Пуансо.**DOI:** 10.31857/S0044466920100063

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пусть  $\mathcal{B}$  – твердое тело, оснащенное правой прямоугольной системой координат  $Ox_1x_2x_3$ , плотность которого в точке  $P: \overline{OP} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$  составляет  $\rho = \rho(\mathbf{x})$ . Тогда, как известно (см., например, [1]–[5]), в точке  $Q: \overline{OQ} = \mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$  гравитационный потенциал  $U(\mathbf{r})$  и напряженность гравитационного поля  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  определяются как

$$U(\mathbf{r}) = -G \int_{\mathcal{B}} \frac{\rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{d(\mathbf{r}, \mathbf{x})}, \quad d(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = (\mathbf{r} - \mathbf{x}, \mathbf{r} - \mathbf{x})^{1/2}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.1)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

Для описания движения вне гравитирующего тела  $\mathcal{B}$  применяют разложения подынтегрального выражения в (1.1) в ряд по степеням параметра, определяющего малость отношения размеров тела к расстоянию до изучаемой точки. Пусть

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = \frac{-2(\mathbf{r}, \mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{x})}{r^2}.$$

Разложение подынтегрального выражения в (1.1) в ряд по степеням такого параметра позволяет записать потенциал в виде ряда по гармоническим многочленам (см., например, [6], см. также [7])

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{G}{r} \int_{\mathcal{B}} \left( 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 - \frac{5}{16}\varepsilon^3 + \frac{35}{128}\varepsilon^4 + \dots \right) \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv -\frac{G}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_k}{r^k}.$$

<sup>1)</sup> Исследования В.И. Никонова выполнялись в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки научных исследований молодых российских ученых – кандидатов и докторов наук (№ МК-1712.2019.1), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ (код проекта 18-01-00335).

Для определения коэффициентов  $U_k$  этого разложения используют величины

$$J_{k_1 k_2 k_3} = \int_{\mathfrak{B}} \rho(\mathbf{x}) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} d\mathbf{x},$$

являющиеся компонентами т.н. тензора Эйлера–Пуансо ранга  $k = k_1 + k_2 + k_3$ .

Коэффициенты  $U_k$ , как известно (см., например, [8]), имеют вид

$$\begin{aligned} U_0 &= J_{000}, \quad U_1 = \frac{1}{r}(J_{100}r_1 + J_{010}r_2 + J_{001}r_3), \\ U_2 &= -\frac{1}{2}(J_{200} + J_{020} + J_{002}) + \frac{3}{r^2}(J_{110}r_1r_2 + J_{101}r_1r_3 + J_{011}r_2r_3) + \frac{3}{2r^2}(J_{200}r_1^2 + J_{020}r_2^2 + J_{002}r_3^2), \\ U_3 &= -\frac{3}{2r}[(J_{300} + J_{120} + J_{102})r_1 + (J_{210} + J_{030} + J_{012})r_2 + (J_{201} + J_{021} + J_{003})r_3] + \frac{5}{2r^3}[J_{300}r_1^3 + \\ &+ J_{030}r_2^3 + J_{003}r_3^3 + 6J_{111}r_1r_2r_3 + 3(J_{210}r_1^2r_2 + J_{201}r_1^2r_3 + J_{120}r_1r_2^2 + J_{102}r_1r_3^2 + J_{021}r_2^2r_3 + J_{012}r_2r_3^2)], \\ U_4 &= \frac{3}{8}[J_{400} + J_{040} + J_{004} + 2(J_{220} + J_{202} + J_{022})] - \frac{15}{4r^2}[(J_{400} + J_{220} + J_{202})r_1^2 + \\ &+ (J_{040} + J_{220} + J_{022})r_2^2 + (J_{004} + J_{202} + J_{022})r_3^2 + 2(J_{310} + J_{112} + J_{130})r_1r_2 + \\ &+ (J_{301} + J_{121} + J_{103})r_1r_3 + (J_{211} + J_{031} + J_{013})r_2r_3] + \frac{35}{16r^4}[J_{400}r_1^4 + J_{040}r_2^4 + J_{004}r_3^4 + \\ &+ 12(J_{211}r_1^2r_2r_3 + J_{121}r_1r_2^2r_3 + J_{112}r_1r_2r_3^2) + 4(J_{130}r_1^3r_2 + J_{103}r_1r_3^3 + J_{301}r_1^3r_3 + J_{310}r_1^3r_2 + \\ &+ J_{031}r_2^3r_3 + J_{013}r_3^3r_2) + 6(J_{220}r_1^2r_2^2 + J_{202}r_1^2r_3^2 + J_{022}r_2^2r_3^2)]. \end{aligned}$$

**Замечание 1.** Тензор инерции  $I$  и тензор Эйлера–Пуансо второго ранга  $J_2$  связаны соотношениями (см., например, [9])

$$I = \text{Tr}(J_2)E - J_2, \quad J_2 = \frac{1}{2}\text{Tr}(I)E - I, \quad J_2 \begin{pmatrix} J_{200} & J_{110} & J_{101} \\ J_{110} & J_{020} & J_{011} \\ J_{101} & J_{011} & J_{002} \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где  $E$  – единичная матрица. У этих тензоров общие собственные векторы, а вместе с ними – и главные оси инерции. Кроме того, имеют место равенства

$$I_x = J_y + J_z, \quad I_y = J_x + J_z, \quad I_z = J_x + J_y,$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – главные моменты инерции, а  $J_x, J_y, J_z$  – собственные значения тензора Эйлера–Пуансо второго ранга. Совпадение собственных векторов следует, например, из того, что  $I$  и  $J_2$  коммутируют:

$$I \cdot J_2 = J_2 \cdot I,$$

в чем с помощью соотношений (1.2) можно убедиться непосредственно.

Вычисление компонент тензора Эйлера–Пуансо возможно в явном виде для некоторых однородных тел с несложной геометрией, например, для однородных многогранников (см. [9], [10]) и, в частности, для тетраэдров. Это обстоятельство играет решающую роль для вычисления изучаемых инерционных параметров конкретных небесных тел.

## 2. ОСОБЕННОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МАЛЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Сведения о малых небесных телах весьма скудны. Сведения о геометрии поверхностей малых небесных тел известны из результатов фотометрии, позволяющих после соответствующей обработки приблизить поверхности таких тел триангуляционными сетками. Эти сетки составляют основу для дальнейших вычислений. Кроме того, в таких вычислениях молчаливо предполагается, что плотность изучаемых тел постоянна, в дальнейших рассуждениях она предполагается равной единице.

Поверхность тела, представленная в дальнейшем той или иной триангуляционной сеткой, порождает систему тетраэдров с общей вершиной, совпадающей для определенности с центром масс всего тела. Аналогично тому, как это делалось ранее для вычисления приближения потенциала [11]–[13], вычисления компонент тензора Эйлера–Пуансо сводятся к вычислению вклада в эти компоненты от каждого из возникших таким образом тетраэдров. Применение теорем Гаусса–Остроградского и Стокса позволяет вычислить этот вклад в явном виде. Возникающие при этом громоздкие явные формулы, используемые для дальнейших вычислений, имеются в [14], [15] и здесь не приводятся.

В рамках сделанных предположений ниже реализуется следующий порядок вычислений компонент тензора Эйлера–Пуансо (ср. [15], [16]):

- 1) вычисление объема  $V = J_0 = J_{000}$  (тензор нулевого ранга);
- 2) определение положения точки  $Z$  – центра масс тела:

$$\overrightarrow{OZ} = \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T = V^{-1}(J_{100}, J_{010}, J_{001})^T = V^{-1}J_1$$

(тензор первого ранга);

3) переход из исходной системы координат  $Ox_1x_2x_3$  в систему координат  $Zx_1x_2x_3$ , оси которой параллельны соответствующим осям исходной:  $OX_k \parallel ZX_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ;

4) вычисление в осях  $Zx_1x_2x_3$  компонент тензора Эйлера–Пуансо второго ранга (1.2);

5) вычисление с помощью (1.2) компонент центрального тензора инерции;

6) вычисление главных центральных моментов инерции  $I_1, I_2, I_3$  и единичных векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – собственных векторов тензора  $I$ , определяющих главные центральные оси инерции;

7) переход от системы координат  $Zx_1x_2x_3$  к системе координат  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$ , оси которой направлены по главным центральным осям инерции;

8) вычисление компонент тензоров Эйлера–Пуансо третьего и четвертого рангов  $J_{k_1k_2k_3}$ ,  $k_1 + k_2 + k_3 = 3$  и  $k_1 + k_2 + k_3 = 4$  в системе координат  $Z\xi_1\xi_2\xi_3$ .

Этот порядок применяется в дальнейшем для вычисления инерционных характеристик таких малых небесных тел, как астероиды (433) Эрос и (21) Лютетия, а также комета (67P) Чурюмова–Герасименко.

### 3. СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНЕРЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ НЕКОТОРЫХ МАЛЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

В этом разделе сравниваются инерционные характеристики – компоненты тензоров Эйлера–Пуансо с нулевого по четвертый ранг, а также главные центральные моменты инерции для таких малых небесных тел, как астероиды (433) Эрос, и (21) Лютетия, а также для кометы (67P) Чурюмова–Герасименко, вычисленные по различным триангуляционным сеткам. В каждой из табл. 1–6 в последней колонке собраны данные, вычисленные по триангуляционной сетке, состоящей из наибольшего числа вершин. Для оценки точности любой из величин вычисляется разность между значением соответствующей величины из последней колонки (будем считать это значение референц-значением, PЗ) и ее значением из изучаемой колонки, эта разность относится к PЗ. Получающееся отношение выражается в процентах. Знак в отношении указывает, превосходит или нет изучаемое значение соответствующее PЗ.

**Замечание 2.** Зачастую в разложении потенциала вводятся сферические координаты и разложение представляется в виде ряда Лапласа, коэффициенты которого известны как коэффициенты Стокса. Эти коэффициенты вычисляются через компоненты тензоров Эйлера–Пуансо по стандартным формулам (см., например, [17], [18]).

#### 3.1. Объемы и главные центральные моменты инерции

Для астероида (433) Эрос известны шесть триангуляционных сеток (см. [19]), отличающихся друг от друга разным разрешением. Пять из них используются для вычислений в настоящей работе.

Параметры сеток, а также результаты вычислений объема и главных центральных моментов инерции сведены в табл. 1. В первой колонке этой таблицы приводятся наименования сопоставляемых величин, во второй и третьей колонках – соответствующие величины, вычисленные в

работах [20] и [21], в оставшихся пяти колонках – величины, вычисленные по пяти выбранным триангуляционным сеткам.

Для астероида (21) Лютетия аналогичные вычисления выполнялись по пяти триангуляционным сеткам из [22], отличающимся друг от друга разным разрешением. Параметры сеток, а также результаты вычислений объема и главных центральных моментов инерции сведены в табл. 2.

Для кометы (67P) Чурюмова–Герасименко вычисления выполнялись также по пяти триангуляционным сеткам, заимствованным из [23]–[27]. В табл. 3 приведены основные параметры сеток, а также результаты вычислений объема и главных центральных моментов инерции.

### 3.2. Компоненты тензоров Эйлера–Пуансо третьего и четвертого порядка

По тем же триангуляционным сеткам для рассматриваемых тел были вычислены компоненты тензоров Эйлера–Пуансо  $J'_3 = J_3/V$  и  $J'_4 = J_4/V$ . Для астероидов (433) Эрос, (21) Лютетия и кометы (67P) Чурюмова–Герасименко вычисленные величины собраны в табл. 4–9.

Вычисления компонент тензора Эйлера–Пуансо для астероида (433) Эрос показали, что результаты, полученные для самой грубой сетки 1, существенно отличаются от аналогичных результатов для самой точной сетки лишь для  $J_{120}$ : разница составила примерно 135%. При этом для чуть менее грубой сетки 2 аналогичная разница, оказывается, составляет примерно 18.5% и вполне приемлема. В большинстве случаев разница составляет от процентов до долей процентов.

Из табл. 6 и 7 видно, что для астероида (21) Лютетия увеличение числа элементов треугольной сетки на порядок также приводит к уточнению инерционных характеристик на проценты или доли процента.

Аналогичные выводы для кометы (67P) Чурюмова–Герасименко можно сделать, анализируя табл. 8 и 9.

**Замечание 3.** Известно, что в рассматриваемом приближении астероид (433) Эрос можно рассматривать как близкий к динамически симметричному: величина

$$\frac{I_3 - I_2}{(I_2 + I_3)/2} \approx 0.01674544227$$

достаточно близка к нулю. Однако комета (67P) Чурюмова–Герасименко также может быть рассмотрена как близкая к динамически симметричной: величина

$$\frac{I_3 - I_2}{(I_2 + I_3)/2} \approx 0.08709366538$$

также близка к нулю. Это обстоятельство позволяет ожидать от этой кометы наличие движений, близких к прецессионным.

## 4. ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ МАЛЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Для проверки точности определения приближений гравитационного потенциала требуется проведение натуральных экспериментов. Вместе с тем косвенная проверка может быть выполнена с помощью так называемых точек либрации. Напомним, что для равномерно вращающегося гравитирующего тела под точками либрации понимают положения равновесия относительно системы отсчета, вращающейся вместе с этим телом. Точкам либрации отвечают критические точки так называемого приведенного потенциала, состоящего из потенциала центробежных сил и потенциала ньютоновского притяжения. Для вычисления точек либрации и исследования их устойчивости, как правило (см. [28]–[31]), используют в качестве потенциала приближение Слудского–Вернера–Ширса [11]–[13], [32]. Так, для астероида (21) Лютетия соответствующие вычисления были выполнены в [31]. Для оценки точности любой из координат для каждой точки либрации вычисляется разность между значением соответствующей величины из последней строки (будем считать это значение референц-значением, P3) и ее значением из изучаемой строки, эта разность относится к P3. Получающееся отношение выражается в процентах. Знак в отношении указывает, превосходит или нет изучаемое значение соответствующее P3.

Для астероида (21) Лютетия внешние точки либрации были вычислены в рамках второго, третьего и четвертого порядка приближений потенциала. Результаты вычислений, выполненных для триангуляционной сетки 5 из ([22]), приведены в табл. 10 в сравнении с результатами из [31].

Вычисления показали хорошее, с точностью до процентов, согласование значений ряда координат точек либрации: координаты  $r_1$  для  $E_1$  и  $E_2$ , координаты  $r_2$  для  $E_3$  и  $E_4$ , координаты  $r_3$  для  $E_4$ .

Отклонения для других координат составляют от десятков до сотен процентов. При этом наблюдается отличие не только в величине, но и в знаке координат. Вопрос о происхождении таких отличий и об уточнении значений таких координат требует дальнейших исследований, быть может, — с учетом слагаемых более высокой степени в разложении потенциала.

## 5. ИСТОРИЧЕСКИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Если понятие точек либрации в задаче многих тел хорошо известно и достаточно полно освещено в литературе (см., например, [33]), то понятие точек либрации вращающихся гравитирующих тел известно гораздо меньше. Впервые оно было введено, вероятно, В.К. Абалакиным [34] и исследовалось Ю.В. Батраковым, С.Г. Журавлевым (Скончался 9 декабря 2019.) и И.И. Косенко [35]–[44] (см. также Дополнение в монографии [33]) преимущественно применительно к гравитирующим эллипсоидам. Возрождение интереса к вычислению точек либрации и определению их свойств естественно сопоставить со все возрастающим интересом к динамике малых небесных тел. Определение свойств точек либрации малых небесных тел находится на этапе начального становления.

### 6. ПРИЛОЖЕНИЕ: таблицы с результатами вычислений

**Таблица 1.** Астероид (433) Эрос: вершины  $v$ , грани  $f$ , объем  $V$  (в км<sup>3</sup>) и отнесенные к объему главные центральные моменты инерции (в км)

	[20]	[21]	1	2	3	4	5
$v$	—	—	856	3897	5078	11272	44701
$f$	—	—	1708	7790	10152	22540	89398
$V$	2505 (−1.19%)	2503 (−1.27%)	2491.61 (−1.72%)	2526 (−0.36%)	2528.48 (−0.26%)	2532.58 (−0.1%)	2535.12
$I_1/V$	15.06 (−0.4%)	15.56 (+2.1%)	14.99 (−1.6%)	15.18 (−0.3%)	15.19 (−0.3%)	15.22 (−0.06%)	15.23
$I_2/V$	73.31 (−0.35%)	73.32 (−0.34%)	72.68 (−1.21%)	73.39 (−0.24%)	73.43 (−0.19%)	73.51 (−0.08%)	73.57
$I_3/V$	74.57 (−0.33%)	74.49 (−0.44%)	73.88 (−1.26%)	74.63 (−0.25%)	74.67 (−0.2%)	74.76 (−0.08%)	74.82

**Таблица 2.** Астероид (21) Лютетия: вершины  $v$ , грани  $f$ , объем  $V$  (в км<sup>3</sup>) и отнесенные к объему главные центральные моменты инерции (в км)

	1	2	3	4	5
$v$	1483	2914	5979	12265	23894
$f$	2962	5824	11954	24526	47784
$V$	495141 (−0.72%)	497050 (−0.34%)	498001 (−0.15%)	498512 (−0.05%)	498746
$I_1/V$	802.93 (−0.6%)	805.47 (−0.28%)	806.73 (−0.13%)	807.42 (−0.04%)	807.74
$I_2/V$	1096.55 (−0.6%)	1100.02 (−0.29%)	1101.80 (−0.13%)	1102.76 (−0.04%)	1103.20
$I_3/V$	1264.00 (−0.63%)	1268.26 (−0.29%)	1270.33 (−0.13%)	1271.45 (−0.04%)	1271.96

**Таблица 3.** Комета (67P) Чурюмова-Герасименко: вершины  $v$ , грани  $f$ , объем  $V$  (в км<sup>3</sup>) и отнесенные к объему главные центральные моменты инерции (в км)

	1	2	3	4	5
$v$	2895	5938	12227	23779	48900
$f$	5786	11872	24450	47554	97796
$V$	18.480526 (−0.58%)	18.539815 (−0.26%)	18.568231 (−0.11%)	18.580877 (−0.04%)	18.588567
$I_1/V$	0.918398 (−0.64%)	0.921576 (−0.3%)	0.923116 (−0.13%)	0.923855 (−0.05%)	0.924320
$I_2/V$	1.757877 (−0.43%)	1.762028 (−0.2%)	1.764049 (−0.08%)	1.764992 (−0.03%)	1.765514662
$I_3/V$	1.917550 (−0.45%)	1.922312 (−0.21%)	1.924563 (−0.09%)	1.925661 (−0.03%)	1.926280655

**Таблица 4.** Астероид (433) Эрос: компоненты тензоров  $J'_3$  (в км<sup>3</sup>) и  $J'_4$  (в км<sup>4</sup>)

	1	2	3
$J_{300}$	−44.6264 (+3.6%)	−46.0039 (+0.6%)	−46.0979 (+0.2%)
$J_{030}$	2.9678 (−6.49%)	3.1246 (−1.55%)	3.1373 (−1.15%)
$J_{003}$	−0.2539 (−10.54%)	−0.2331 (−1.48%)	−0.2326 (−1.26%)
$J_{210}$	−69.8072 (+2.37%)	−71.1327 (+0.52%)	−71.2222 (+0.4%)
$J_{021}$	−0.2608 (+5.58%)	−0.2648 (+4.13%)	−0.2675 (+3.15%)
$J_{102}$	3.3485 (−3.23%)	3.4416 (−0.54%)	3.4489 (−0.33%)
$J_{201}$	10.2070 (−1.67%)	10.3133 (−0.65%)	10.3461 (−0.33%)
$J_{120}$	−0.1965 (−135%)	−0.0991 (−18.5%)	−0.0958 (−14.59%)
$J_{012}$	0.9234 (+1.6%)	0.9102 (+0.14%)	0.9097 (+0.09%)
$J_{111}$	−0.2643 (+6.8%)	−0.2741 (+3.35%)	−0.2751 (+2.3%)
$J_{400}$	8370.39 (−2.3%)	8526.06 (−0.48%)	8536.31 (−0.36%)
$J_{040}$	147.0651 (−4%)	151.7836 (−0.93%)	152.1689 (−0.68%)
$J_{004}$	102.7193 (−3.04%)	105.2150 (−0.69%)	105.4181 (−0.49%)
$J_{310}$	206.3211 (−4.12%)	213.4149 (−0.82%)	213.9633 (−0.57%)
$J_{031}$	−1.5343 (+1.3%)	−1.5324 (+1.42%)	−1.5397 (+0.95%)
$J_{103}$	−2.2374 (+1.67%)	−2.2428 (+1.43%)	−2.2543 (+0.93%)
$J_{301}$	3.7682 (+25,29%)	3.1033 (+3,18%)	3.0439 (+3.04%)
$J_{130}$	−17.3855 (+3.73%)	−17.9280 (+0.73%)	−17.9834 (+0.42%)
$J_{013}$	−0.2309 (+8.23%)	−0.2520 (−0.16%)	−0.2533 (−0.68%)
$J_{220}$	558.7348 (−3.15%)	572.9731 (−0.68%)	573.9647 (−0.51%)
$J_{022}$	38.3500 (−3.04%)	39.2902 (−0.66%)	39.3584 (−0.49%)
$J_{202}$	354.4814 (−2.72%)	362.3251 (−0.57%)	362.8973 (−0.41%)
$J_{211}$	−7.9898 (+3.39%)	−8.2100 (−0.73%)	−8.2358 (−0.42%)
$J_{121}$	6.4170 (−5.9%)	6.6949 (−1.83%)	6.7355 (−1.23%)
$J_{112}$	−4.6225 (+5.12%)	−4.8471 (+0.66%)	−4.8537 (+0.53%)

Таблица 5. Астероид (433) Эрос: компоненты тензоров  $J'_3$  (в км<sup>3</sup>) и  $J'_4$  (в км<sup>4</sup>) (продолжение)

	4	5
$J_{300}$	-46.2266 (+0.6%)	-46.3057
$J_{030}$	3.1603 (-0.43%)	3.1738
$J_{003}$	-0.2314 (-0.74%)	-0.2297
$J_{210}$	-71.3948 (+0.15%)	-71.5045
$J_{021}$	-0.2715 (+1.7%)	-0.2762
$J_{102}$	3.4591 (-0.04%)	3.4640
$J_{201}$	10.3706 (-0.1%)	10.3808
$J_{120}$	-0.0901 (-7.78%)	-0.0836
$J_{012}$	0.9091 (+0.02%)	0.9089
$J_{111}$	-0.2819 (+0.6%)	-0.2836
$J_{400}$	8555.01 (-0.14%)	8567.33
$J_{040}$	152.8179 (-0.25%)	153.2073
$J_{004}$	105.7323 (-0.2%)	105.9412
$J_{310}$	214.730 (-0.21%)	215.1836
$J_{031}$	-1.5487 (+0.73%)	-1.5545
$J_{103}$	-2.2682 (+0.32%)	-2.2754
$J_{301}$	3.0342 (+0.88%)	3.0077
$J_{130}$	-18.0227 (+0.2%)	-18.0596
$J_{013}$	-0.2520 (-0.16%)	-0.2516
$J_{220}$	575.7780 (-0.13%)	576.8863
$J_{022}$	39.4763 (-0.19%)	39.5519
$J_{202}$	363.7862 (-0.16%)	364.3868
$J_{211}$	-8.2674 (-0.04%)	-8.2704
$J_{121}$	6.7922 (-0.4%)	6.8194
$J_{112}$	-4.8722 (+0.15%)	-4.8794

Таблица 6. Астероид (21) Лютеция: компоненты тензоров  $J_3'$  (в км<sup>3</sup>) и  $J_4'$  (в км<sup>4</sup>)

	1	2	3
$J_{300}$	3699.47 (−1.49%)	3731.91 (−0.63%)	3743.64 (−0.32%)
$J_{030}$	1562.43 (−1.75%)	1578.81 (−0.72%)	1584.57 (−0.36%)
$J_{003}$	−262.16 (+2.57%)	−263.71 (+2.00%)	−266.93 (+0.80%)
$J_{210}$	−991.75 (+0.92%)	−1000.55 (+0.04%)	−999.39 (+0.16%)
$J_{021}$	228.51 (−1.66%)	229.38 (−1.28%)	231.46 (−0.39%)
$J_{102}$	−930.32 (+1.57%)	−939.78 (+0.57%)	−942.25 (+0.31%)
$J_{201}$	236.81 (+3.57%)	229.24 (+0.26%)	229.44 (+0.35%)
$J_{120}$	−986.59 (+1.91%)	−994.99 (+1.07%)	−1001.34 (+0.44%)
$J_{012}$	−618.31 (+2.12%)	−624.99 (+1.06%)	−628.56 (+0.49%)
$J_{111}$	−75.12 (+0.91%)	−76.49 (−0.89%)	−75.64 (+0.23%)
$J_{400}$	−1321869.47 (+1.28%)	−1330873.35 (+0.6%)	−1335367.14 (+0.27%)
$J_{040}$	−520972.06 (+1.32%)	−524789.31 (+0.6%)	−526543.07 (+0.27%)
$J_{004}$	−219596.07 (+1.22%)	−220923.04 (+0.63%)	−221692.89 (+0.28%)
$J_{310}$	19124.05 (−1.69%)	19383.04 (−0.36%)	19362.16 (−0.47%)
$J_{031}$	1832.13 (−8.21%)	1919.04 (−3.85%)	1956.65 (−1.97%)
$J_{103}$	818.54 (+15.52%)	746.59 (+5.37%)	732.57 (+3.39%)
$J_{301}$	−2579.13 (−8.38%)	−2370.79 (−0.37%)	−2418.14 (−1.62%)
$J_{130}$	7165.71 (−5.43%)	7348.03 (−3.02%)	7498.80 (−1.03%)
$J_{013}$	−9840.91 (+2.94%)	−9983.36 (+1.54%)	−10070.69 (+0.68%)
$J_{220}$	−259429.48 (+1.31%)	−261227.60 (+0.62%)	−262137.53 (+0.28%)
$J_{022}$	−112237.27 (+1.28%)	−112979.98 (+0.63%)	−113379.83 (+0.28%)
$J_{202}$	−187877.64 (+1.29%)	−189211.09 (+0.59%)	−189845.54 (+0.26%)
$J_{211}$	21919.40 (−2.50%)	22173.43 (−1.37%)	22356.37 (−0.55%)
$J_{121}$	−2635.20 (+5.48%)	−2723.53 (+2.31%)	−2748.82 (+1.41%)
$J_{112}$	−11055.65 (+2.22%)	−11200.50 (+0.94%)	−11253.24 (+0.47%)



Таблица 7. Астероид (21) Лютеция: компоненты тензоров  $J'_3$  (в км<sup>3</sup>) и  $J'_4$  (в км<sup>4</sup>) (продолжение)

	4	5
$J_{300}$	3751.55 (−0.11%)	3755.60
$J_{030}$	1588.93 (−0.09%)	1590.31
$J_{003}$	−268.25 (+0.31%)	−269.08
$J_{210}$	−1000.83 (+0.02%)	−1000.98
$J_{021}$	231.79 (−0.25%)	232.37
$J_{102}$	−944.19 (+0.10%)	−945.17
$J_{201}$	229.15 (+0.22%)	228.64
$J_{120}$	−1004.09 (+0.17%)	−1005.77
$J_{012}$	−630.93 (+0.12%)	−631.68
$J_{111}$	−75.96 (−0.19%)	−75.82
$J_{400}$	−1337835.45 (+0.08%)	−1338944.32
$J_{040}$	−527507.24 (+0.08%)	−527953.76
$J_{004}$	−222104.11 (+0.09%)	−222313.50
$J_{310}$	19421.36 (−0.16%)	19452.95
$J_{031}$	1983.59 (−0.62%)	1995.97
$J_{103}$	719.81 (+1.59%)	708.54
$J_{301}$	−2399.17 (−0.82%)	−2379.70
$J_{130}$	7545.29 (−0.42%)	7576.94
$J_{013}$	−10119.52 (+0.19%)	−10139.15
$J_{220}$	−262642.13 (+0.09%)	−262866.92
$J_{022}$	−113599.60 (+0.09%)	−113697.11
$J_{202}$	−190179.70 (+0.08%)	−190337.77
$J_{211}$	22445.17 (−0.16%)	22480.32
$J_{121}$	−2776.89 (+0.40%)	−2788.02
$J_{112}$	−11285.19 (+0.19%)	−11306.29

Таблица 8. Комета (67P) Чурюмова-Герасименко: компоненты тензоров  $J_3'$  (в км<sup>3</sup>) и  $J_4'$  (в км<sup>4</sup>)

	1	2	3
$J_{300}$	0.1437737 (+1.16%)	0.1429270 (+0.56%)	0.1426242 (+0.35%)
$J_{030}$	0.0939143 (-0.82%)	0.0943907 (-0.32%)	0.0944925 (-0.21%)
$J_{003}$	0.0022740 (-5.8%)	0.0023532 (-2.52%)	0.0023481 (-2.73%)
$J_{210}$	-0.3187569 (+0.48%)	-0.3195623 (+0.23%)	-0.3198757 (+0.13%)
$J_{021}$	-0.0179884 (+0.18%)	-0.0180355 (-0.08%)	-0.0180273 (-0.03%)
$J_{102}$	-0.0456872 (+0.07%)	-0.0456915 (+0.06%)	-0.0456773 (+0.09%)
$J_{201}$	0.2375132 (-0.44%)	0.2381568 (-0.17%)	0.2384325 (-0.05%)
$J_{120}$	-0.0082339 (-6.21%)	-0.0080791 (-4.21%)	-0.0079472 (-2.51%)
$J_{012}$	0.0365234 (-1.8%)	0.0368791 (-0.85%)	0.0370979 (-0.26%)
$J_{111}$	-0.0824885 (+1.21%)	-0.0830969 (+0.48%)	-0.0833645 (+0.16%)
$J_{400}$	3.7732312 (-0.78%)	3.7891155 (-0.36%)	3.7970131 (-0.15%)
$J_{040}$	0.6679720 (-1.31%)	0.6727083 (-0.61%)	0.6749087 (-0.29%)
$J_{004}$	0.3234464 (-1.25%)	0.3256053 (-0.6%)	0.3267255 (-0.25%)
$J_{310}$	0.1534550 (-1.36%)	0.1545617 (-0.64%)	0.1550685 (-0.32%)
$J_{031}$	-0.0366000 (+1.71%)	-0.0369070 (+0.89%)	-0.0370987 (+0.37%)
$J_{103}$	0.0076724 (-5.39%)	0.0079237 (-2.29%)	0.0080513 (-0.72%)
$J_{301}$	0.0043840 (+52.61%)	0.0035136 (+22.31%)	0.0032225 (+12.18%)
$J_{130}$	-0.0206255 (+2.10%)	-0.0207602 (+1.46%)	-0.0209483 (+0.57%)
$J_{013}$	0.0034987 (+2.07%)	0.0034623 (+1.01%)	0.0034391 (+0.34%)
$J_{220}$	0.5792172 (-0.99%)	0.5823694 (-0.45%)	0.5838885 (-0.19%)
$J_{022}$	0.1750375 (-1.56%)	0.1765409 (-0.72%)	0.1772916 (-0.30%)
$J_{202}$	0.4445003 (-0.89%)	0.4467231 (-0.4%)	0.4477237 (-0.17%)
$J_{211}$	0.0166101 (-4.72%)	0.0170793 (-2.03%)	0.0173102 (-0.71%)
$J_{121}$	-0.0085711 (+4.10%)	-0.0087866 (+1.69%)	-0.0089057 (+0.35%)
$J_{112}$	-0.0299629 (+1.74%)	-0.0303140 (+0.59%)	-0.0304210 (+0.23%)

Таблица 9. Комета (67P) Чурюмова-Герасименко: компоненты тензоров  $J_3^1$  (в км<sup>3</sup>) и  $J_4^1$  (в км<sup>4</sup>) (продолжение)

	4	5
$J_{300}$	0.1422805 (+0.11%)	0.1421297
$J_{030}$	0.0945984 (-0.1%)	0.0946894
$J_{003}$	0.0023894 (-1.02%)	0.0024140
$J_{210}$	-0.3201677 (+0.04%)	-0.3202903
$J_{021}$	-0.0180133 (+0.04%)	-0.0180213
$J_{102}$	-0.0457171 (+0.01%)	-0.0457194
$J_{201}$	0.2385034 (-0.02%)	0.2385580
$J_{120}$	-0.0078137 (-0.79%)	-0.0077528
$J_{012}$	0.0371590 (-0.1%)	0.0371944
$J_{111}$	-0.0834460 +0.06%)	-0.0834962
$J_{400}$	3.8007798 (-0.05%)	3.8027855
$J_{040}$	0.6760905 (-0.11%)	0.6768486
$J_{004}$	0.3272334 (-0.1%)	0.3275554
$J_{310}$	0.1554037 (-0.1%)	0.1555649
$J_{031}$	-0.0371875 (+0.13%)	-0.0372367
$J_{103}$	0.0080799 (-0.36%)	0.0081093
$J_{301}$	0.0029856 (+3.93%)	0.0028726
$J_{130}$	-0.0210279 (+0.19%)	-0.0210679
$J_{013}$	0.0034383 (+0.31%)	0.0034276
$J_{220}$	0.5846118 (-0.07%)	0.5850183
$J_{022}$	0.1776208 (-0.11%)	0.1778189
$J_{202}$	0.4482164 (-0.06%)	0.4485063
$J_{211}$	0.0173785 (-0.32%)	0.0174335
$J_{121}$	-0.0089164 (+0.23%)	-0.0089373
$J_{112}$	-0.0304709 (+0.07%)	-0.0304924

**Таблица 10.** Астероид (21) Лютетия: сопоставление координат точек либрации, вычисленных в рамках модели 5 по разным приближениям потенциала (в км)

		$r_1$	$r_2$	$r_3$
$E_1$	[31]	137.10784172 (−1.85%)	8.44279347 (+252.82%)	0.08555291 (+55.4%)
	II	137.9868037 (−1.22%)	0	0
	III	138.2783084 (−1.01%)	−6.255268633 (−13.22%)	0.06665392912 (+21.07%)
	IV	139.6889026	−5.524787732	0.05505412345
$E_2$	[31]	−138.19144378 (+0.3%)	6.56551358 (+159.9%)	0.04185644 (−12.53%)
	II	−137.9868037 (+0.44%)	0	0
	III	−137.0527732 (+1.12%)	−12.09493420 (−10.35%)	0.06322246647 (+32.11%)
	IV	−138.6016641	−10.96027472	0.04785462650
$E_3$	[31]	−8.70389476 (−178.37%)	134.0169052 (−0.99%)	0.03696436 (−34%)
	II	0	134.8660067 (−0.36%)	0
	III	14.09223355 (+26.89%)	134.3758735 (−0.72%)	0.07099326711 (+26.74%)
	IV	11.10562314	135.3531321	0.05601555886
$E_4$	[31]	−14.61831274 (−299.05%)	−134.06107222 (+0.73%)	0.08749509 (−6.19%)
	II	0	−134.8660067 (+0.13%)	0
	III	9.215118408 (+25.47%)	−134.2137779 (+0.62%)	0.08456094614 (−9.33%)
	IV	7.344190672	−135.0478421	0.09326483887

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Appell P.* Leçons sur l'attraction et la fonction potentielle: professées à la Sorbonne en 1890–1891. Paris: G. Carie, 1892.
2. *Poincaré H.* Théorie du potentiel newtonien : Leçons professées à la Sorbonne pendant le premier semestre 1894–1895. Paris: Gauthier-Villars, 1899.
3. *Дубошин Г.Н.* Теория притяжения. М.: Физматлит, 1961.
4. *Сретенский Л.Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.-Л.: Гостехиздат, 1946.
5. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. М.: Наука, 1965.
6. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Физматлит, 1968.
7. *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Хошевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Физматлит, 1988.
8. *Dobrochine G.N.* Sur le développement de la fonction des forces dans le problème de deux corps finis // Celestial mechanics. 1976. V. 14. P. 239–281.
9. *Dobrovolskis A.R.* Inertia of Any Polyhedron // Icarus. 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.
10. *Mirtich B.* Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties // J. of Graphics Tools. 1996. V. 1. № 2. P. 31–50.
11. *Слудский Ф.А.* Об уклонении отвесных линий. Диссертация на степень магистра астрономии, М.: Университетская Типография (Катков и К), 1863.
12. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1994. V. 59. № 3. P. 253–278.
13. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1996. V. 65. № 3. P. 313–344.
14. *Буров А.А., Никонов В.И.* Вычисление потенциала притяжения астероида (433) Эрос с точностью до членов четвертого порядка // Докл. АН. Физика, технические науки. 2020. Т. 492. № 1. С. 56–60.
15. *Никонов В.И.* Гравитационные поля малых небесных тел. М.: Белый ветер, 2020.
16. *Burov A.A., Nikonov V.I.* Inertial characteristics of higher orders and dynamics in a proximity of a small celestial body // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2020. V. 16. № 2. P. 259–273.

17. *Werner R.A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron, *Computers & Geosciences*. 1997. V. 23. № 10. P. 1071–1077.
18. *Liao-McPherson D., Dunham W.D., Kolmanovsky I.* Model Predictive Control Strategies for Constrained Soft Landing on an Asteroid // *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference* 13–16 September 2016, Long Beach, California.
19. *Thomas P.C., Joseph J., Carcich B., et al.* Eros: Shape, Topography and Slope Processes // *Icarus*. 2002. V. 155. № 1. P. 18–37.
20. *Zuber M.T., Smith D.E., Cheng A.F., et al.* The Shape of 433 Eros from the NEAR-Shoemaker Laser Rangefinder // *Science*. 2000. V. 289. P. 2097–2100.
21. *Miller J.K., Konopliv A.S., Antreasian P.G., et al.* Determination of Shape, Gravity, and Rotational State of Asteroid 433 Eros // *Icarus*. 2002. V. 155. № 1. P. 3–17.
22. *Farnham T.L.* Shape model of asteroid 21 Lutetia, RO-A-OSINAC/OSIWAC-5-LUTETIA-SHAPE-V1.0, NASA Planetary Data System, 2013.
23. *Capanna C., Jorda L., Gutierrez P., Hviid S.* MSPCD SHAP2 Cartesian plate model for comet 67P/C-G 6K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V1.0:CG\_MSPCD\_SHAP2\_006K\_CART, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive, 2015.
24. *Capanna C., Jorda L., Gutierrez P., Hviid S.* MSPCD SHAP2 Cartesian plate model for comet 67P/C-G 12K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V1.0:CG\_MSPCD\_SHAP2\_012K\_CART, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive, 2015.
25. *Capanna C., Jorda L., Gutierrez P., Hviid S.* MSPCD SHAP2 Cartesian plate model for comet 67P/C-G 24K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V1.0:CG\_MSPCD\_SHAP2\_024K\_CART, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive, 2015.
26. *Capanna C., Jorda L., Gutierrez P., Hviid S.* MSPCD SHAP2 Cartesian plate model for comet 67P/C-G 48K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V1.0:CG\_MSPCD\_SHAP2\_048K\_CART, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive, 2015.
27. *Capanna C., Jorda L., Gutierrez P., Hviid S.* MSPCD SHAP2 Cartesian plate model for comet 67P/C-G 98K PLATES, RO-C-MULTI-5-67P-SHAPE-V1.0:CG\_MSPCD\_SHAP2\_098K\_CART, NASA Planetary Data System and ESA Planetary Science Archive, 2015.
28. *Wang X., Jiang Y., Gong Sh.* Analysis of the potential field and equilibrium points of irregular-shaped minor celestial bodies // *Astrophysics and Space Science*. 2014. V. 353. № 1. P. 105–121.
29. *Jiang Y., Baoyin H., Li H.* Collision and annihilation of relative equilibrium points around asteroids with a changing parameter // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2015. V. 452. № 4. P. 3924–3931.
30. *Jiang Y., Baoyin H.* Annihilation of Relative Equilibria in the Gravitational Field of Irregular-shaped Minor Celestial Bodies // *Planetary and Space Science*. 2018. V. 161. P. 107–136.
31. *Aljbaae S., Chanut T. G. G., Carruba V., et al.* The dynamical environment of asteroid 21 Lutetia according to different internal models // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. 2017. V. 464. № 3. P. 3552–3560.
32. *Werner R.A.* The solid angle hidden in polyhedron gravitation formulations // *J. of Geodesy*. 2017. V. 91. P. 307–328.
33. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Физматлит, 1978.
34. *Абалакин В.К.* К вопросу об устойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида // *Бюлл. Инст. Теор. Астр.* 1957. Т. 6. № 8. С. 543–549.
35. *Батраков Ю.В.* Периодические движения частицы в поле тяготения вращающегося трехосного эллипсоида // *Бюлл. Инст. Теор. Астр.* 1957. Т. 6. С. 524–542.
36. *Журавлев С.Г.* О неустойчивости точек либрации в окрестности вращающегося гравитирующего эллипсоида // В: Сб. научных работ аспирантов Университета Дружбы Народов. 1968. № 1. С. 169–183.
37. *Zhuravlev S.G.* Stability of the libration points of a rotating triaxial ellipsoid // *Celestial mechanics*. 1972. V. 6. P. 255–267.
38. *Zhuravlev S.G.* About the stability of the libration points of a rotating triaxial ellipsoid in a degenerate case // *Celestial Mech*. 1973. V. 8. № 1. P. 75–84.
39. *Журавлев С.Г.* Об устойчивости точек либрации вращающегося трехосного эллипсоида в пространственном случае // *Астрономический журнал*. 1974. Т. 51. № 6. С. 1330–1334.
40. *Косенко И.И.* О точках либрации вблизи гравитирующего вращающегося трехосного эллипсоида // *Прикл. матем. и механ.* 1981. Т. 45. № 1. С. 26–33.
41. *Косенко И.И.* Точки либрации в задаче о трехосном гравитирующем эллипсоиде: Геометрия области устойчивости // *Космические исследования*. 1981. Т. 19. № 2. С. 200–209.
42. *Косенко И.И.* Нелинейный анализ устойчивости точек либрации трехосного эллипсоида // *Прикл. матем. и механ.* 1985. Т. 49. № 1. С. 16–24.
43. *Косенко И.И.* О разложении гравитационного потенциала неоднородного эллипсоида в ряд // *Прикл. матем. и механ.* 1986. Т. 50. № 2. С. 194–199.
44. *Косенко И.И.* Об устойчивости точек либрации неоднородного трехосного эллипсоида // *Прикл. матем. и механ.* 1987. Т. 51. № 1. С. 3–8.