ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 10, с. 1734–1740

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ–РИМАНА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ НА ПОЛУПЛОСКОСТИ

И. Н. Дорофеева[1,*], А. Б. Расулов[1,**]

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, ФГБОУ ВО МЭИ, Россия

*e-mail: idoro224@gmail.com

**e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru

Поступила в редакцию 03.02.2020 г.
Переработанный вариант 29.05.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

Для уравнения с оператором Коши–Римана с сильной точечной особенностью в младшем коэффициенте на полуплоскости найдено интегральное представление решения в классе ограниченных функций и исследована задача типа Дирихле. Также изучен вопрос о вычислении интеграла Векуа–Помпейю, когда плотность интеграла имеет сильные особенности в множестве точек или линий. Библ. 9.

Ключевые слова: оператор Коши–Римана, сингулярная точка, оператор Векуа–Помпейю, полуплоскость, задача типа Дирихле.

DOI: 10.31857/S0044466920100075

ВВЕДЕНИЕ

В классе эллиптических систем первого порядка особое место занимает обобщенная система Коши–Римана (ОСКР). Если коэффициенты и правая часть ОСКР принадлежат пространству суммируемых функций со степенью $p > 2$, то представление общего решения уравнения этой системы из класса Гёльдера получено И.Н. Векуа [1]. Исследованию задач для ОСКР с коэффициентами, имеющими особенности первого порядка в изолированной особой точке и на линии, посвящены работы [2]–[7] и др.

Большой интерес к ОСКР вызван еще ее многочисленными приложениями. Например, ОСКР с сингулярной точкой применяется в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точками уплощения, с сингулярной линией сводится к варианту Эрнста уравнения Максвелла–Энштейна [8] и т.д. Во всех выше перечисленных работах ОСКР с особенностями в младших коэффициентах исследована, в основном, в конечной области. В данной статье для уравнения с оператором Коши–Римана с сильной точечной особенностью в младшем коэффициенте на полуплоскости найдено интегральное представление решения в классе ограниченных функций и исследована задача типа Дирихле. Кроме того, изучается вопрос о вычислении интеграла Tf, когда плотность интеграла имеет сильные особенности в множестве точек или линий.

1. Рассмотрим сначала общую ситуацию для уравнения

$$\partial_{\bar{z}}u - a(z)u = f(z) \tag{1}$$

с коэффициентом a, непрерывным в некоторой ограниченной области G. Напомним [1], что если $f \in L^p(G_0)$, $p > 2$, в подобласти $G_0 \subseteq G$, то интегральный оператор Векуа–Помпейю

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{G_0}\frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G_0, \tag{2}$$

где $d_2\zeta$ означает элемент площади, действует из $L^p(G_0)$ в класс Гёльдера $H(\overline{G_0})$. Более точно, функция Tf принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(G_0)$ и удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar{z}}Tf = f$, которое здесь и ниже понимается в смысле обобщенных функций. Поэтому в предположении $a \in L^p(G_0)$ функция $\Omega = Ta$ принадлежит $H(\overline{G_0})$ и удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar{z}}\Omega = a. \tag{3}$$

Отсюда немедленно следует [1], что если u является решением уравнения (1) в области G_0 и $\tilde{f} = e^{-\Omega}f \in L^p(G_0)$, то функция $\tilde{u} = e^{-\Omega}u$ удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar{z}}\tilde{u} = \tilde{f}$. Следовательно, формула

$$u = e^{\Omega}[T(e^{-\Omega}f) + \phi], \tag{4}$$

где ϕ аналитична в области G_0, описывает общее решение уравнения (1) в этой области.

Конечно, аналогичная ситуация имеет место и по отношению ко всей области G, если найдена функция $\Omega \in H_{loc}(G)$ со свойством (3). В ряде случаев подобную функцию можно построить с помощью последовательности подобластей $\overline{G_n} \subseteq G_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, исчерпывающих область G. Пусть T_n определяется аналогично (2) по отношению к G_n и последовательность $\Omega_n = T_n a$ равномерно сходится к некоторой функции Ω на каждом компакте $K \subseteq G$. Тогда на этом компакте для достаточно больших n функция Ω_n удовлетворяет уравнению $\partial_{\bar{z}}\Omega_n = a$, так, что $\Omega \in H_{loc}(G)$ и обладает свойством (3).

2. Пусть S^+ – верхняя полуплоскость, L – вещественная ось, $\overline{S^+} = S^+ \cup L$, $z_1 \in S^+$ и $|z_1| < \infty$. В области $\overline{S^+_\varepsilon} = \overline{S^+} \cap \{|z - z_1| > \varepsilon\}$ рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}\partial_{\bar{z}}u - Au = f,\\ A = \rho a, \quad \rho = \frac{(z - z_1)}{|z - z_1|^{n+1}}, \quad n > 1,\end{gathered} \tag{5}$$

с некоторыми $a(z), f(z) \in C(\overline{S}^+)$.

Исследования для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами, в основном, проведены в конечной области (см., например, [2]–[6]). В настоящей статье уравнение (5) с внутренней сверхсингулярной точкой рассматривается в области S^+ и исследуется задача типа Дирихле.

В рассматриваемом случае интегральный оператор T понимается по отношению к неограниченной области, в том числе и по отношению к $\mathbb{C}$. Хорошо известно [1], что если функция f непрерывно дифференцируема и $f(z) = O(|z|^\delta)$ при $z \to \infty$ с некоторым $\delta < -1$, то функция

$$(Tf)(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad \zeta, z \in \mathbb{C},$$

непрерывно дифференцируема и является решением уравнения (1) при $a = 0$. В своей монографии [1] И.Н. Векуа описал условие на функцию f, обеспечивающее принадлежность Tf классу $C^\mu(\mathbb{C})$ в терминах введенного им пространства $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$, $p > 2$. Под $C^\mu(\mathbb{C})$ здесь понимается класс непрерывных функций $f(z)$, которые вместе с $f(1/z)$ принадлежат $C^\mu(D)$ в единичном круге D. По определению, пространство $L^{p,\nu}(\mathbb{C})$ состоит из всех функций f, для которых $f(z)$ и $f_\nu(z) = |z|^{-\nu} f(1/z)$ принадлежат $L^p(D)$. В этих обозначениях если $f \in L^{p,2}(\mathbb{C})$, $p > 2$, то функция $Tf \in C^\mu(\mathbb{C})$, $\mu = 1 - 2/p$, и обращается в нуль на бесконечности (см. теоремы 1.24, 1.25 в [1]). В частности, $(Tf)(z) = o(|z|^{\mu-1})$ при $z \to \infty$.

Под обобщенным решением уравнения (5) понимается функция u, которая в области $\overline{S}^+\setminus\{z_1\}$ допускает обобщенную производную по $\bar{z}$, причем $u_{\bar{z}} \in L^{p,2}(\overline{S^+_\varepsilon})$, для любого $\varepsilon > 0$.

В дальнейшем для компактного изложения при $n > 1$ введем следующие обозначения:

$$\omega(z) = \frac{2}{(n-1)|z - z_1|^{n-1}}, \quad A_0(z) = \frac{z - z_1}{|z - z_1|^{n+1}}[a(z) - a(z_1)], \tag{6}$$

где ω – решение уравнения $u_{\bar{z}}(z) = -(z - z_1)|z - z_1|^{-1-n}$, $a \in C(\overline{S^+})$.

Введем сингулярный интеграл

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon A)(z) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{S^+}\frac{A(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z},$$

где интегральный оператор T_ε определяется аналогично (2) по отношению к области S_ε^+.

Теорема 1. *Пусть $n > 1$ и $A_0 \in L^{p,2}(\mathbb{S}^+)$. Тогда функция $\Omega(z)$, $z \neq z_1$; существует и представима в виде*

$$\Omega(z) = -a(z_1)\omega(z) + h(z), \quad z \neq 0, \tag{7}$$

где $h(z) \in C^\mu(\overline{S^+})$ определяется равенством

$$h(z) = (TA_0)(z) + \frac{a(z_1)}{(n-1)\pi i}\int_L \frac{d\zeta}{|\zeta - \zeta_1|^{n-1}(\zeta - z)}$$

и удовлетворяет уравнению $\Omega_{\bar{z}} = A$.

Соответственно в предположении $e^{-\Omega}f \in L^{p,2}(S^+)$ обобщенное решение уравнения (5) *дается формулой*

$$u = e^\Omega[\phi + T(e^{-\Omega}f)], \tag{8}$$

где $\phi \in C^\mu(\overline{S^+}, z_1)$ – произвольная аналитическая в области $S^+\backslash\{z_1\}$ функция и $\phi(z) = o(|z|^{-2/p})$, при $|z| \to \infty$.

Доказательство. Покажем, что функция $\Omega(z)$ представима в виде (7) и в области $\{z \in S^+,\ z \neq z_1\}$ является решением уравнения

$$\partial_{\bar{z}}\Omega = A(z).$$

Пусть оператор $T_{R,\varepsilon}$ определяется аналогично (2) по отношению к открытому множеству $G_{R,\varepsilon} = S^+ \cap \{|z - z_1| > \varepsilon\} \cap \{|z| < R\}$. Очевидно, при малом $\varepsilon > 0$ граница области $G_{R,\varepsilon}$ составлена из объединения отрезка $l = [-R, R]$, окружности $\gamma : |z - z_1| = \varepsilon$ и полуокружности $l_R = \{z : |z| = R,\ \mathrm{Re} z \geq 0\}$ с достаточно большим радиусом R и пусть $L_R = l \cup l_R$. В соответствии с принятым выше подходом достаточно убедиться, что

$$\Omega(z) = \lim_{\varepsilon\to 0, R\to\infty}(T_{R,\varepsilon}A)(z), \quad z \in K \subseteq G_{R,\varepsilon},$$

причем предел равномерен по z на компактах K. В дальнейшем $G_{R,\varepsilon} \equiv G_\varepsilon$.

С этой целью воспользуемся тождеством

$$-\frac{2}{(n-1)}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{1}{|\zeta - \zeta_1|^{n-1}}\right) = \frac{\zeta - \zeta_1}{|\zeta - \zeta_1|^{n+1}},$$

согласно которому

$$\frac{1}{\pi}\int_{G_\varepsilon}\frac{\zeta - \zeta_1}{|\zeta - \zeta_1|^{n+1}}\frac{d_2\zeta}{\zeta - z} = -\lim_{\delta_1\to 0}\frac{2}{(n-1)\pi}\int_{G_\varepsilon\cap\{|\zeta - z_1| \geq \delta_1\}}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left[\frac{1}{|\zeta - \zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta - z}\right]d_2\zeta. \tag{9}$$

В силу формулы Грина

$$\int_D \partial_{\bar{z}}U dxdy = \frac{1}{2i}\int_{\partial D}U dz \tag{10}$$

имеем

$$-\frac{2}{(n-1)\pi}\int\limits_{G_\varepsilon\cap\{|\zeta-z|\ge\delta_1\}}\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\left[\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}\right]d_2\zeta =$$

$$=\frac{2i}{(n-1)2\pi}\int\limits_{\partial G_\varepsilon}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta-\frac{2i}{(n-1)2\pi}\int\limits_{|\zeta-z|=\delta_1}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta,$$

где последний интеграл берется по окрестности против часовой стрелки. Поскольку в обозначениях (6)

$$-\lim_{\delta_1\to 0}\frac{2i}{(n-1)2\pi}\int\limits_{|\zeta-z|=\delta_1}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta=\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}},$$

то в (9) можем перейти к пределу

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{G_\varepsilon}\frac{\zeta-\zeta_1}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}}\frac{1}{\zeta-z}d_2\zeta=\frac{i}{(n-1)\pi}\int\limits_{\partial G_\varepsilon}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta+\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{(n-1)\pi i\varepsilon^{n-1}}\int\limits_{|\zeta-\zeta_1|=\varepsilon}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{(n-1)\pi i}\int\limits_{L_R}\frac{1}{|\zeta|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta+\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}.$$

По теореме Коши при $\varepsilon<|z-z_1|$ первый интеграл равен нулю, так что

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_{G_\varepsilon}\frac{\zeta}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}}\frac{1}{\zeta-z}d_2\zeta=-\frac{2}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}+\frac{1}{(n-1)\pi i}\int\limits_{L}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta.$$

Поскольку в обозначениях (6)

$$(T_\varepsilon A)(z)=(T_\varepsilon A_0)(z)-\frac{a(z_1)}{\pi}\int\limits_{G_\varepsilon}\frac{\zeta-\zeta_1}{|\zeta-\zeta_1|^{n+1}}\frac{1}{\zeta-z}d_2\zeta,$$

отсюда

$$(T_\varepsilon A)(z)=(T_\varepsilon A_0)(z)-a(z_1)\omega(z)+\frac{a(z_1)}{(n-1)\pi i}\int\limits_{L}\frac{1}{|\zeta-\zeta_1|^{n-1}}\frac{1}{\zeta-z}d\zeta,$$

или, что равносильно,

$$(T_\varepsilon A)(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\zeta-\zeta_1|\le\varepsilon}\frac{A_0(\zeta)}{\zeta-z}d_2\zeta-a(z_1)\omega(z)+h(z),\quad |z-z_1|>\varepsilon. \tag{11}$$

Зафиксируем $\delta>0$ и убедимся, что в области S_δ^+ функция $\Omega_\varepsilon=T_\varepsilon A$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно сходится к $\Omega=TA$ и, в частности, справедливо равенство (7). В самом деле, при $\varepsilon<\delta/2$ и $z\in G_\delta$ подынтегральное выражение в правой части (11) по модулю не превосходит $2|A_0(\zeta)|/\delta$, так что соответствующий интеграл равномерно стремится к нулю.

Остается показать, что $\partial_{\bar z}\Omega=A$ в области S_δ^+. Очевидно, в этой области $\Omega_\varepsilon=T_\delta A+\phi_{\varepsilon,\delta}$ с некоторой аналитической в G_ε функцией $\phi_{\varepsilon,\delta}$. Следовательно, $\phi_{\varepsilon,\delta}$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно сходится в этой области к некоторой аналитической функции ϕ_δ, так что $\Omega(z)=(T_\delta A)(z)+\phi_\delta(z)$, $z\in S_\delta^+$, и, в частности, $\partial_{\bar z}\Omega=A$.

Из последнего равенства как и в случае регулярных коэффициентов следует, что подстановка $u=e^{\Omega}u_0$ сводит (5) к уравнению

$$\partial_{\bar z}u_0=e^{-\Omega}f,$$

общее решение которого состоит из функций $u_0=\phi+T(e^{-\Omega}f)$. В результате приходим к представлению (8), которое завершает доказательство теоремы.

Заметим, что при $0<\alpha<1$ условие

$$u(z)=O(|z-z_1|^{-\alpha})\exp\left[-\frac{Re2a(z_1)}{(n-1)|z-z_1|^{n-1}}\right] \tag{12}$$

при $z \to z_1$ равносильно тому, что в этом представлении функция ϕ имеет $z = z_1$ устранимую особую точку и, следовательно, аналитична во всей области S^+ и по условию $\phi(z) = o(|z|^{-2/p})$ при $|z| \to \infty$.

Поэтому фактически функция u принадлежит классу функций, для которых $e^{-\Omega}u \in H(\overline{S^+})$. Этот класс функций, удовлетворяющий условию Гёльдера с некоторым показателем, удобно обозначить как $H(\overline{S^+}, e^{\Omega})$.

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ТИПА ДИРИХЛЕ

Требуется найти решение уравнения (5) из класса $H(\overline{S^+}, e^{\Omega})$ удовлетворяющее на границе L краевому условию:

$$\operatorname{Re}[e^{-\Omega}U]_L = g(t), \tag{D}$$

где $e^{\Omega(z)}U(t)$, $g(t)$, $k = 1, 2$, – непрерывные функции точек контура L, причем $g(t) = o(|t|^{-2/p})$.

Справедлива

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда задача* (*D*) *всегда разрешима и ее решение из класса* $H(\overline{S^+}, e^{\Omega})$, *имеющее поведение* (12), *при* $\operatorname{Im} z \to 0$ *дается с помощью формулы* (8), *в которой произвольная аналитическая функция* $\phi(z)$ *определяется равенством*:

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{g}_1(t)}{t - z} dt + iC_1,$$

$$\widetilde{g(t)} = g(t) - \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{\pi}\int_{S^+} \frac{e^{-\Omega} f(\zeta)}{\zeta - z} d_2\zeta\right\}(t),$$

где C_1 – *произвольная вещественная постоянная*.

Доказательство проводится на основе интегрального представления (8) и условия задачи типа Дирихле (D).

Решение задачи (D) описывается явной формулой (8) и содержит одну произвольную вещественную постоянную. Подставляя найденные значения $\varphi(z)$ в представление (8), получим решение задачи (D).

Заметим, что интегральное представление (8) решения $u(z)$ уравнения (5) и оценка (12) позволяют правильно ставить граничные задачи типа Римана–Гильберта и задачи типа Римана в полуплоскости.

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА ВЕКУА–ПОМПЕЙЮ С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ПЛОТНОСТИ

С практической точки зрения большое значение имеет вычисление интеграла $(TA)(z)$. Достойна внимания работа [7], в которой предложена схема построения в единичном круге D функции $A(z)$ с заданным поведением $(TA)(z)$ в особой точке $z = 0$. Например, в этой работе установлено, что для функции $A(z) = A(r)$ (зависящей только от $r = |z|$), интеграл $(TA)(z)$ определяется равенством

$$(TA)(z) = \frac{2}{z}\int_0^{|z|} A(\rho)\rho d\rho.$$

Отсюда, как частные случаи, следуют результаты, полученные ранее Л.Г. Михайловым:

$$1)\ (TA)(z) = \frac{2}{2-\alpha}\frac{|z|^{2-\alpha}}{z}, \quad A(\zeta) = \frac{1}{|\zeta|^{\alpha}}, \quad \alpha < 2.$$

В частности, при $\alpha = 1$ функция

$$2)\ (TA)(z) = 2\frac{|z|}{z}$$

ограничена. Из этих же соображений

$$3)\ (TA)(z) = \ln|z|^2, \quad A(\zeta) = \frac{1}{\overline{\zeta}} = \frac{e^{i\theta}}{\rho}.$$

Отмеченные примеры 1–3 приведены ранее без пояснений в [2, с. 123, 124].

Для вычисления интеграла $(TA)(z)$ в сверхсингулярном случае, когда область $D = \{z : |z| \le 1\}$ содержит некоторое сингулярное многообразие g, нами получены приведенные ниже формулы, которые упрощают вычисление.

Если $g = \{z : z = 0\}$, (и при $n > 1$) как следует из [9]

$$T\left(\frac{\zeta}{|\zeta|^{n+1}}\right)(z) = -\frac{2}{(n-1)|z|^{n-1}} + \frac{2}{(n-1)}, \quad z \ne 0.$$

Пусть, функция $A(z)$ представима в виде

$$A(z) = \frac{za(z)}{|z|^{n+1}}, \quad a(z) = a(0) + |z|^{n+1}\sum_{k,m\ge 1} a_{km} z^k \overline{z}^m,$$

где ряд сходится равномерно в рассматриваемой области $D = \{|z| < 1\}$. Учитывая представление [1]:

$$\left(T(\zeta^k\overline{\zeta}^m)\right)(z) = \begin{cases} \dfrac{z^{k+1}\overline{z}^{m+1}}{m+1} - \dfrac{z^{k-m}}{m+1}, & k \ge m, \\ \dfrac{z^{k+1}\overline{z}^{m+1}}{m+1}, & k < m, \end{cases}$$

получим

$$(T(A(\zeta)))(z) = \begin{cases} -\dfrac{2a(0)}{(n-1)|z|^{n-1}} + \dfrac{2a(0)}{(n-1)} + \sum\limits_{k,m\ge 1} a_{km}\left(\dfrac{z^{k+1}\overline{z}^{m+1}}{m+1} - \dfrac{z^{k-m}}{m+1}\right), & k \ge m, \\ -\dfrac{2a(0)}{(n-1)|z|^{n-1}} + \dfrac{2a(0)}{(n-1)} + \sum\limits_{k,m\ge 1} a_{km}\dfrac{z^{k+1}\overline{z}^{m+1}}{m+1}, & k < m. \end{cases}$$

Пусть $g = \{z : z = z_1, z = z_2, \dots, z = z_m\}$, $g \subseteq D$ и

$$A(z) = \sum_{j=1}^{m}(z - z_j)^{-1}|z - z_j|^{-n_j - 1} a_j(z_j), \quad n_j > 1.$$

Тогда имеем

$$(TA)(z) = \sum_{j=1}^{m}\frac{2a_j(z)}{(n_j - 1)} - \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2a_j(z_j)}{(n_j-1)|z - z_j|^{n_j - 1}}\right), \quad z \ne z_j, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Рассмотрим теперь случай, когда роль особых точек $z = z_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, играют концентрические окружности $L_j : |z| = R_j$, $j = 1, 2, \dots, m$, лежащие внутри области D, и

$$A(z) = m\sum_{j=1}\frac{p_j(z)a_j(z_j)}{|R_j - |z||^{n_j}}, \quad n_j > 1,$$

где функции $p_j(z)$ – нормирующие множители, причем $p_j(z) = p_{0j}(z)|p_{0j}(z)|^{-1}$, $p_{0j}(z) = z(|z| - R_j)$.

Тогда сингулярный интеграл $(TA)(z)$, $|z| \ne R_j$, $j = \overline{1,m}$, существует и определяется равенством

$$(TA)(z) = \sum_{j=1}^{m}\frac{2a_j(R_j)}{n_j - 1} - \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{2a_j(R_j)}{(n_j - 1)|R_j - r|^{n_j - 1}}\right).$$

Полученные значения оператора Векуа–Помпейю дают возможность исследовать уравнения различного порядка с оператором Коши–Римана с младшими членами, имеющими сильные особенности в точках и линиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции . М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
2. *Михайлов Л.Г.* Новые классы особых интегральных уравнений и их применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1963. 183 с.
3. *Усманов З.Д.* Обобщенные системы Коши–Римана с сингулярной точкой. Душанбе: Изд-во АН Тадж., 1993. 244 с.
4. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами// Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.
5. *Раджабов Н.Р.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами. Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. 236 с.
6. *Begehr H., Dao-Qing Dai.* On continuous solutions of a generalized Cauchy–Riemann system with more than one singularity // J. Differential Equations. 2004. V. 196. P. 67–90.
7. *Тимофеев А.Ю.* Весовые пространства функций, возникающие в исследовании обобщенных уравнений Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Уфимский матем. ж. 2010. Т. 2. № 1. С. 110–118.
8. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
9. *Rasulov A.B.* Integral Representations for a Generalized Cauchy–Riemann System with Singular Coefficients // J. of Mathematical Sciences, New York. 2015. V. 208. № 2. P. 257–263.