

ОБЩИЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 512.643

Светлой памяти Александра Александровича Абрамова посвящается

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ РАЦИОНАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ,  
ПРОВЕРЯЮЩИЙ КОНГРУЭНТНОСТЬ НОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ

© 2020 г. Х. Д. Икрамов<sup>1,\*</sup>, А. М. Назари<sup>2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

<sup>2</sup> Эрак, Университет Эрака, факультет математики, Исламская Республика Иран

\*e-mail: ikramov@cs.msu.su

\*\*e-mail: a-nazari@araku.ac.ir

Поступила в редакцию 28.02.2020 г.  
Переработанный вариант 28.02.2020 г.  
Принята к публикации 09.06.2020 г.

Рациональным мы называем конечный алгоритм, использующий только арифметические операции. Известны рациональные методы проверки конгруэнтности пары эрмитовых или пары унитарных матриц. Предложен рациональный алгоритм для проверки конгруэнтности нормальных матриц общего вида. Библ. 3. Фиг. 2.

**Ключевые слова:** конгруэнтность, юнитоид, коквадрат, подобие, теплицево разложение, индексы инерции, пифагоровы тройки, Марле, циркулянты.

DOI: 10.31857/S0044466920100099

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы называем комплексные  $n \times n$ -матрицы  $A$  и  $B$  конгруэнтными, если

$$B = S^*AS \quad (1)$$

для некоторой невырожденной матрицы  $S$ . (Другие используемые термины:  $A$  и  $B$  эрмитово конгруэнтны, или \*-конгруэнтны.) Нас интересует возможность проверить наличие или отсутствие конгруэнтности между  $A$  и  $B$  посредством рационального или почти рационального вычисления. Рациональным мы называем конечный алгоритм, использующий лишь арифметические операции. Если дополнительно допускается вычисление конечного числа квадратичных радикалов, то мы говорим о почти рациональном алгоритме. Сложность задачи о конгруэнтности состоит именно в требовании рациональности алгоритма; в противном случае ее можно было бы решить, сличая (не вычисляемые рационально) канонические формы матриц  $A$  и  $B$  относительно конгруэнций.

В настоящее время не известен рациональный алгоритм, проверяющий конгруэнтность матриц  $A$  и  $B$  общего вида. Не известно даже, существует ли вообще такой алгоритм. Однако, если  $A$  и  $B$  принадлежат тому или иному классу специальных матриц, то рациональная проверка конгруэнтности может оказаться возможной. Пусть, например,  $A$  и  $B$  – эрмитовы матрицы. Согласно классическому критерию,  $A$  и  $B$  конгруэнтны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые индексы инерции (положительный и отрицательный). Существует несколько рациональных способов вычисления индексов инерции эрмитовой матрицы. Можно, например, построить ее характеристический многочлен и затем, пользуясь теоремой Штурма, определить число его положительных и отрицательных корней.

Другой пример – унитарные матрицы  $A$  и  $B$ . В [1] показано, что конгруэнтность таких  $A$  и  $B$  равносильна их подобию. Для подобия же унитарных (и, более общо, диагонализуемых) матриц достаточно совпадения их характеристических многочленов. Процедура вычисления характеристического многочлена  $n \times n$ -матрицы требует лишь  $O(n^3)$  арифметических операций.

Эрмитовы и унитарные матрицы суть подмножества гораздо более широкого класса нормальных матриц. Рационального алгоритма проверки конгруэнтности для произвольных матриц этого класса пока не найдено. В данной статье мы делаем попытку предложить такой алгоритм. Однако ограничение все же остается: мы требуем, чтобы  $A$  и  $B$  были невырожденными матрицами. Существует несколько простых способов выделения ядра вырожденной матрицы. Однако, если требуется сохранить нормальность, в эти способы нужно ввести возможность извлечения квадратных корней. Хотелось бы избежать этого с тем, чтобы сохранить чисто рациональный характер алгоритма.

После изложения вспомогательных сведений в разд. 2–4 мы объясняем наш алгоритм в разд. 5. Способы построения тестовых матриц и примеры, иллюстрирующие работу алгоритма, приведены в заключительном разд. 6.

## 2. ЮНИТОИДЫ И НОРМАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

Понятие юнитоида, введенное в [1], означает матрицу, которая может быть приведена к диагональному виду посредством конгруэнтного преобразования. Таким образом, юнитоиды суть аналоги диагонализуемых матриц в теории преобразований подобия. Вместе с тем эти два класса матриц различны. Например, очевидно недиагонализуемая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

является юнитоидом. Действительно,  $A$  может быть представлена в виде суммы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первое слагаемое этой суммы есть симметричная матрица  $(A + A^T)/2$ , а второе — кососимметричная матрица  $(A - A^T)/2$ . Более того, матрица  $(A + A^T)/2$  положительно определена, т.е.  $A$  есть аккретивная матрица. Известно (см., например, [2]), что все аккретивные матрицы суть юнитоиды.

Пусть  $D$  — диагональная форма юнитоида  $A$ . Выполняя, если требуется, дополнительную конгруэнцию, можно сделать модули ненулевых диагональных элементов  $d_{ii}$  равными единице. Эта улучшенная диагональная матрица считается канонической формой  $A$  относительно конгруэнций. Она определяется следующими параметрами: рангом  $r$  и аргументами  $\theta_1, \dots, \theta_r$  ненулевых диагональных элементов. Последние называются каноническими углами матрицы  $A$ . Условимся выбирать их в интервале  $(-\pi, \pi]$ .

Нормальная матрица  $A$  приводима к диагональному виду посредством унитарного подобия, являющегося заодно (унитарной) конгруэнцией. Диагональные элементы полученной диагональной формы суть собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$ . По предположению, все они отличны от нуля. Таким образом, канонические углы нормальной матрицы — это аргументы ее собственных значений.

Из сказанного следует, что для проверки конгруэнтности (невырожденных) нормальных матриц  $A$  и  $B$  достаточно сравнить их канонические углы. При этом вычислять сами углы нет необходимости, нужно лишь убедиться в их совпадении или различии. Можно, например, использовать то обстоятельство, что числа  $e^{i \arg \lambda_j}$ ,  $1 \leq j \leq n$ , суть собственные значения унитарной матрицы  $U_A$  из полярного разложения матрицы  $A$ :

$$A = H_A U_A. \quad (2)$$

Поэтому конгруэнтность матриц  $A$  и  $B$  равносильна подобию унитарных матриц  $U_A$  и  $U_B$  из их полярных разложений.

Дефект этого рассуждения состоит в том, что полярное разложение нормальной матрицы в общем случае нельзя вычислить даже в радикалах [3], не говоря уже о рациональном процессе. Конечно, вместо самой матрицы  $U_A$  достаточно было бы найти ее характеристический многочлен. Однако не известен рациональный алгоритм вычисления этого многочлена непосредственно по матрице  $A$ , и сама возможность такого (рационального) вычисления сомнительна.

В отличие от  $U_A$ , матрицу  $U_A^2$  вычислить несложно. Напомним, что сомножители полярного разложения (2) нормальной матрицы  $A$  перестановочны. Отсюда выводим

$$A^{-*}A = H_A^{-1}(U_A H_A)U_A = H_A^{-1}(H_A U_A)U_A = U_A^2.$$

Рационально вычисляемая матрица  $A^{-*}A$  называется коквадратом матрицы  $A$ .

Поскольку для конгруэнтных матриц  $A$  и  $B$  унитарные матрицы  $U_A$  и  $U_B$  подобны, то должны быть подобны и коквадраты  $U_A^2$  и  $U_B^2$ . К сожалению, обратное неверно: из подобия коквадратов не следует конгруэнтности  $A$  и  $B$ . Пусть, например,  $A$  и  $B$  – (невырожденные) эрмитовы матрицы. Тогда

$$A^{-*}A = A^{-1}A = I = B^{-*}B.$$

Однако  $A$  и  $B$  не будут конгруэнтны, если их индексы инерции различны.

Итак, подобие коквадратов – необходимое, хотя и не достаточное условие конгруэнтности  $A$  и  $B$ . Поскольку оно проверяется рациональным и несложным способом, исследование конгруэнтности разумно начинать с него.

Если, несмотря на подобие коквадратов,  $A$  и  $B$  не конгруэнтны, это свидетельствует о наличии у них канонических углов  $\theta_A$  и  $\theta_B$ , отличающихся друг от друга на  $\pi$ . Соответствующие собственные значения  $\lambda_A = r_A e^{i\theta_A}$  и  $\lambda_B = r_B e^{i\theta_B}$  порождают одно и то же собственное значение коквадрата  $e^{i2\theta_A} = e^{i2\theta_B}$ .

Наш алгоритм для проверки конгруэнтности опирается на два простых следствия из интерпретации чисел  $\arg \lambda_i$  как канонических углов нормальной матрицы.

**Следствие 1.** Пусть нормальные матрицы  $A$  и  $B$  имеют разное число собственных значений в некотором секторе комплексной плоскости. Тогда  $A$  и  $B$  не могут быть конгруэнтны.

**Следствие 2.** Рассмотрим пару симметричных секторов

$$\gamma < \arg z < \delta \left( \delta - \gamma < \frac{\pi}{2} \right)$$

и

$$\pi + \gamma < \arg z < \pi + \delta.$$

Если для нормальных матриц  $A$  и  $B$  разность количеств собственных значений в этих двух секторах различна, то  $A$  и  $B$  не могут быть конгруэнтны.

### 3. ТЁПЛИЦЕВО РАЗЛОЖЕНИЕ

Напомним, что тёплицевым (или эрмитовым) разложением квадратной комплексной матрицы  $A$  называется ее представление в виде

$$A = B + iC, \quad B = B^*, \quad C = C^*. \quad (3)$$

Эрмитовы матрицы  $B$  и  $C$  в этом разложении однозначно определены:

$$B = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad C = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Тёплицево разложение нормальной матрицы  $A$  характеризуется следующим свойством.

**Предложение 1.** Квадратная матрица  $A$  нормальна, если и только если матрицы  $B$  и  $C$  в ее тёплицевом разложении перестановочны:

$$BC = CB.$$

Выполним унитарное подобие, приводящее  $A$  к диагональному виду:

$$U^*AU = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Числа  $\lambda_j = \beta_j + i\gamma_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , суть собственные значения матрицы  $A$ . Матрица  $U$  приводит к диагональному виду и каждую из матриц  $B$  и  $C$ :

$$U^*BU = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n), \quad U^*CU = \text{diag}(\gamma_1, \dots, \gamma_n).$$

Отсюда выводим

**Предложение 2.** Собственные значения матрицы  $B(C)$  суть вещественные (мнимые) части собственных значений нормальной матрицы  $A$ .

В свою очередь, из предложений 1 и 2 вытекает

**Предложение 3.** Собственными значениями эрмитовой матрицы  $\xi B + \eta C$  ( $\xi, \eta \in \mathbf{R}$ ) являются вещественные числа  $\xi\beta_j + \eta\gamma_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ ).

Количества положительных, отрицательных и нулевых собственных значений эрмитовой матрицы  $H$  (т.е. индексы инерции этой матрицы) будем обозначать символами  $n_+(H)$ ,  $n_-(H)$  и  $n_0(H)$ .

Применяя предложение 2 к разложению (3) нормальной матрицы  $A$ , немедленно получаем:

**Теорема 1.** Индексы  $n_+(B)$  и  $n_-(B)$  указывают число собственных значений матрицы  $A$ , находящихся соответственно в полуплоскостях  $\operatorname{Re} z > 0$  и  $\operatorname{Re} z < 0$ . Если вместо открытых полуплоскостей говорить о замкнутых полуплоскостях  $\operatorname{Re} z \geq 0$  и  $\operatorname{Re} z \leq 0$ , то к числам  $n_+(B)$  и  $n_-(B)$  нужно прибавить нулевой индекс  $n_0(B)$ . Тот же смысл по отношению к полуплоскостям  $\operatorname{Im} z > 0$ ,  $\operatorname{Im} z \geq 0$ ,  $\operatorname{Im} z < 0$  и  $\operatorname{Im} z \leq 0$  имеют числа  $n_+(C)$ ,  $n_+(C) + n_0(C)$ ,  $n_-(C)$  и  $n_-(C) + n_0(C)$ .

Подставим в теорему 1 вместо  $A$  матрицу  $e^{-i\alpha}A$ . Тёплицево разложение этой матрицы имеет вид

$$e^{-i\alpha}A = (\cos \alpha - i \sin \alpha)(B + iC) = (\cos \alpha B + \sin \alpha C) + i(\cos \alpha C - \sin \alpha B) \equiv B_\alpha + iC_\alpha.$$

Теперь в силу предложения 3 получаем теорему:

**Теорема 2.** Числа  $n_+(C_\alpha)$  и  $n_-(C_\alpha)$  указывают количества собственных значений матрицы  $A$ , лежащих соответственно выше и ниже прямой с уравнением  $y = (\operatorname{tg} \alpha)x$  на декартовой плоскости  $Oxy$ .

**Следствие 3.** Рассмотрим пару симметричных секторов, ограниченных прямыми  $y = (\operatorname{tg} \alpha)x$  и  $y = (\operatorname{tg} \beta)x$ ,  $\beta - \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Предположим, что на граничных прямых нет собственных значений  $A$ . Разность между числом собственных значений матрицы  $A$ , попадающих в эти два сектора, равна  $n_+(C_\alpha) - n_+(C_\beta)$ .

#### 4. ПИФАГОРОВЫ ТРОЙКИ

Поставив задачу построения рационального алгоритма, мы должны считать элементы матриц  $A$  и  $B$  рациональными или гауссовыми рациональными числами. В этом случае алгоритм может быть выполнен точно, если использовать возможность безошибочных вычислений, предоставляемую системами компьютерной алгебры. Поскольку предполагается многократное применение следствия 3, аргументы  $\alpha$  и  $\beta$  в нем нужно выбирать так, чтобы коэффициенты соответствующих прямых были рациональными числами. Для такого выбора мы прибегнем к пифагоровым тройкам.

Напомним, что пифагоровыми называются тройки натуральных чисел, выражающих длины сторон прямоугольного треугольника. Такие тройки можно генерировать по формулам

$$p = m^2 - n^2, \quad q = 2mn, \quad r = m^2 + n^2,$$

где  $m$  и  $n$  – взаимно простые числа разной четности. Тройке  $(p, q, r)$  можно сопоставить прямую

$$(m^2 - n^2)x - 2mny = 0$$

или, иначе,

$$y = \frac{m^2 - n^2}{2mn} x.$$

Если положить  $n = 2$ , то

$$\operatorname{tg} \phi_m \equiv \frac{m^2 - 4}{4m} \approx \frac{m}{4}$$

для больших  $m$ . При  $m = n + 1$  имеем

$$\operatorname{tg} \psi_n \equiv \frac{2n + 1}{4n(n + 1)} \approx \frac{1}{2n}$$

для больших  $n$ .

## 5. АЛГОРИТМ

Наш алгоритм основан на простых соображениях. Он начинается с построения коквдратов  $A^{-*}A$  и  $B^{-*}B$  и проверки их подобия. (В разд. 6 мы изменяем символ матрицы  $B$ , чтобы не путать ее с первой матрицей в теплицевом разложении  $A$ .) Если коквдраты не подобны, то  $A$  и  $B$  не конгруэнтны. На этом работа алгоритма закончена.

Пусть оказалось, что коквдраты подобны. В этом случае плоскость  $Oxy$  разбивается на большое число пар симметричных секторов прямыми, проходящими через начало координат. Если растворы этих секторов достаточно малы, а в спектрах матриц  $A$  и  $B$  нет патологически близких (в смысле хордального расстояния) точек, то в каждой паре секторов будет находиться не более одного (возможно, кратного) собственного значения каждой из матриц. Если собственные значения действительно присутствуют, но расположены в разных секторах, то  $A$  и  $B$  не могут быть конгруэнтны. Обнаруживается такая ситуация с помощью следствия 3.

Предположим, что ни в одной паре секторов нашего разбиения описанной ситуации не обнаружено. В этом случае можно с высокой вероятностью считать, что  $A$  и  $B$  имеют одни и те же канонические углы и, следовательно, конгруэнтны. Конечно, эта вероятность не равна единице, поэтому наш алгоритм в заголовке статьи назван эвристическим.

Разбиение плоскости происходит следующим образом. Выберем большие целые числа  $M$  и  $N$ . Проведем в первом и третьем квадрантах два семейства прямых

$$y = (\operatorname{tg} \phi_m)x, \quad m = 5, 7, \dots, M, \quad (4)$$

(таким образом,  $M$  нечетно) и

$$y = (\operatorname{tg} \psi_n)x, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

(По поводу обозначений  $\phi_m$  и  $\psi_n$  см. разд. 4.) Симметричные семейства прямых  $y = (-\operatorname{tg} \phi_m)x$  и  $y = (-\operatorname{tg} \psi_n)$  проводим во втором и четвертом квадрантах. Эти прямые определяют разбиение плоскости  $Oxy$  на пары симметричных секторов. Возможно проведение дополнительных лучей внутри секторов

$$\begin{aligned} 0 < \arg z < \psi_N, \quad \psi_1 < \arg z < \frac{\pi}{4}, \\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \phi_5, \quad \psi_M < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

и симметричных лучей в трех остальных квадрантах.

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обсудим вначале построение тестовых матриц для наших численных экспериментов.

Как известно, циркулянты фиксированного порядка  $n$  образуют коммутативную алгебру, диагонализруемую посредством одного и того же унитарного подобия, задаваемого матрицей дискретного преобразования Фурье. Тем самым все циркулянты являются нормальными матрицами.

Обозначим через  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  элементы первой строки  $n \times n$ -циркулянта  $A$ . Рассмотрим многочлен

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1}. \quad (6)$$

Числа  $f(\epsilon_0^j)$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ , суть собственные значения матрицы  $A$ . Здесь

$$\epsilon_0 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

есть первообразный корень  $n$ -й степени из единицы. В частности, при  $j = 0$ , т.е. когда  $\lambda$  в формуле (6) равно единице, получаем собственное значение

$$f(1) = a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}. \quad (7)$$

Обозначим через  $J$  матрицу порядка  $n$ , все элементы которой равны единице. Эта матрица также является циркулянтом. Ее ранг равен 1, а единственное ненулевое собственное значение равно  $n$ . Положим

$$F = A + \mu J.$$

Все, кроме одного, собственные значения матрицы  $F$  те же, что у  $A$ . Единственное отличающееся собственное число равно  $f(1) + \mu$  (см. (7)). При

$$\mu = -\frac{2}{n} f(1) \quad (8)$$

это собственное число приобретает значение  $-f(1)$ . Коквадраты матриц  $A$  и  $F$  имеют одинаковый спектр и, следовательно, подобны. В то же время  $A$  и  $F$  не конгруэнтны, поскольку имеют пару канонических углов, различающихся знаком. Описанным способом мы генерировали пары неконгруэнтных нормальных матриц, имеющих подобные коквадраты.

Предположим теперь, что число  $n$  нечетно, и определим диагональную матрицу

$$D = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1, 1).$$

Подобие

$$A \rightarrow G = D^{-1}AD = DAD$$

преобразует циркулянт  $A$  в косой циркулянт  $G$ , также являющийся нормальной матрицей. Это простой способ генерирования пар конгруэнтных нормальных матриц.

Наконец, если мы хотим повернуть спектр матрицы  $A$  и/или изменить модули ее собственных значений, достаточно умножить  $A$  на гауссово число  $\alpha + i\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ .

Рассмотрим теперь два примера работы нашего алгоритма. Все вычисления проводились в рациональной арифметике системы Maple.

**Пример 1.** Пусть  $v$  – строчный вектор

$$v = [1/5 \ 3/10 \ 0 \ 1/2 \ 1/2],$$

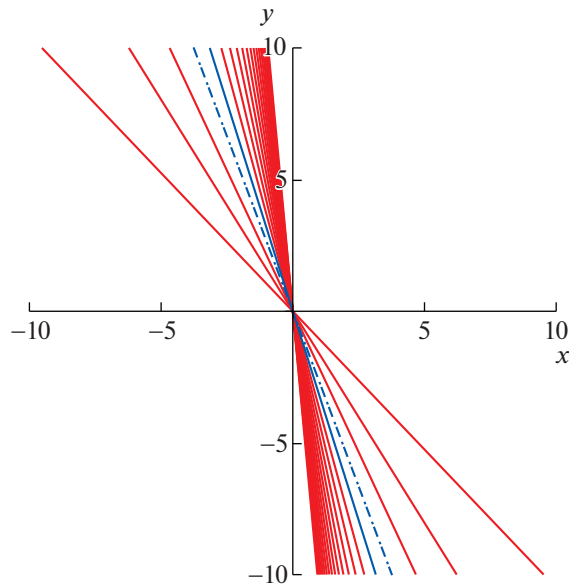
а  $A_1$  – циркулянт, для которого  $v$  является первой строкой. Положим  $A = (1 - 3i)A_1$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1/5 - 3/5i & 3/10 - \frac{9}{10}i & 0 & 1/2 - 3/2i & 1/2 - 3/2i \\ 1/2 - 3/2i & 1/5 - 3/5i & 3/10 - \frac{9}{10}i & 0 & 1/2 - 3/2i \\ 1/2 - 3/2i & 1/2 - 3/2i & 1/5 - 3/5i & 3/10 - \frac{9}{10}i & 0 \\ 0 & 1/2 - 3/2i & 1/2 - 3/2i & 1/5 - 3/5i & 3/10 - \frac{9}{10}i \\ 3/10 - \frac{9}{10}i & 0 & 1/2 - 3/2i & 1/2 - 3/2i & 1/5 - 3/5i \end{bmatrix}.$$

Сумма элементов в первой строке матрицы  $A_1$  равна  $f(1) = \frac{3}{2}$ . Обозначим через  $F_1$  матрицу  $A_1 + \mu J$ ,

где, согласно (8),  $\mu = -\frac{3}{5}$ . Положим  $F = (1 - 3i)F_1$ :

$$F = \begin{bmatrix} -2/5 + 6/5i & -3/10 + \frac{9}{10}i & -3/5 + 9/5i & -1/10 + 3/10i & -1/10 + 3/10i \\ -1/10 + 3/10i & -2/5 + 6/5i & -3/10 + \frac{9}{10}i & -3/5 + 9/5i & -1/10 + 3/10i \\ -1/10 + 3/10i & -1/10 + 3/10i & -2/5 + 6/5i & -3/10 + \frac{9}{10}i & -3/5 + 9/5i \\ -3/5 + 9/5i & -1/10 + 3/10i & -1/10 + 3/10i & -2/5 + 6/5i & -3/10 + \frac{9}{10}i \\ -3/10 + \frac{9}{10}i & -3/5 + 9/5i & -1/10 + 3/10i & -1/10 + 3/10i & -2/5 + 6/5i \end{bmatrix}.$$



Фиг. 1.

Приведем спектры матриц  $A$  и  $F$ :

$$\delta(A) = \begin{bmatrix} 1.495016885 + 0.3559886342i \\ -1.366618721 + 0.5201440884i \\ 0.7812085256 + 1.236086502i \\ -1.409606690 - 0.6122192248i \\ 1.500000000 - 4.500000000i \end{bmatrix}, \quad \delta(F) = \begin{bmatrix} 1.495016885 + 0.3559886342i \\ -1.366618721 + 0.5201440884i \\ 0.7812085256 + 1.236086502i \\ -1.409606690 - 0.6122192248i \\ -1.500000000 + 4.500000000i \end{bmatrix}.$$

Таким образом, четыре собственных значения обеих матриц совпадают; вместе с тем имеется пара собственных значений, различающихся знаком.

Работа нашего алгоритма начинается с проверки подобия коквадратов, выполняемой Maple-процедурой *IsSimilar*. Эта процедура реализует рациональный процесс приведения матриц к их формам Смита и сличения обеих форм.

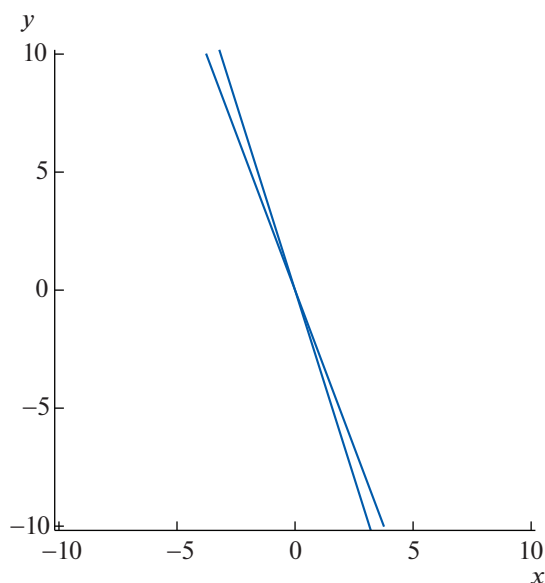
В данном случае коквадраты матриц  $A$  и  $F$  подобны, поэтому алгоритм переходит к построению семейства прямых (4). Значение  $M$  равно 43. Для каждой пары симметричных секторов, определяемых этими прямыми, разность между числом собственных значений матриц  $A$  и  $F$ , попадающих в два сектора, находится с помощью следствия 3. Участвующие в этом следствии индексы инерции вычисляются Maple-функцией *Sturm*, применяемой к характеристическим многочленам эрмитовых матриц из соответствующих тёплицевых разложений.

Поскольку различий в положении собственных значений обеих матриц не выявлено, то алгоритм строит семейство прямых, проходящих во втором и четвертом квадрантах и симметричных с прямыми (4). Это новое семейство показано на фиг. 1.

На этот раз обнаруживается различие в положении собственных значений матриц  $A$  и  $F$ , принадлежащих секторам с граничными линиями  $y = -\frac{165}{52}x$  и  $y = -\frac{117}{44}x$ . Эти сектора показаны на фиг. 2. На основании следствия 2 алгоритм делает вывод о том, что  $A$  и  $F$  не конгруэнтны, и прекращает работу.

**Пример 2.** Пусть  $v$  – строчный вектор

$$v = [3/5 \ 0 \ 4/5 \ 1/2 \ 1/10],$$



Фиг. 2.

а  $A_1$  – циркулянт, для которого  $v$  является первой строкой. Положим  $A = (1 - 4i)A_1$ :

$$A = \begin{bmatrix} 3/5 - \frac{12}{5}i & 0 & 4/5 - \frac{16}{5}i & 1/2 - 2i & 1/10 - 2/5i \\ 1/10 - 2/5i & 3/5 - \frac{12}{5}i & 0 & 4/5 - \frac{16}{5}i & 1/2 - 2i \\ 1/2 - 2i & 1/10 - 2/5i & 3/5 - \frac{12}{5}i & 0 & 4/5 - \frac{16}{5}i \\ 4/5 - \frac{16}{5}i & 1/2 - 2i & 1/10 - 2/5i & 3/5 - \frac{12}{5}i & 0 \\ 0 & 4/5 - \frac{16}{5}i & 1/2 - 2i & 1/10 - 2/5i & 3/5 - \frac{12}{5}i \end{bmatrix}.$$

Пусть  $G$  – косо циркулянт, полученный из  $A$  изменением знаков у элементов  $a_{ij}$  с нечетной суммой индексов  $i + j$ . Матрицы  $A$  и  $G$  диагонально конгруэнтны.

Для этого примера мы использовали оба семейства (4) и (5), а также два симметричных семейства прямых. Значение  $M$  по-прежнему равно 43, тогда как для  $N$  (см. (5)) взято значение 20. Ни одной пары симметричных секторов с различным расположением собственных чисел матриц  $A$  и  $G$  не было обнаружено. Поэтому алгоритм прекращает работу с диагностикой “ $A$  и  $G$  конгруэнтны.”

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Johnson C.R., Furtado S. A generalization of Sylvester’s law of inertia // Linear Algebra Appl. 2001. V. 338. P. 287–290.
2. Икрамов Х.Д. О проверке конгруэнтности инволютивных матриц // Матем. заметки. 2017. Т. 101. № 6. С. 854–859.
3. George A., Ikramov Kh.D. Addendum: Is the polar decomposition finitely computable? // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 1997. V. 18. № 1. P. 264.