

УДК 519.87

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В МОДЕЛИ ВЫБОРА ПОЗИЦИЙ ИНДИВИДАМИ

© 2020 г. А. П. Петров^{1,*}, О. Г. Прончева^{2,**}

¹ 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

² 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ (НИУ), Россия

*e-mail: petrov.alexander.p@yandex.ru

**e-mail: olga.proncheva@gmail.com

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.

Переработанный вариант 07.05.2020 г.

Принята к публикации 09.06.2020 г.

Рассматривается модель выбора позиции индивидами при пропагандистской битве двух партий. Выбор позиции основан на нейробиологической модели принятия решений, имеющей на входе информационные стимулы, поступающие к индивиду от противоборствующих партий, на выходе — его поддержку одной из этих партий. В данном варианте модели учитываются также ассортативность и неполный охват населения средствами массовой информации. Исследованы состояния равновесия: их количество и устойчивость, предложена содержательная трактовка. Библ. 27. Фиг. 3.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, устойчивость, нейробиологическая модель принятия решений, пропагандистская битва, эхо-камеры.

DOI: 10.31857/S0044466920100129

1. ВВЕДЕНИЕ

Реальные социумы редко приходят к консенсусу, хотя его достижение предсказывается классом математических моделей, называемых моделями динамики мнений. Наиболее известная и ранняя работа данного направления, принадлежащая М. де Груту, так и называется: “Достижение консенсуса” [1]. В упрощенном виде, механика таких моделей имеет следующий вид. Позиция индивида по некоторой теме в конкретный момент времени представляется скалярной величиной. Он обсуждает данную тему с другими индивидами, и все они корректируют свои позиции, делая шаги навстречу друг другу. Таким образом, гипотеза о поведении индивида состоит в том, что свою позицию в момент времени $t + 1$ он определяет как взвешенное среднее позиций различных индивидов (в том числе своей) в момент времени t . Величины весов задаются так называемой матрицей влияния, элементы которой имеют смысл влиятельности мнения j -го индивида для i -го. При таком предположении в обществе неминуемо достигается консенсус, т.е. все индивиды с течением времени приходят к одному и тому же мнению (за исключением особого случая, когда матрица влияния распадается на отдельные блоки).

На сегодняшний день существует довольно много публикаций по моделям динамики мнений (см., например, литературу в [2]–[5]). Между тем, реальные общества (и большие группы) редко приходят к консенсусу; более того, часто динамика направлена в сторону поляризации мнений, а не достижения консенсуса. Иногда формируются взаимодействующие сообщества “левых” и “правых”, которые не сближаются друг с другом. Часто возникают группы идеологических меньшинств, называемые эхо-камерами (см. [6]–[8]), способные оставаться на своей позиции (или радикализироваться), несмотря на информационное доминирование “партии большинства”. Не достижение консенсуса, а наоборот, поляризация фиксируется постоянно растущей в объеме политологической литературой (см., например, [9]).

Поэтому для того, чтобы описать социальную реальность, требуется математическая модель, основанная на более сложных положениях о поведении индивидов.

В работе [7] мы предложили такую модель, основанную на нейробиологической схеме Рашевского (см. [10]). Настоящая работа посвящена анализу ее математических свойств.

Данная модель лежит в русле моделирования информационного противоборства, в рамках которого можно выделить несколько подходов. Так, ряд работ посвящены моделям конкурирующих слухов (competing rumors) (см. [11], [12]). Они разрабатываются в рамках традиции моделей слухов (rumor models), исходящей из аналогии между передачей информации от индивида к индивиду и эпидемии заражением, и не учитывающей влияния масс-медиа. Данная традиция восходит к ранним работам [13], [14].

Альтернативный подход, предложенный в работе [15] (см. также [16]), учитывает не только межличностную коммуникацию, но и влияние масс-медиа. Эмпирическое основание для этого дает, в частности, работа [17], в которой изучались этнические чистки в Руанде, и было показано, что чистки были наиболее интенсивными в деревнях, принимающих радиостанцию RTLM (которая пропагандировала насилие), а также соседних, связанных с ними межличностной коммуникацией жителей.

Если говорить в целом об эмпирических работах соответствующей тематики, то большинство из них анализирует содержание публикаций в интернете либо поисковых запросов (см., например, [18]–[20]).

Настоящая работа развивает подход, в котором основное внимание уделяется принятию индивидом решения о том, какую из двух конкурирующих партий поддержать.

Рассматривается процесс пропагандистской битвы (propaganda battle) противоборства двух партий:левой (L) и Правой (R). Каждая из них имеет аффилированные СМИ, распространяющие информационные сообщения в пользу своей партии. Эти сообщения распространяются далее сторонниками, причем в каждый момент времени каждый член населения является сторонником ровно одной из партий. С течением времени индивид может переходить на сторону другой партии неограниченное количество раз.

Математическая модель основана на нейробиологической схеме Рашевского (см. [10]), на выходе которой формируется манифестируемая политическая позиция, т.е. поддержка конкретным индивидом той или иной партии (см. также похожее, но иное применение данного подхода в [21]). Эта манифестируемая позиция индивида i отражает его латентную позицию $\lambda_i(t)$, которая является непрерывной скалярной функцией времени. Именно, манифестируемая позиция в момент времени t равна R , если $\lambda_i(t) \geq 0$, и она равна L , если $\lambda_i(t) < 0$. Чем больше абсолютное значение $\lambda_i(t)$, тем более твердым является сторонник партии.

Далее, латентная позиция индивида имеет вид $\lambda_i(t) = \varphi_i + \psi(t)$, где φ_i – это постоянная в течение битвы установка (attitude) данного индивида, описывающая его предрасположенность к поддержке той или иной партии, $\psi(t)$ – динамическая составляющая, которая одинакова для всех членов населения и меняется в ходе пропагандистской битвы под влиянием информационных факторов, таких как пропагандистское медиавещание сторон и межличностное общение. Очевидно, что рост функции $\psi(t)$ описывает рост численности сторонников партии R и наоборот.

2. БАЗОВАЯ МОДЕЛЬ

В этом разделе описывается базовая модель выбора позиций индивидами (см. [22]).

В соответствии со сказанным выше численность сторонников Правой партии равна

$$R(\psi(t)) = \int_{-\psi(t)}^{\infty} n(\varphi) d\varphi, \quad (2.1)$$

а левой партии

$$L(\psi(t)) = \int_{-\infty}^{-\psi(t)} n(\varphi) d\varphi, \quad (2.2)$$

где $n(\varphi)$ – распределение установок среди индивидов в населении.

Функция $n(\varphi)$ является основной характеристикой социума. Например, нормальное распределение с центром в нуле соответствует консолидированному обществу, в котором большинство членов имеют центристскую политическую позицию. Двугорбая функция $n(\varphi)$ с одним горбом левее нуля, другим – правее, соответствует поляризованному обществу, в котором преобладают

индивиды выраженных левых и правых взглядов, а политический центр является малочисленным (см., например, [9]).

Уравнение для функции $\psi(t)$ имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = C [R(\psi) - L(\psi)] + b_R - b_L - a\psi, \quad (2.3)$$

где b_R (b_L) – интенсивность пропаганды Правой (Левой) партии через СМИ, C – положительная величина, описывающая активность в распространении информации через межличностную коммуникацию. Слагаемое $a\psi$ описывает релаксацию.

Из (2.1)–(2.3) получаем базовую модель (см. [22])

$$\frac{d\psi}{dt} = C \left[2 \int_{-\psi(t)}^{\infty} n(\varphi) - N_0 \right] + b_R - b_L - a\psi, \quad (2.4)$$

где N_0 – размер всего населения.

Начальное условие для уравнения (2.4) имеет вид

$$\int_{-\psi(0)}^{\infty} n(\varphi) d\varphi = R(0).$$

На основании данной базовой модели в [22] была разработана более сложная модель, учитывающая ассортативность и дифференцированное пользование средствами массовой информации, а в [23] – модель информационного противоборства, учитывающая положения теории информационной повестки дня (см. [24], [25]).

3. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Предположим теперь, что население состоит из двух групп, каждая из которых характеризуется собственным распределением $n_1(\varphi)$, $n_2(\varphi)$, и люди больше общаются внутри своих групп, чем с членами другой группы. Пусть N_1 – размер первой группы, а N_2 – размер второй группы. Далее, первая группа имеет распределение, смещенное влево (индивиды предрасположены к поддержке партии L), для определенности положим его нормальным:

$$n_1(\varphi) = \frac{N_1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\varphi + p)^2}{2} \right], \quad (3.1)$$

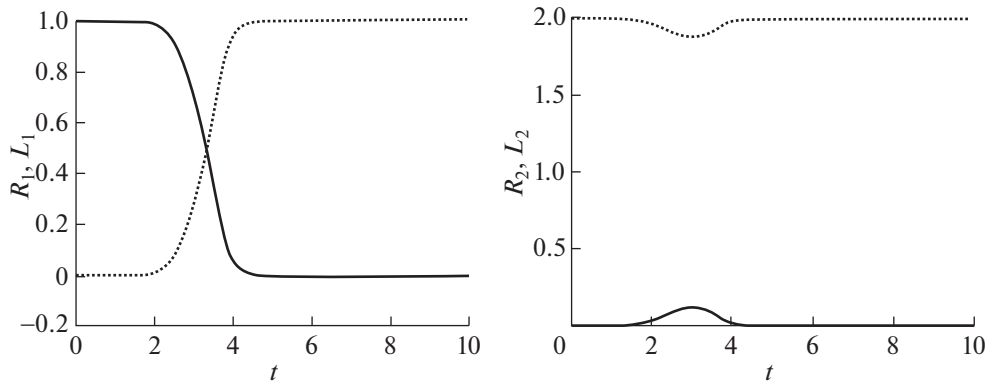
и распределение второй группы смещено вправо (индивиды предрасположены к поддержке партии R):

$$n_2(\varphi) = \frac{N_2}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(\varphi - p)^2}{2} \right]. \quad (3.2)$$

Здесь параметр $p > 0$ описывает поляризацию населения. Для симметрии положим этот параметр одинаковым для каждой из групп.

Характер межгруппового общения математически описывается параметром γ , который представляет ассортативность. По своему смыслу γ – это доля контактов внутри группы в общем количестве контактов каждого индивида. Считается, что индивид внутри своей группы общается как минимум не менее интенсивно, чем с представителями других групп, поэтому $\gamma \geq 1/2$. При этом $\gamma = 1$ означает, что каждый человек общается только с членами своей группы, а $\gamma = 0.5$ относится к ситуации, в которой у людей нет предпочтений в общении. Таким образом, $\gamma \in [1/2; 1]$.

Окончательно модель из [22] имеет вид



Фиг. 1. Начальные условия: $\psi_1 = 15$, $\psi_2 = -7$; параметры: $\gamma = 0.55$, $m = 0.4$, $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, $A = 1.5$, $\alpha = 2$, $C = 1$, $a = 0.8$, $b_R = 1.5$, $b_L = 1$. Сплошные линии – $R(t)$, пунктирные линии – $L(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= A\alpha C \left[\gamma \left(2 \int_{-\psi_1(t)}^{\infty} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) + (1-\gamma) \left(2 \int_{-\psi_2(t)}^{\infty} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + A\alpha(b_R - b_L) - a\psi_1, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= A\alpha C \left[(1-\gamma) \left(2 \int_{-\psi_1(t)}^{\infty} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) + \gamma \left(2 \int_{-\psi_2(t)}^{\infty} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + A\alpha(b_R - b_L) - a\psi_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Итак, описываемая моделью социальная ситуация следующая. Общество состоит из двух групп. Члены каждой из групп коммуницируют в большей мере в своем кругу, но отчасти также (при $\gamma < 1$) с членами другой группы. Все члены общества в равной мере подвержены влиянию медийной пропаганды обеих партий.

Замечание. Дизайн модели позволяет рассматривать ситуации с неполным охватом аудитории средствами массовой информации и с дифференцированным потреблением информации, когда одна группа больше получает пропаганду Левой партии, другая – Правой; в связи с этим см. Заключение.

Из уравнений (3.3) определяются функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, что позволяет найти численности сторонников каждой из партий в каждой из групп по формулам, аналогичным (2.1), (2.2).

Вычислительные эксперименты показывают, что при определенных параметрах и начальных условиях динамика числа сторонников в одной из групп может быть немонотонна (фиг. 1).

4. КОЛИЧЕСТВО ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Настоящий раздел посвящен аналитическому исследованию системы (3.3). При этом мы не рассматриваем “крайние” случаи, т.е. считаем, что $\gamma \in (1/2; 1)$. При различных значениях параметров система может иметь разное количество устойчивых стационарных решений. Некоторые из этих стационарных решений соответствуют победе (т.е. большому числу сторонников при $t \rightarrow \infty$) Правой партии, другие – Левой. Далее нас будет интересовать вопрос о количестве состояний равновесия, их устойчивости и исходе информационной борьбы в зависимости от параметров модели.

Уравнения (3.3) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \gamma \frac{d\psi_1}{dt} - (1-\gamma) \frac{d\psi_2}{dt} &= A\alpha C \left[(2\gamma-1) \left(2 \int_{-\psi_1(t)}^{\infty} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) \right] + \\ &+ A\alpha(2\gamma-1)(b_R - b_L) - a\gamma\psi_1 + a(1-\gamma)\psi_2, \\ (1-\gamma) \frac{d\psi_1}{dt} - \gamma \frac{d\psi_2}{dt} &= A\alpha C \left[(1-2\gamma) \left(2 \int_{-\psi_2(t)}^{\infty} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + \\ &+ A\alpha(1-2\gamma)(b_R - b_L) - a(1-\gamma)\psi_1 + a\gamma\psi_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Поделим каждое из уравнений на $a(1-\gamma)$ (как указано выше, мы не рассматриваем вырожденный случай, когда $\gamma = 1$), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(1-\gamma)} \left[\gamma \frac{d\psi_1}{dt} - (1-\gamma) \frac{d\psi_2}{dt} \right] &= \frac{1}{a(1-\gamma)} \left\{ A\alpha C \left[(2\gamma-1) \left(2 \int_{-\psi_1(t)}^y n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + A\alpha(2\gamma-1)(b_R - b_L) - a\gamma\psi_1 \right\} + \psi_2; \\ \frac{1}{a(1-\gamma)} \left[(1-\gamma) \frac{d\psi_1}{dt} - \gamma \frac{d\psi_2}{dt} \right] &= \frac{1}{a(1-\gamma)} \left\{ A\alpha C \left[(1-2\gamma) \left(2 \int_{-\psi_2(t)}^y n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + A\alpha(1-2\gamma)(b_R - b_L) + a\gamma\psi_2 \right\} - \psi_1. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f(\psi_1) &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \psi_1 - \frac{A\alpha C}{a} \frac{2\gamma-1}{1-\gamma} \left(2 \int_{-\psi_1(t)}^{\infty} n_1(\varphi) d\varphi - N_1 \right) - \frac{A\alpha}{a} \frac{2\gamma-1}{1-\gamma} (b_R - b_L), \\ g(\psi_2) &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \psi_2 - \frac{A\alpha C}{a} \frac{2\gamma-1}{1-\gamma} \left(2 \int_{-\psi_2(t)}^{\infty} n_2(\varphi) d\varphi - N_2 \right) - \frac{A\alpha}{a} \frac{2\gamma-1}{1-\gamma} (b_R - b_L). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Тогда уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(1-\gamma)} \left[\gamma \frac{d\psi_1}{dt} - (1-\gamma) \frac{d\psi_2}{dt} \right] &= \psi_2 - f(\psi_1), \\ \frac{1}{a(1-\gamma)} \left[(1-\gamma) \frac{d\psi_1}{dt} - \gamma \frac{d\psi_2}{dt} \right] &= g(\psi_2) - \psi_1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Отсюда следует, что по разные стороны от кривой $\psi_2 = f(\psi_1)$ разные знаки имеет величина $\gamma \frac{d\psi_1}{dt} - (1-\gamma) \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{d}{dt} [\gamma\psi_1 - (1-\gamma)\psi_2]$, а по разные стороны от кривой $\psi_1 = g(\psi_2)$ разные знаки имеет величина $(1-\gamma) \frac{d\psi_1}{dt} - \gamma \frac{d\psi_2}{dt}$.

Это соображение позволяет строить фазовые портреты при различных значениях параметров. При выполнении условий $\psi_1 = g(\psi_2)$, $\psi_2 = f(\psi_1)$, имеем

$$\gamma \frac{d\psi_1}{dt} - (1-\gamma) \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \quad (1-\gamma) \frac{d\psi_1}{dt} - \gamma \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \tag{4.5}$$

что означает при условии $\gamma > 1/2$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \tag{4.6}$$

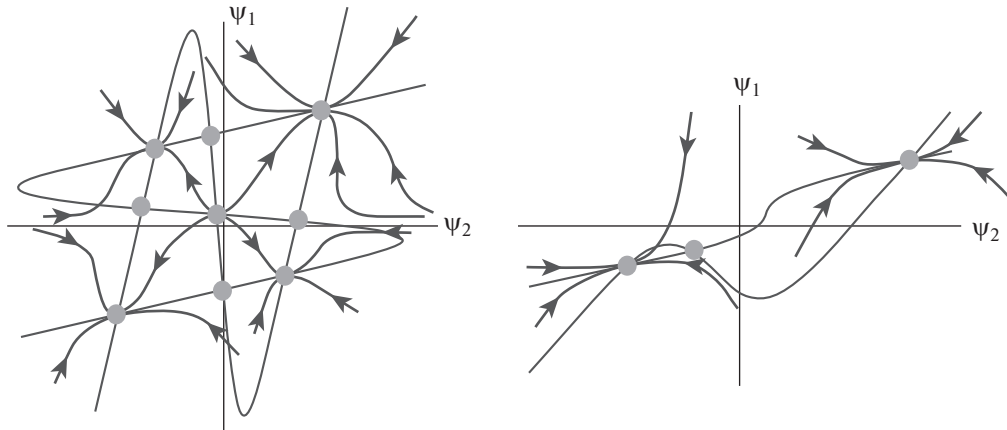
т.е. точка пересечения $\psi_2 = f(\psi_1)$ и $\psi_1 = g(\psi_2)$ представляет положение равновесия системы (3.1).

Ввиду нормальности распределений $n(\varphi)$ кривая $\psi_2 = f(\psi_1)$ имеет N-образную форму, а кривая $\psi_1 = g(\psi_2)$ – S-образную (см. фиг. 2). Следовательно, они могут иметь от 1 до 9 пересечений в зависимости от параметров.

При построении фазового портрета будем использовать следующий алгоритм.

1. Проводим прямые из семейств $\gamma\psi_1 - (1-\gamma)\psi_2 = C$ и $(1-\gamma)\psi_1 - \gamma\psi_2 = C$, где C – некий параметр.

2. Фиксируем какую-либо точку фазовой плоскости. Она является точкой пересечения некоторых двух прямых из различных семейств. Если эта точка лежит выше (ниже) кривой $\psi_1 = g(\psi_2)$, то



Фиг. 2. Возможные случаи фазовых портретов системы (3.3).

при $t \rightarrow +\infty$ она перейдет в точку на прямой из семейства $(1 - \gamma)\psi_1 - \gamma\psi_2 = C$, которая лежит ниже (выше) исходной прямой из этого семейства. Если точка лежит правее (левее) кривой $\psi_2 = f(\psi_1)$, то при $t \rightarrow +\infty$ она перейдет в точку на прямой из семейства $\gamma\psi_1 - (1 - \gamma)\psi_2 = C$, которая находится левее (правее) исходной прямой из того же семейства.

3. Повторяем первые два пункта для других точек фазовой плоскости.

Рассмотрим наиболее сложный случай с 9 положениями равновесия. Этот случай возможен, когда γ близко к 1 (параметр γ отвечает за “высоту” пиков), т.е. люди предпочитают общение внутри своей группы. Используя кривые (4.3), построим фазовый портрет (фиг. 2). Здесь 4 устойчивых узла, 1 неустойчивый узел и 4 седла.

Из геометрических соображений (см. описанный выше алгоритм) следует, что (здесь и далее значения функций берутся в точке равновесия):

- если $(f(\psi_2))' < (g^{-1}(\psi_1))'$, положение равновесия – неустойчивый узел;
- если $(f(\psi_2))' > (g^{-1}(\psi_1))'$ и $(f(\psi_2))' < 0$, положение равновесия – устойчивый узел;
- в любом другом случае положение равновесия – седло (мы не рассматриваем случаи, когда $f(\psi_1)$ и $g(\psi_2)$ касаются).

Дадим аналитическое обоснование этим соображениям.

Теорема. Если кривые $f(\psi_1)$ и $g(\psi_2)$ пересекаются (а не касаются), при этом в точке их пересечения

- $(f(\psi_2))' < (g^{-1}(\psi_1))'$, то положение равновесия – неустойчивый узел;
- $(f(\psi_2))' > (g^{-1}(\psi_1))'$ и $(f(\psi_2))' < 0$, то положение равновесия – устойчивый узел.

В любом другом случае положение равновесия – седло.

Доказательство. Запишем систему (3.3) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\psi_1}{dt} &= \psi_1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} g(\psi_1) + \frac{\gamma}{1-\gamma} \psi_2 - f(\psi_2), \\ \frac{1}{a} \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 - 1 \right] \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\gamma}{1-\gamma} \psi_1 - g(\psi_1) + \psi_2 - \frac{\gamma}{1-\gamma} f(\psi_2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Матрица Якоби имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} g'(\psi_1) & \frac{\gamma}{1-\gamma} - f'(\psi_2) \\ \frac{\gamma}{1-\gamma} - g'(\psi_1) & 1 - \frac{\gamma}{1-\gamma} f'(\psi_2) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Исследуем теперь собственные значения матрицы, для чего решим следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda \left(-2 + \frac{\gamma}{1-\gamma} g' + \frac{\gamma}{1-\gamma} f' \right) + \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 f' g' - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 + 1 - f' g' = 0. \quad (4.9)$$

Чтобы положение равновесия было седлом, собственные значения должны иметь разные знаки. По теореме Виета, если решения квадратного уравнения принимают значения разных знаков, то свободный член отрицателен, т.е.

$$(f' g' - 1) \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 - 1 \right] < 0. \quad (4.10)$$

Так как $\left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^2 - 1 \right] > 0$, то знак левой части (4.10) зависит от знака выражения $f' g' - 1$. Таким образом, положение равновесия – седло, если $f' g' < 1$. Если производные принимают значения разных знаков, то это неравенство выполняется автоматически, если же они имеют один и тот же знак, то мы можем записать это неравенство в виде следующего условия: $|f'| < \frac{1}{|g'|} = |(g^{-1})|$.

Итак, геометрически положение равновесия – седло, если угловые коэффициенты имеют различные знаки, или модуль наклона функции $f(\psi_2)$ меньше, чем модуль наклона $g^{-1}(\psi_1)$. В противном случае положение равновесия – узел (ввиду положительности детерминанта собственные значения вещественны). Все это также подтверждается графиком.

Если собственные значения имеют один и тот же знак и оба отрицательны, то положение равновесия является устойчивым узлом.

Для того чтобы оба собственных значения были отрицательны, необходимо, чтобы в положении равновесия выполнялось неравенство $-2 + \frac{\gamma}{1-\gamma} g' + \frac{\gamma}{1-\gamma} f' > 0$, т.е. $f' + g' > \frac{2(1-\gamma)}{\gamma}$. Покажем, что если производные положительные и графики пересекаются в соответствующем порядке ($|f'| > |(g^{-1})|$), то положение равновесия – устойчивый узел. Тогда теорема будет доказана. Данные аналитические закономерности соответствуют графикам на фиг. 2.

Лемма. Пусть $1/2 < \gamma < 1$. Пусть также в некоторой точке (ψ_1, ψ_2) имеют место соотношения

$$0 < f'(\psi_2) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}, \quad (4.11)$$

$$0 < g'(\psi_1) \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}, \quad (4.12)$$

$$f'(\psi_2) g'(\psi_1) > 1. \quad (4.13)$$

Тогда

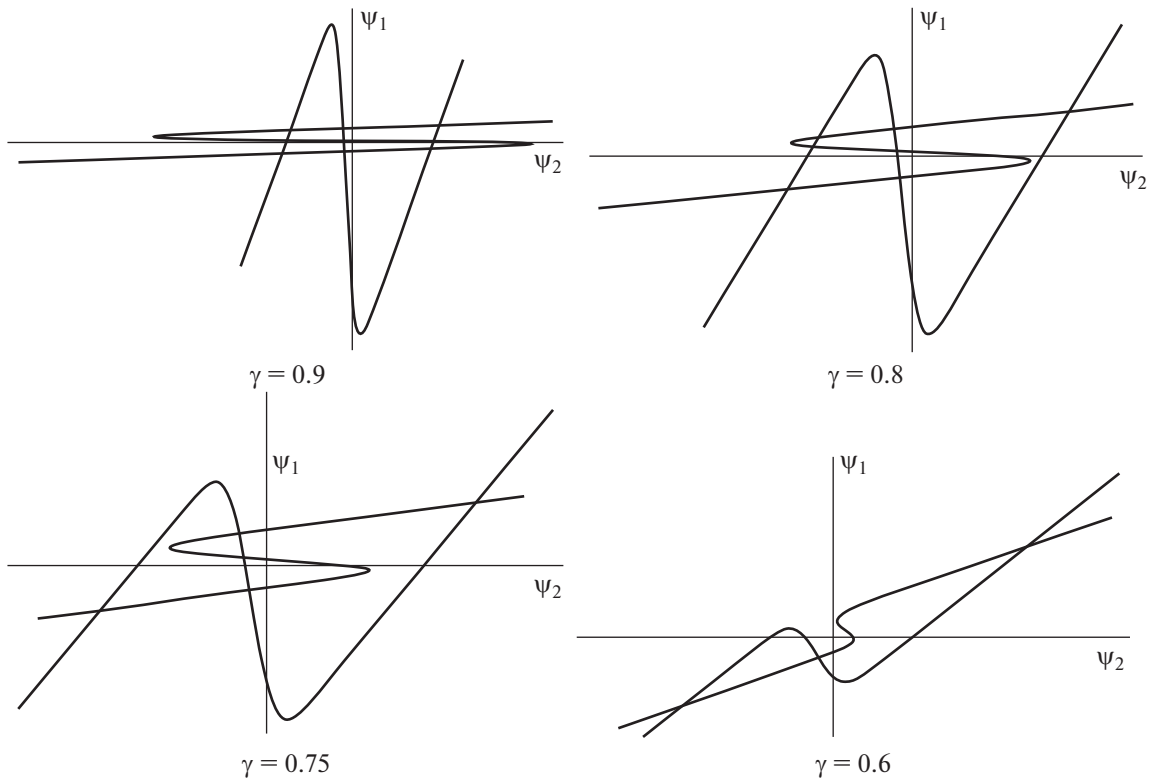
$$f'(\psi_2) + g'(\psi_1) > \frac{2(1-\gamma)}{\gamma}. \quad (4.14)$$

Доказательство. Обозначим

$$\delta_1 = \frac{\gamma}{1-\gamma} - g'(\psi_1) \geq 0, \quad \delta_2 = \frac{\gamma}{1-\gamma} - f'(\psi_2) \geq 0. \quad (4.15)$$

Тогда неравенство (4.13) примет вид

$$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \delta_1 \right) \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \delta_2 \right) > 1. \quad (4.16)$$



Фиг. 3. Возможный сценарий при уменьшении параметра γ . Остальные параметры: $p = 0.8, N_1 = 1, N_2 = 2, A = 3, \alpha = 1.5, C = 1, a = 0.8, b_R = 1.2, b_L = 1$.

Так как $\frac{\gamma}{1-\gamma} > \delta_1, \frac{\gamma}{1-\gamma} > \delta_2$, то

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}(\delta_1 + \delta_2) > 2\delta_1\delta_2. \tag{4.17}$$

В то же время из (4.16) следует, что

$$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 - 1 + \delta_1\delta_2 > \frac{\gamma}{1-\gamma}(\delta_1 + \delta_2). \tag{4.18}$$

Из (4.17), (4.18) имеем

$$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 - 1 > \delta_1\delta_2, \tag{4.19}$$

т.е.

$$1 - \delta_1\delta_2 > 2 - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2. \tag{4.20}$$

Из неравенства (4.16) следует неравенство

$$\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2 - \frac{\gamma}{1-\gamma}(\delta_1 + \delta_2) > 2 - \left(\frac{\gamma}{1-\gamma}\right)^2, \tag{4.21}$$

т.е.

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} \left[\left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \delta_1\right) + \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} - \delta_2\right) \right] > 2. \tag{4.22}$$

Отсюда имеем

$$\frac{\gamma}{1-\gamma}(f'(\psi_2) + g'(\psi_1)) > 2, \quad (4.23)$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, приведенным перед теоремой геометрическим наблюдениям дано аналитическое обоснование.

Как указывалось выше, наличие девяти положений равновесия способствует большому значению параметра γ . Четыре из них на фиг. 2 являются асимптотически устойчивыми. Например, положение равновесия в первой четверти ($\psi_1 > 0, \psi_2 > 0$) соответствует победе Правой партии в обеих группах и, следовательно, в обществе в целом. Положение равновесия во второй четверти ($\psi_1 < 0, \psi_2 > 0$) соответствует победелевой партии в первой группе, Правой партии – во второй и т.д.

При уменьшении параметра γ уменьшается количество положений равновесия, в том числе устойчивых положений равновесия. На фиг. 3 приведен один из возможных сценариев. В данном случае, при $\gamma = 0.8$, фазовый портрет имеет меньше (по сравнению с $\gamma = 0.9$) на одну асимптотически устойчивую точку равновесия и на одну неустойчивую. Другими словами, точка равновесия в четвертой четверти вырождается (т.е. из списка возможных исходов пропагандистской битвы исчезает исход, при котором Правая партия побеждает во второй группе, а Левая партия – в первой). При дальнейшем уменьшении параметра γ вырождаются другие положения равновесия, и при γ , близком к $1/2$, в данном примере остаются только два устойчивых положения равновесия, одно из которых соответствует победе партии R в обеих группах, а другое – победе партии L в обеих группах.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вернемся к проблеме, поставленной в начале настоящей статьи. Почему реальные общества редко приходят к консенсусу, хотя в соответствии с моделями динамики мнений он является естественным исходом общественной дискуссии?

Одна из причин, имеющих место в большинстве реальных ситуаций, состоит в так называемой селективной экспозиции (selective exposure) (см. [26], [27]), игнорируемой моделями динамики мнений: сторонники одной социальной группы читают левые газеты, сторонники другой группы – правые газеты, что позволяет каждой из групп удержаться от “сползания” к политическому центру. В терминах модели настоящей работы это означало бы, что параметры b_R, b_L имеют различные значения в двух группах. Другими словами, первая группа не только имеет левые взгляды (в соответствии с (3.1)), но также склонна читать левую прессу, т.е. для этой группы $b_R - b_L < 0$. Аналогично для второй группы $b_R - b_L > 0$. Однако селективная экспозиция не является необходимым условием отсутствия консенсуса.

Модель выбора позиций индивидами показывает, что даже при недифференцированном получении информации из СМИ в обществе действуют механизмы, препятствующие формированию консенсуса.

Прежде всего данная модель учитывает, что у каждого индивида имеется установка, т.е. predisposition к поддержке той или иной партии, сформированная до рассматриваемого противоборства и отражающая его социальный статус, экономическое положение и т.д.

Другое важное отличие от моделей динамики мнений состоит в характере коммуникации между индивидами. Поясним это на следующем примере. Предположим, что индивид A имеет латентную позицию $\psi_A = 2$. Какое влияние на него оказывает индивид B , имеющий позицию $\psi_B = 1$? Логика моделей динамики мнений предполагает, что он убеждает индивида A сдвинуться налево, так как сам находится левее него. В противоположность этому, модель данной работы исходит из того, что оба они – сторонники Правой партии, поэтому индивид B укрепляет индивида A в его верности этой партии. При определенных параметрах это означает, что в результате коммуникации они оба могут сдвинуть свои позиции направо.

Таким образом, индивиды, например, правых взглядов, могут удерживать свою политическую позицию, коммуницируя между собой, даже если они находятся в меньшинстве, а их оппоненты доминируют в СМИ. Именно такая социальная структура называется эхо-камерой. Тем самым, в обществе поддерживается одновременное существование различных политических мнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *DeGroot M.H.* Reaching a Consensus // *J. Am. Statistic. Associat.* 1974. V. 69 (345). P. 1181–1121.
2. *Friedkin N.E., Proskurnikov A.V., Tempo R., Parsegov S.E.* Network science on belief system dynamics under logic constraints // *Science.* 2016. V. 354 (6310). P. 321–326.
3. *Kozitsin I.V., Belolipetskii A.A.* Opinion convergence in the Krasnoshchekov model // *J. Math. Sociology.* 2018. P. 1–18.
4. *Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A., Novikov D.A.* Social Networks: Models of information influence, control and confrontation // Cham, Switzerland: Springer Intern. Publ. 2019. P. 158.
5. *Chkhartishvili A.G., Gubanov D.A.* Influence Levels of Users and Meta-Users of a Social Network // *Automation and Remote Control.* 2018. V. 79 (3). P. 545–553.
6. *Barberá P., Jost J.T., Nagler J., Tucker J.A., Bonneau R.* Tweeting from left to right: Is online political communication more than an echo chamber? // *Psychologic. Sci.* 2015. V. 26 (10). P. 1531–1542.
7. *Petrov A., Proncheva O.* Modeling propaganda battle: Decision-making, homophily, and echo chambers // *Artificial Intelligence and Natural Language.* 2018. V. 930 of Communications in Computer and Information Science. Springer Cham. P. 197–209.
8. *Chkhartishvili A., Kozitsin I.* Binary Separation Index for Echo Chamber Effect Measuring // *Proceed. 11th Intern. Conf. “Management of Large-Scale System Development” (MLSD).* Moscow: IEEE. 2018. P. 1–4.
9. *Fiorina M.P., Abrams S.J.* Political polarization in the American public // *Annu. Rev. Polit. Sci.* 2008. V. 11. P. 563–588.
10. *Rashevsky N.* Mathematical Biophysics: Physico-mathematical Foundations of Biology. Univ. of Chicago: Chicago Press. 1938.
11. *Osei G.K., Thompson J.W.* The supersession of one rumour by another // *J. of Applied Probability.* 1977. V. 14 (1). P. 127–134.
12. *Escalante R., Odehnal M.* A deterministic mathematical model for the spread of two rumors // *ArXiv preprint arXiv:1709.01726.* 2017.
13. *Daley D.J., Kendall D.G.* Stochastic rumors // *J. Inst. Math. Appl.* 1964. V. 1. P. 42–55.
14. *Maki D.P., Thompson M.* Mathematical Models and Applications. 1973. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
15. *Mikhailov A.P., Marevtseva N.A.* Models of information warfare // *Math. Modeling.* 2011. V. 23 (10). P. 19–32.
16. *Petrov A.P., Proncheva O.G.* Modeling position selection by individuals during information warfare with a two-component agenda // *Math. Models and Computer Simulat.* 2020. No. 2. В печати.
17. *Yanagizawa-Drott D.* Propaganda and conflict: evidence from the rwandan genocide // *Q. J. Econ.* 2014. V. 129 (4). P. 1947–1994.
18. *Akhtyamova L., Ignatov A., Cardiff J.* A Large-scale CNN ensemble for medication safety analysis // *Intern. Conf. Applications of Natural Language to Information Systems.* 2017. Springer, Cham. P. 247–253.
19. *Boldyreva A., Sobolevskiy O., Alexandrov M., Danilova V.* Creating collections of descriptors of events and processes based on Internet queries // *Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICA-2016).* 2016. Springer Cham, LNAI. V. 10061 (chapter 26). P. 303–314.
20. *Boldyreva A., Alexandrov M., Koshulko O., Sobolevskiy O.* Queries to Internet as a tool for analysis of the regional police work and forecast of the crimes in regions // *Proc. of 14-th Mexican Intern. Conf. on Artif. Intell. (MICA-2016).* 2016. Springer Cham, LNAI. V. 10061 (chapter 25). P. 290–302.
21. *Mikhailov A., Petrov A., Pronchev G., Proncheva O.* Modeling a decrease in public attention to a past one-time political event // *Dokl. Math.* 2018. V. 97 (3). P. 247–249.
22. *Petrov A., Proncheva O.* Modeling propaganda battle: Decision-making, homophily, and echo chambers // *Artificial Intelligence and Natural Language. AINL 2018.* 2018. V. 930 of Communications in Computer and Information Science. Springer Cham. P. 197–209.
23. *Petrov A., Proncheva O.* Propaganda battle with two-component agenda // *CEUR Workshop Proceed.* 2019. V. 2478. P. 28–38.
24. *McCombs M.E., Shaw D.L.* The agenda-setting function of mass media // *Public opinion quarterly.* 1972. V. 36 (2). P. 176–187.
25. *McCombs M., Stroud N.J.* Psychology of agenda-setting effects: Mapping the paths of information processing // *Rev. Communicat. Res.* 2014. V. 2 (1). P. 68–93.
26. *Garrett R.K.* Echo chambers online?: Politically motivated selective exposure among Internet news users // *J. Computer-Mediated Communicat.* 2009. V. 14 (2). P. 265–285.
27. *Stroud N.J.* Polarization and partisan selective exposure // *J. Communicat.* 2010. V. 60 (3). P. 556–576.