ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 10, с. 1757–1763

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.95

СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КОШИ–РИМАНА С ОСОБЕННОСТЬЮ В МЛАДШЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ

А. Б. Расулов[1,*], Ю. С. Федоров[1,]**

[1] *111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, ФГБУ МЭИ, Россия*

**e-mail: rasulov_abdu@rambler.ru*

***e-mail: FedorovYS@mpei.ru*

Поступила в редакцию 03.02.2020 г.
Переработанный вариант 29.05.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

В работе алгоритм метода регуляризации С.А. Ломова обобщается на сингулярно возмущенное уравнение Коши–Римана с особенностью в младшем коэффициенте. Библ. 9.

Ключевые слова: система Коши–Римана, задача Дирихле, метод регуляризации Ломова, оператор Векуа.

DOI: 10.31857/S0044466920100130

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди методов теории сингулярных возмущений методы пограничных функций Васильевой–Бутузова [1], метод усреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского и метод регуляризации Ломова [2], [3] занимают особое место. Эти методы показали свою эффективность в исследовании различных линейных и нелинейных задач.

Например, в работе [4] методом пограничных функций изучаются контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах, а в работе [5] рассматривается задача Коши для сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения Фредгольма и т.д.

В работе [6] метод регуляризации С.А. Ломова обобщается на интегральные и интегродифференциальные уравнения с несколькими быстро изменяющимися и медленно изменяющимися ядрами, на уравнения с вырождающимися ядрами высокого порядка, на сингулярно возмущенные уравнения в частных производных с одномерным и двумерным интегральными операторами, а также на дифференциальные системы с пересечением корней характеристического уравнения предельного оператора.

Насколько нам известно, разработка этого метода для сингулярно возмущенных систем уравнений в частных производных первого порядка типа сингулярно возмущенных уравнений Коши–Римана ранее не проводилась, хотя такие уравнения имеют многочисленные приложения: например, в теории упругости, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точками уплощения и в теории двумерного стационарного дозвукового течения идеального газа [8].

В настоящей работе алгоритм метода регуляризации С.А. Ломова [2] обобщается на сингулярно возмущенные уравнения в частных производных первого порядка с особенностью в младшем коэффициенте, и на основе структуры регуляризованного асимптотического решения исследуется *задача инициализации* [7] (т.е. задача выбора класса исходных данных рассматриваемого уравнения, при которых его решение стремится (при $\varepsilon \to +0$) к некоторой предельной функции равномерно на всем промежутке времени, включая и зону пограничного слоя).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть область D содержит точку $z = 0$ и ограничена простым гладким контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_\delta = D \cap \{|z| > \delta\}$ с малым $\delta > 0$.

В области D рассмотрим следующую сингулярно возмущенную систему уравнений Коши–Римана с сингулярными младшими коэффициентами:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\left[x\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+y\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]-2(a_1u_1-a_2u_2)=2f_1,\\
&\varepsilon\left[y\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)+x\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right]-2(a_2u_1+2a_1u_2)=2f_2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0\ll 1$, a_j, f_j – заданные функции, $j=1,2$.

Пусть для краткости $\rho(z)=\overline{z}$. Умножая второе уравнение (1) на мнимую единицу $i=\sqrt{-1}$ и объединяя его с первым уравнением, а также используя $2\partial_{\overline{z}}=\partial_x+i\partial_y$ – оператор Коши–Римана, с учетом $u=u_1+iu_2$, $a=a_1+ia_2$, $f=f_1+if_2$ записываем систему уравнений (1) в удобной форме для исследования, т.е. в комплексном виде:

$$\varepsilon\rho u_{\overline{z}}-au=f, \tag{2}$$

где $a\in C(\overline{D})$. Решением этого уравнения является функция $u\in C(\overline{D})\cap C^\infty(D_\delta)$, для любого $\delta>0$. Далее, для упрощения вычислений предположим, что $\Gamma:|z|=R$. Для уравнения (2) в области D рассмотрим следующую задачу типа Дирихле.

Требуется найти решение уравнения (2) из класса $u\in C(\overline{D})\cap C^\infty(D_\delta)$, удовлетворяющее на контуре Γ граничному условию

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z}{R}\right)^{\frac{2a(0)}{\varepsilon}}u\bigg|_\Gamma=g(t), \tag{3}$$

где $g(t)\in C(\Gamma)$.

В настоящей работе метод регуляризации С.А. Ломова обобщается на сингулярно возмущенное уравнение Коши–Римана с сингулярным младшим коэффициентом. Доказывается, что ряд, полученный как решение задачи (3), сходится в обычном смысле абсолютно и равномерно по переменному z во всей области $\overline{D}$.

3. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Модельным называем уравнение (2) в случае, когда $a(z)=a(0)$, $\forall z\in\overline{D}$:

$$\varepsilon\rho u_{\overline{z}}-a(0)u=f. \tag{4}$$

В исследовании обобщенных систем Коши–Римана существенную роль играет интегральный оператор Векуа–Помпейу (см. [8, с. 31]):

$$(Tf)(z)=-\frac{1}{\pi}\int_D\frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta-z}, \tag{5}$$

где здесь и ниже $d_2\zeta$ означает элемент площади. Если $f\in L^p(D)$, $p>2$, то функция $U=Tf$ принадлежит соболевскому пространству $W^{1,p}(D)$ и удовлетворяет уравнению $U_{\overline{z}}=f$, причем оператор T ограничен, $L^p(D)\to W^{1,p}(D)$. Напомним, что имеет место следующее вложение (см. [8, с. 39]) данного пространства в класс Гёльдера:

$$W^{1,p}(D)\subseteq C^\mu(\overline{D}),\quad \mu=1-\frac{2}{p},$$

в частности, оператор T компактен в пространствах $L^p(D)$ и $C(\overline{D})$. Всюду в дальнейшем предполагается, что $p>2$.

Если функция f принадлежит $L^p(D_\delta)$ для любого $\delta>0$, но, вообще говоря, не суммируема во всей области D, то под правой частью (5) условимся понимать сингулярный интеграл

$$(Tf)(z) = -\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{D_\delta}\frac{f(\zeta)d_2\zeta}{\zeta - z}, \quad z \neq 0,$$

конечно, в предположении, что указанный предел существует.

Вначале построим формальное решение однородного уравнения (4).

Вводя обозначение

$$\Omega(z) = -\frac{a(0)}{\pi}\int\limits_D \frac{d_2\zeta}{\overline{\zeta}(\zeta - z)}, \quad z \neq 0,$$

запишем формальное решение уравнения (4), согласно оператору Векуа–Помпейу, в виде

$$u(z) = \phi(z)\exp\left\{\frac{\Omega(z)}{\varepsilon}\right\}.$$

Для вычисления значения Ω воспользуемся леммой из [9]:

Лемма. *Функция $\Omega(z)$ существует и представима в виде*

$$\Omega(z) = 2a(0)\ln|z| - h(z), \quad z \neq 0, \tag{6}$$

где $h(z) \in H(\overline{D})$ и определяется равенством

$$h(z) = \frac{a(0)}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\ln|\zeta| d\zeta}{\zeta - z}.$$

Заметим, что в предположении $|R^{-1}z|^{-\frac{2a(0)}{\varepsilon}-1} f \in L^p(D)$ формальное общее решение уравнения (2) дается формулой

$$u = \left|\frac{z}{R}\right|^{\frac{2a(0)}{\varepsilon}}\left[\phi + \frac{R}{\varepsilon}T\left(\left|\frac{\zeta}{R}\right|^{-\left(\frac{2a(0)}{\varepsilon}+1\right)} f\right)\right],$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$ и ϕ – произвольная аналитическая в области $D\backslash\{0\}$ функция.

Подставляя значение $\Omega(z)$ из формулы (6) в формальное решение для $u(z)$, получим следующую формулу

$$u(z) = \phi(z)|z|^{\frac{2a(0)}{\varepsilon}} e^{\frac{h(z)}{\varepsilon}}. \tag{7}$$

Для наглядности функции $\Omega(z)$ предположим, что контур Γ области D является окружностью, т.е. $\Gamma : |z| = R$. Тогда функция $h(z) = 2a(0)\ln R$.

В этом случае формула (7) выглядит так:

$$u(z) = \phi(z)\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}2a(0)\ln(|z|R^{-1})\right\}.$$

Согласно методу С.А. Ломова вводим новую дополнительную переменную

$$\tau(\varepsilon, z) = \frac{1}{\varepsilon}2a(0)\ln\frac{|z|}{R},$$

производная которой равна

$$\frac{\partial\tau}{\partial\overline{z}} = \frac{a(0)}{\varepsilon\overline{z}} = \frac{a(0)}{\varepsilon\overline{z}}.$$

Вводим новую неизвестную функцию

$$\tilde{u} = u(z, \tau, \varepsilon),$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial\overline{z}} + \frac{\partial u}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\overline{z}} = \frac{\partial u}{\partial\overline{z}} + \frac{a(0)}{\varepsilon\overline{z}}\frac{\partial u}{\partial\tau}.$$

В результате вместо исходной задачи (4), (3) рассмотрим следующую расширенную задачу

$$\varepsilon\bar{z}\tilde{u}_{\bar{z}} + a(0)(\tilde{u}_\tau - \tilde{u}) = f. \tag{8}$$

Для уравнения (8) в области D рассмотрим следующую задачу типа Дирихле.

Требуется найти решение уравнения (2) из класса $u \in C(\bar{D}) \cap C^\infty(D_\delta)$, удовлетворяющее на контуре Γ граничному условию

$$\left.\operatorname{Re}\left(\frac{z}{R}\right)^{\frac{2a(0)}{\varepsilon}} u\right|_\Gamma = g(t),$$

где $g(t) \in C(\Gamma)$.

Согласно теореме Пуанкаре [6], решение расширенной задачи будем искать в виде

$$\tilde{u}(z,\tau,\varepsilon) = \sum_0^\infty u_k(z,\tau)\varepsilon^k. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\bar{z}\left(\varepsilon u_{0\bar{z}} + \varepsilon^2 u_{1\bar{z}} + \ldots + \varepsilon^{k+1}u_{k\bar{z}} + \ldots\right) + a(0)\left((u_{0\tau} - u_0) + \varepsilon(u_{1\tau} - u_1) + \ldots + \varepsilon^k(u_{k\tau} - u_k) + \ldots\right) = f.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, получим следующие итерационные задачи:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} u_{0\tau} - u_0 = \dfrac{f}{a(0)}, \\ \left.\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{R}\right)^{-\frac{2a(0)}{\varepsilon}} u_0\right|_\Gamma = g(t), \\ u_0(z_0) = c_0, \quad z_0 \in D_\delta, \end{cases} \tag{10_0}$$

$$\varepsilon : \begin{cases} u_{1\tau} - u_1 = \dfrac{\bar{z}}{a(0)}\dfrac{\partial u_0}{\partial \bar{z}}, \\ \left.\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{R}\right)^{\frac{-2a(0)}{\varepsilon}} u_1\right|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{10_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon^k : \begin{cases} u_{k\tau} - u_k = \dfrac{\bar{z}}{a(0)}\dfrac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}}, \\ \left.\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{R}\right)^{\frac{-2a(0)}{\varepsilon}} u_k\right|_\Gamma = 0, \end{cases} \tag{10_k}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

4. РЕШЕНИЯ ИТЕРАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим первую итерационную задачу (10_0).

Если ε и $a(0)$ – вещественные числа, то переменную $\tau = \tau(\varepsilon, z)$ можно представить как произведение $2\varepsilon^{-1}a(0)$ на вещественную переменную $\ln\dfrac{|z|}{R}$.

Поэтому уравнение

$$u_{0\tau} - u_0 = \frac{f}{a(0)}$$

можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого дается формулой

$$u_0(\tau, z) = e^{\tau}\left[\phi_0(z) + \frac{1}{a(0)}\int_0^{\tau} e^{-t} f(t, z)dt\right], \tag{11}$$

где $\phi_0(z)$ – произвольная аналитическая функция комплексного переменного z.

Теперь, используя второе условие задачи (10_0) для определения значения произвольной аналитической функции $\phi_k(z)$, приходим к следующей задаче

$$\operatorname{Re}\phi_0 = \widetilde{g(t)}, \quad t \in \Gamma,$$

где $\widetilde{g_0(t)} = g(t) - \operatorname{Re}\frac{1}{a(0)}\int_0^{\tau} e^{-t} f(t, z)dt$.

Так как

$$\tau(\varepsilon, z)\big|_{\Gamma} = \frac{1}{\varepsilon}2a(0)\left(\ln\frac{|z|}{R}\right)\bigg|_{\Gamma} = 0,$$

следовательно, $\operatorname{Re}\frac{1}{a(0)}\int_0^{\tau} e^{-t} f(t, z)dt\bigg|_{\Gamma} = 0$, тогда $\widetilde{g(t)} = g(t)$ и

$$\phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} + ic_0, \quad z \in D.$$

Подставляя значение $\phi_0(z)$ в формулу (8), получим решение первой итерационной задачи

$$u_0(\tau, z) = e^{\tau}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\frac{d\zeta}{\zeta} + ic_0 + \frac{1}{a(0)}\int_0^{\tau} e^{-t} f(t, z)dt\right]. \tag{12}$$

Аналогичным образом поступаем для общего случая.

Рассмотрим первое уравнение (10_k):

$$u_{k\tau} - u_k = \frac{\bar{z}}{a(0)}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}},$$

решение которого дается формулой

$$u_k(\tau, z) = e^{\tau}\left[\phi_k(z) - \frac{1}{a(0)z}\int_0^{\tau} e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}}dt\right].$$

Используя второе условие задачи (10_k) для определения значения произвольной аналитической функции $\phi_k(z)$, приходим к следующей задаче

$$\operatorname{Re}\phi_k = \widetilde{g_k(t)}, \quad t \in \Gamma,$$

где $\widetilde{g_k(t)} = -\operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{a(0)}\int_0^{\tau} e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}}dt\bigg|_{\Gamma} = 0$.

Следовательно,

$$\phi_k(z) = 0, \quad k \ge 1, \quad z \in D.$$

В результате для определения коэффициентов $u_k(\tau, z)$ получим следующую формулу

$$u_k(\tau, z) = e^{\tau}\left[-\frac{\bar{z}}{a(0)}\int_0^{\tau} e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial \bar{z}}dt\right], \quad k \ge 1. \tag{13}$$

Подставляя коэффициенты $u_0(\tau, z)$, $u_k(\tau, z)$, $k \ge 1$ в ряд (9) и учитывая значение $\tau = \frac{a(0)}{\varepsilon}(\ln r^2 - \ln R^2)$, получаем единственное формальное решение задачи в виде

$$\tilde{u}(z,\tau,\varepsilon)=\sum_{0}^{\infty}u_k(z,\tau)\varepsilon^k=e^{\frac{a(0)}{\varepsilon}(\ln r^2-\ln R^2)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}+ic_0+\frac{\bar{z}}{a(0)}\int_{0}^{\frac{a(0)}{\varepsilon}(\ln r^2-\ln R^2)}e^{-t}f(t,z)dt\right]+$$
$$+e^{\frac{a(0)}{\varepsilon}(\ln r^2-\ln R^2)}\frac{1}{a(0)z}\sum_{1}^{\infty}\left\{\int_{0}^{\frac{a(0)}{\varepsilon}(\ln r^2-\ln R^2)}e^{-t}\frac{\partial u_{k-1}}{\partial\bar{z}}dt\right\}\varepsilon^k, \tag{14}$$

где коэффициенты $u_k(\tau,z)$ определяются согласно рекуррентной формуле (13).

5. ОБОСНОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ СХОДИМОСТИ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ К ТОЧНОМУ

В рамках решения задачи инициализации относительно коэффициента уравнения (1) и правой части $f(t,z)$ требуем выполнения следующих условий:

$$a>0,\quad f(t,z)\equiv 0,\quad \forall z\in\bar{D}.$$

При выполнении первого из этих условий $\tau=-\infty$ при $\varepsilon\to 0$. При условии $c_0=0$, получим формулу

$$u_0(\tau,z)=e^{\tau}\phi_0(z),\quad \phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Аналогично, для определения коэффициента первого порядка, с учетом

$$\frac{\partial u_0}{\partial\bar{z}}=\frac{a(0)}{\varepsilon\bar{z}}\phi_0(z)e^{\tau},$$

получим формулу

$$u_1(\tau,z)=\frac{1}{\varepsilon}\phi_0(z)e^{\tau}\tau.$$

С учетом

$$\frac{\partial u_1}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{a(0)}{\bar{z}}\phi_0(z)e^{\tau}(\tau+1)$$

для определения коэффициента второго порядка, получим формулу

$$u_2(\tau,z)=\frac{1}{\varepsilon^2}\phi_0(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^2}{2}+\tau\right).$$

Аналогично, для коэффициента $u_3(\tau,\varepsilon)$ получим

$$u_3(\tau,z)=\frac{1}{\varepsilon^3}\phi_0(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^3}{6}+\tau^2+\tau\right).$$

Далее, на основе математической индукции для определения коэффициента $u_k(\tau,\varepsilon)$, $k\geq 0$, получим

$$u_k(\tau,z)=\frac{1}{\varepsilon^k}\phi_0(z)e^{\tau}\left(\frac{\tau^k}{k!}+\tau^{k-1}+\ldots+\tau\right). \tag{15}$$

Далее, так как

$$\tau(\varepsilon,z)=\frac{1}{\varepsilon}2a(0)\ln\frac{|z|}{R},$$

то, подставляя значение $\tau(\varepsilon,z)$ в формулу (15) для определения коэффициента $u_k(\tau,\varepsilon)$, $k\geq 1$, получаем

$$u_k(\tau, z) = \frac{1}{\varepsilon^{2k}} \phi_0(z) e^{\frac{1}{\varepsilon} 2a(0) \ln \frac{|z|}{R}} \times$$
$$\times \left(\frac{(2a(0)(\ln r - \ln R))^k}{k!} + \varepsilon(2a(0)(\ln r - \ln R))^{k-1} + \ldots + \varepsilon^k (2a(0)(\ln r - \ln R)) \right). \tag{16}$$

Из предыдущих формул, а также из формулы (16) следует, что на границе области D, т.е. на границе Γ все коэффициенты $u_k(\tau, z) = 0$, $k \geq 1$, для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Следовательно, на границе Γ полученный асимптотический ряд (14) совпадает с точным решением задачи (2), (3). Поэтому достаточно показать равномерную сходимость для $|z| < R$.

Пусть $|g(t)| \leq M_0$, $M_0 > 0$. Тогда $|\phi_0(z)| \leq M_0$, $M_0 > 0$.

Тогда

$$|u_k(\tau, z)| \leq \frac{M_0}{\varepsilon^{2k}} e^{\frac{2a(0)}{\varepsilon}(\ln r - \ln R)} \frac{(2a(0)|(\ln r - \ln R)|)^k}{k!} \leq \frac{M_0}{\varepsilon^{2k}} e^{\frac{a(0)}{\varepsilon}(\ln r - \ln R)} \frac{(a(0)|(R^2))|^k}{k!},$$

$$\frac{1}{\varepsilon^{2k}} e^{\frac{a(0)}{\varepsilon}(\ln r - \ln R)} = \frac{\xi^{2k}}{e^{\xi 2a(0)(\ln R - \ln r)}} < 1, \quad \forall \xi = \frac{1}{\varepsilon} > 0.$$

Следовательно, для $u_k(\tau, z)$ получим следующую оценку

$$|u_k(\tau, z)| \leq M_0 \frac{(2a(0)|(\ln r - \ln R)|)^k}{k!} \leq M_0 \frac{\left(2a(0) \ln \frac{|z|}{R}\right)^k}{k!}.$$

Отсюда непосредственно следует, что ряд в формуле (15) сходится абсолютно и равномерно по переменному z во всей области $\bar{D}$ и имеет место оценка

$$\left| \sum_1^\infty u_k(z, \tau) \varepsilon^k \right| < 1 + \left(\frac{|z|}{R} \right)^{2a(0)}. \tag{17}$$

Из оценки (17) следует, что мажорантный ряд имеет конечную сумму и ряд в интегральном представлении (14) сходится в обычном смысле абсолютно и равномерно по переменному z во всей области $\bar{D}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
2. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
3. *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М.: Изд-во Московского университета, 2011.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т. 41. № 7. С. 799–851.
5. *Нефедов Н.Н., Никитин А.Г.* Задача Коши для сингулярно возмущенного интегродифференциального уравнения Фредгольма // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 4. С. 655–664.
6. *Сафонов В.Ф., Бободжанов А.А.* Сингулярно возмущенные задачи и метод регуляризации: учебное пособие. М.: Издательский дом МЭИ, 2012.
7. *Бободжанов А.А., Сафонов В.Ф.* Обобщение метода регуляризации на сингулярно возмущенные интегродифференциальные уравнения в частных производных // Изв. вузов. 2018. № 3. С. 9–22.
8. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматлит, 1988. 510 с.
9. *Расулов А.Б., Солдатов А.П.* Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана с сингулярными коэффициентами // Дифференц. ур-ния. 2016. Т. 52. № 5. С. 637–650.