

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА

УДК 517.93

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ВСТРЕЧНЫХ ПОТОКОВ ЧАСТИЦ

© 2020 г. С. Я. Степанов^{1,*}, Т. В. Сальникова^{2,1,**}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

² 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

*e-mail: stepsj@ya.ru

**e-mail: tatiana.salnikova@gmail.com

Поступила в редакцию 07.05.2020 г.

Переработанный вариант 07.05.2020 г.

Принята к публикации 09.06.2020 г.

Предложена математическая модель ранней стадии образования космических облаков в результате взаимодействия встречных потоков космических частиц и их эволюции в планетные системы. Существенную роль в эволюции играет диссипация механической энергии, которая происходит, в основном, за счет столкновения частиц. Моделирование проводится в рамках классической задачи n -тел и теории Ньютона мгновенного удара твердых тел с меньшим единицы коэффициентом восстановления относительной скорости. Проведенные вычисления показывают правомерность применения такой модели в космогонических теориях образования планетных систем. Библ. 29. Фиг. 6.

Ключевые слова: космогония, планетная система, эволюция, удар.

DOI: 10.31857/S0044466920100142

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена математическому моделированию процесса образования и эволюции движения космических облаков – скоплений большого числа космических частиц – на базе уравнений движения классической задачи n -тел (см., например, [1]–[5]). В литературе имеются и более сложные модели, основанные на гидродинамических, физико-химических, релятивистских и других аспектах космогонических процессов (см., например, [6]–[8]). В Солнечной системе такие скопления обнаружены в устойчивых треугольных точках либрации систем Солнце–Юпитер, Солнце–Сатурн, Солнце–Земля и др. (см. [9]).

Существование скопления частиц в окрестности треугольных точек либрации системы Земля–Луна впервые было зафиксировано в 1961 г. (см. [10]) польским астрономом К. Кордылевским. Затем последовала череда противоречащих одна другой публикаций, подтверждающих и ставящих под сомнение существование этих облаков, их называли “неуловимые облака Кордылевского”. Дискуссии длились более полувека. Объяснение этого феномена было дано в работах [11]–[20] с учетом гравитационного и светового возмущения от Солнца и электростатических взаимодействий частиц.

В отличие от указанных систем, в формировании планетных систем основную роль играют начальный кинетический момент, внутренние взаимодействия частиц и диссипация механической энергии, которая происходит, главным образом, за счет столкновения частиц (см. [21]–[23]).

Уравнения движения классической задачи n -тел в общем случае нельзя интегрировать без дополнительных ограничений. Даже движение всего двух материальных точек с нулевыми начальными скоростями под действием взаимного ньютоновского притяжения за конечное время коллапсирует, и исходная задача теряет смысл. Обычно для регуляризации уравнений вводят модифицированный потенциал с добавлением к потенциалу Ньютона потенциала отталкивающих сил, моделирующих контактное взаимодействие частиц.

Другая трудность интегрирования задачи n -тел связана с квадратичным ростом числа парных взаимодействий $n(n-1)/2$ частиц с ростом n . Эта трудность преодолевается введением упрощенных алгоритмов вычисления: древовидного упорядочения взаимодействий с отбрасыванием не-

существенных дальнедействий и близкодействий (см. [24], [25]), метод частиц в ячейке (particles in cell – PiC) (см. [5]) и др. Эти алгоритмы реализованы для последовательного и параллельного вычислений и для применения графических процессоров (см. [26]–[28]).

В настоящей работе исследование проводится в рамках классической задачи n -тел Ньютона и гипотезы Ньютона о неупругом ударе твердых тел. За основу взята модель, разрабатывавшаяся с начала 80-х годов прошлого века Т.М. Энеевым и Н.Н. Козловым (см. [3]). В этой работе обобщались дополнения к гипотезе Шмидта, связанные с механизмом взаимодействия сталкивающихся частиц. В 2001 г. Т.М. Энеев (см. [4]) выдвинул гипотезу о том, что из отделившегося пояса частиц могут образоваться только маленькие спутники, а происхождение больших спутников объясняется захватом других небесных тел с близкими орбитами. В [29] с применением модифицированного потенциала была показана возможность образования на ранней стадии не только мелких, но и крупных спутников планеты, а также систем типа двойных звезд. В настоящей работе основное внимание уделено алгоритмической реализации модели, основанной на теории неупругого удара твердых тел.

1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В статье моделирование проводится в рамках классической задачи n -тел, притягивающихся по закону всемирного тяготения Ньютона:

$$dr_i/dt = v_i, \quad dv_i/dt = -\partial U/\partial r_i, \quad U = -\gamma \sum_{j \neq i} m_j |r_{ij}|^{-1}, \quad r_{ij} = r_j - r_i, \quad (1)$$

где m_i , r_i , v_i – массы, радиус-векторы и скорости центров масс частиц в инерциальной системе отсчета Кёнига с началом в центре масс системы соответственно. В случае контактного взаимодействия используется теория удара твердых тел, базирующаяся на введенном Ньютоном понятии коэффициента восстановления относительной скорости частиц после удара ($0 \leq e \leq 1$).

При рассмотрении ударов поверхности частиц предполагаются гладкими сферами с диаметрами d_i и с центрами в центрах масс частиц. Это соответствует предположению о малости кинетической энергии вращения частицы вокруг центра масс по сравнению с кинетической энергией движения центра масс. Сила трения в плоскости, касательной к контактирующим поверхностям, не учитывается. Считаем, что при ударе скорости меняются мгновенно, сохраняется количество движения соударяющихся частиц, и, согласно гипотезе Ньютона, нормальная составляющая u_{ij} разности скоростей $v_{ij} = v_j - v_i$ частиц i и j после удара меняет знак и умножается на коэффициент восстановления $0 \leq e \leq 1$ (штрихами отмечены скорости после удара):

$$m_i v_i' + m_j v_j' = m_i v_i + m_j v_j, \quad u_{ij}' = -e u_{ij}, \quad u_{ij} = (r_{ij} v_{ij}) r_{ij}^{-2} r_{ij}. \quad (2)$$

При $e = 0$ имеем абсолютно неупругий удар, при $e = 1$ – абсолютно упругий удар. Из (2) следуют формулы для скоростей после удара

$$v_i' = v_i + \frac{m_j}{m_i + m_j} (1 + e) u_{ij}, \quad v_j' = v_j - \frac{m_i}{m_i + m_j} (1 + e) u_{ij}, \quad (3)$$

и для величины потери кинетической энергии при ударе

$$\Delta T = \frac{m_i(v_i^2 - v_i'^2) + m_j(v_j^2 - v_j'^2)}{2} = \frac{1 - e^2}{2} \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} u_{ij}^2. \quad (4)$$

В частном случае ($m_i = m_j = m$) имеем

$$v_i' = v_i + u_{ij}(1 + e)/2, \quad v_j' = v_j - u_{ij}(1 + e)/2, \quad \Delta T = m u_{ij}^2 (1 - e^2)/4. \quad (5)$$

Такой подход сопряжен со следующими трудностями. Во-первых, с увеличением числа частиц n объем вычислений парных силовых взаимодействий возрастает пропорционально $n(n-1)/2$. Эта трудность преодолевается применением PiC-метода (Particles in Cell) (см. [17]) для вычисления ньютоновского потенциала как решения уравнения Пуассона. Во-вторых, в процессе уплотнения системы частота столкновений увеличивается, и при достижении некоторого предела необходимо переходить на другую модель взаимодействия, например, с модифицированным потенциалом и рассмотрением взаимного проникновения частиц. В этом случае PiC-метод неприме-

ним, и, кроме того, при сближении хотя бы одной пары частиц приходится уменьшать шаг интегрирования. Указанные особенности необходимо отслеживать на каждом шаге интегрирования.

2. АЛГОРИТМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

В силу необходимости сокращения шага интегрирования уравнений (1) при сближении частиц с нарушением условия

$$|r_{ij}| \geq d_{ij}, \quad d_{ij} = (d_i + d_j)/2, \quad (6)$$

и необходимости пересчета начальных условий при каждом ударе, интегрирование проводится одношаговым методом Кутты—Мерсона с автоматическим определением шага.

На шаге интегрирования $[t_k, t_{k+1}]$, на котором нарушается условие (6) для пары ij , уточняется момент времени первого касания сферических поверхностей, связанных с частицами. Для этого строится кубическая интерполяция функции $t(\rho)$, $\rho = |r_{ij}|$, по известным значениям этой функции и ее производной $t' = dt/d\rho = |r_{ij}|/(r_{ij}v_{ij})$ на концах отрезка $[\rho_k, \rho_{k+1}]$, соответствующего отрезку $[t_k, t_{k+1}]$:

$$t(\rho) = t_k + t'_k(\rho - \rho_k) + a(\rho - \rho_k)^2 + b(\rho - \rho_k)^3, \quad (7)$$

где

$$ah^2 = 3(t_{k+1} - t_k) - (2t'_k + t'_{k+1})h, \quad bh^3 = -2(t_{k+1} - t_k) + (t'_k + t'_{k+1})h, \quad h = \rho_{k+1} - \rho_k.$$

При $\rho = d_{ij}$ получаем момент времени t_{ij} касания частиц i и j .

Алгоритм интегрирования включает следующие действия.

1. На каждом шаге интегрирования определяется множество α пар индексов ij , для которых нарушается условие (6).

2. Для каждой пары ij из α по значениям $t_k, r_{ij}(t_k), v_{ij}(t_k)$ и $t_{k+1}, r_{ij}(t_{k+1}), v_{ij}(t_{k+1})$ вычисляем значения $dt/d\rho$ в точках t_k и t_{k+1} , строим кубическую интерполяцию функции $t(\rho)$ на отрезке $[t_k, t_{k+1}]$ и вычисляем значение $t_{ij} = t(d_{ij})$.

3. Среди всех значений t_{ij} выбираем наименьшее $t^* = \min t_{ij}$ и определяем подмножество $\beta \subset \alpha$, для которого этот минимум достигается с заданной точностью.

4. Делаем шаг интегрирования от точки t_k до точки t^* , при этом для всех контактирующих пар из множества β будут выполняться с заданной точностью равенства $|r_{ij}| = d_{ij}$.

5. Если множество β состоит из одного элемента или если элементов несколько, но ни одна частица не входит более, чем в одну пару из β , то это — независимые парные столкновения и проводится независимый пересчет скоростей по формулам (3) для каждой пары из β .

6. Если в множестве β имеется одно или несколько подмножеств σ , для которых в каждой паре хотя бы одна из частиц входит хотя бы в одну другую пару частиц из σ , то мы имеем кратный удар, пересчет скоростей в котором будет рассмотрен ниже.

7. После пересчета скоростей возвращаемся к интегрированию дифференциальных уравнений.

В дальнейшем будем различать напряженный и ненапряженный контакт частиц. Будем говорить, что пара соприкасающихся частиц ij находится в напряженном контакте, если, кроме условия $|r_{ij}| = d_{ij}$, еще выполнено условие $r_{ij}v_{ij} > 0$, означающее, что при продолжении непрерывного движения условие $|r_{ij}| \geq d_{ij}$ нарушится.

3. АЛГОРИТМ РАЗРЕШЕНИЯ КРАТНОГО УДАРА

В случае кратных ударов нарушаются однозначность и непрерывная зависимость скоростей после удара от координат и скоростей до удара. Эта особенность лежит в основе рассматриваемой постановки задачи и неизбежна при численной реализации, где условия типа равенств должны рассматриваться в допусках заданной точности. Поэтому, строго говоря, вместо дифференциальных уравнений необходимо рассматривать дифференциальные включения. Мы же будем рассматривать движение в рамках интегрирования дифференциальных уравнений со случайными возмущениями, зависящими от ошибок округлений и точности интегрирования.

Итак, пусть на каком-то шаге интегрирования обнаружилось множество σ пар частиц ij , удовлетворяющее условиям кратного удара, т.е. в каждой паре хотя бы одна частица входит хотя бы в одну другую пару частиц из σ .

Алгоритм пересчета скоростей состоит из следующих действий.

1. Упорядочиваем последовательность пар в множестве σ по возрастанию времени наступления контакта и в заданном порядке производим пересчет скоростей пар, находящихся в напряженном контакте (с учетом ранее произведенных пересчетов).

2. Если при переборе всех пар из σ была обнаружена хотя бы одна напряженная пара, то перебор повторяется.

3. Если при переборе всех пар из σ не было ни одной пары в напряженном состоянии, пересчет заканчиваем, и возобновляется интегрирование с новыми начальными условиями.

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

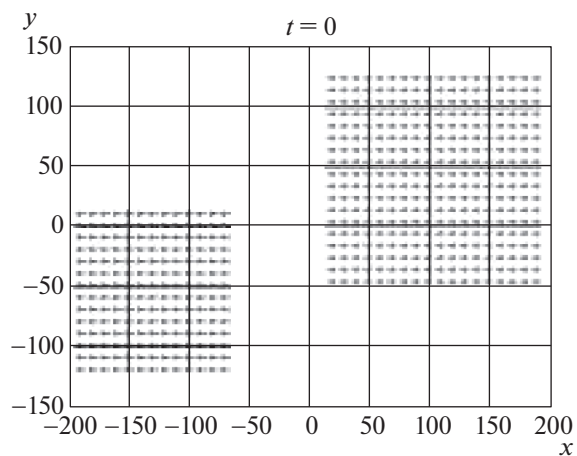
Проводились расчеты двумерных и трехмерных задач с различным числом частиц, различными коэффициентами восстановления скоростей после удара, различными распределениями начальных координат и скоростей частиц. В начальный момент частицы располагались в узлах правильной прямоугольной сетки. При интегрировании правильная начальная структура распределения частиц быстро распадалась, а периферийные частицы и, особенно, частицы, расположенные в угловых точках начального распределения, становились очагами сгущения. Наиболее существенное влияние на этот процесс оказывают коэффициент восстановления и кинетический момент системы.

Для наглядной и простой иллюстрации приведем результаты двумерного моделирования 1024 одинаковых шариков с массой m и диаметром d . В начальный момент времени шарики равномерно с шагом $10d$ заполняют два прямоугольника, содержащие 32×19 и 32×13 шариков. Величина постоянной всемирного тяготения принята равной $\gamma = 6.6743 \times 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2} \text{ кг}^{-1}$. В качестве единицы длины принят диаметр шариков $L = d$, единицы массы – масса шариков $M = m$, а единица времени T выбрана так, чтобы в новых единицах выполнялось равенство $\gamma = 1L^3T^{-2}M^{-1}$. Если принять плотность материала шариков равной $\rho = 2208 \text{ кг м}^{-3}$, примерно соответствующую плотности хондритов, из которых состоят метеорные тела солнечной системы, то единица времени составит $T = 3600 \text{ с} = 1 \text{ ч}$. При таком выборе единиц измерения уравнения движения и результаты расчета не меняются при изменении размера частиц. На фиг. 1 показано начальное распределение шариков. Большая часть шариков не видна за левой и правой границами рисунка. Скорости прямоугольников равны 1.54 и -1.2 (на фигурах скорости показаны короткими штрихами), расстояние между передними кромками прямоугольников равно 90. Коэффициент восстановления равен $e = 0.97$.

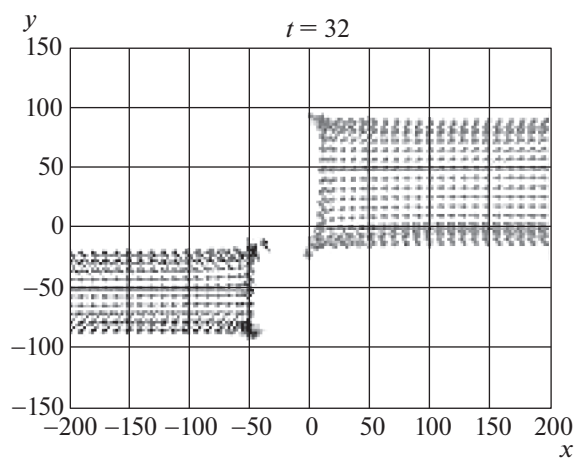
На фиг. 2 и 3 видно, как плотность распределения шариков начинает увеличиваться от периферии к центру, начальная структура расположения шариков разрушается, и образуются очаги концентрации частиц. На фиг. 4 и 5 видна начальная стадия формирования планеты и спутника. На фиг. 6 приведен увеличенный фрагмент фиг. 5. В дальнейшем планета и спутник продолжают уплотняться и вращаться вокруг своих центров масс и относительно друг друга.

5. УПРОЩЕНИЕ АЛГОРИТМА

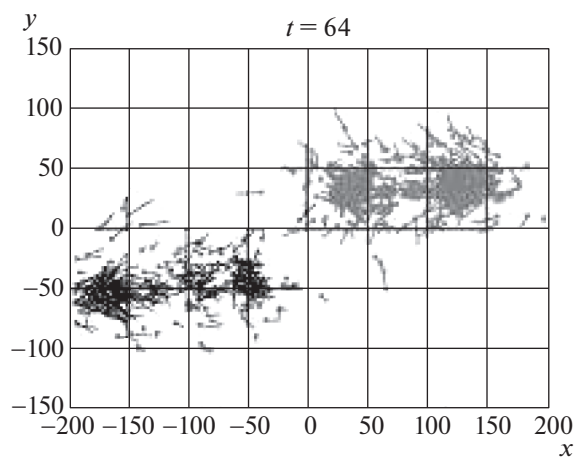
При интегрировании уравнений (1) существенную долю машинного времени занимает вычисление гравитационного потенциала и гравитационных сил, действующих на каждую частицу со стороны остальных частиц. При значительном количестве частиц и, особенно, при рассмотрении пространственных движений используется ускоренный расчет потенциала с помощью PIC-метода (Particles In Cell) (см. [5]), в котором система частиц рассматривается как гравитирующая сплошная среда, погруженная в прямоугольную неподвижную сетку. Потенциал Ньютона U распределенной гравитирующей массы обладает замечательным свойством: он удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta U(r) = \rho$ с массовой плотностью ρ , пропорциональной количеству частиц, попавших в ячейку. Значения функции U и плотности ρ вычисляются в центрах ячеек сетки. Уравнение Пуассона интегрируется методом быстрого преобразования Фурье FFT (Fast Fourier Transform).



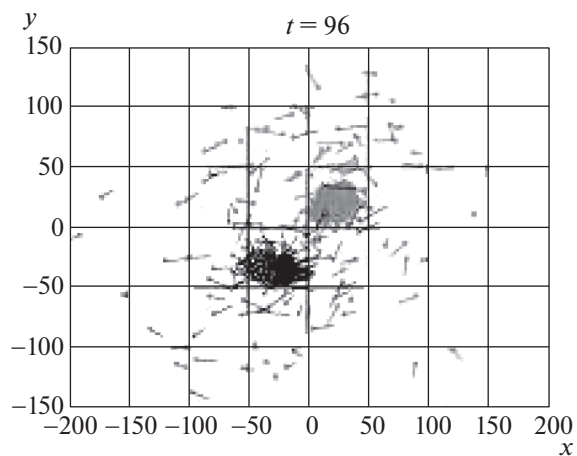
Фиг. 1.



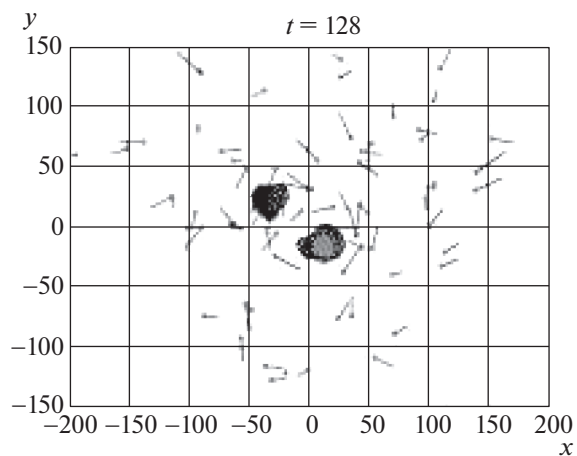
Фиг. 2.



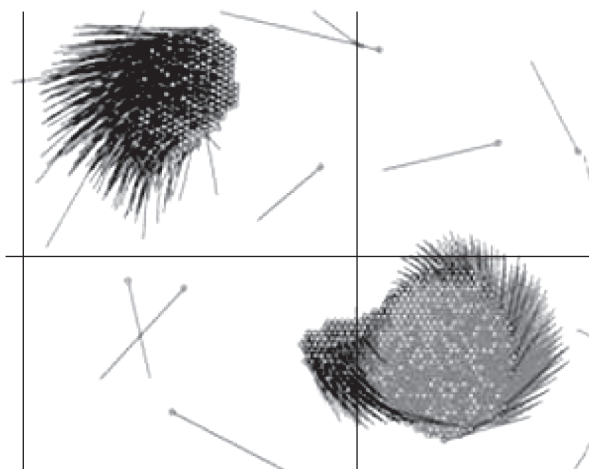
Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

В процессе эволюции системы в результате потери механической энергии повышаются плотность распределения частиц, частота столкновений и кратность ударов. При этом алгоритм выделения всех моментов времени столкновений и обработки ударов тормозит скорость интегрирования. После этого момента целесообразно переходить на модель с потенциалом, модифицированным добавлением в правые части уравнений (1) регуляризирующих членов, соответствующих потенциалу упругих отталкивающих сил, неограниченно возрастающих при проникании шариков друг в друга:

$$V(r) = \sum_j V_j(r), \quad V_j(r) = \gamma m_j (-|r_j - r|^{-1} + k|r_j - r|^{-p}), \quad k = d^{p-1}/p.$$

При $|r_j - r| = d$ функции V_j имеют минимум, и определяемые ими силы обращаются в нуль. При $|r_j - r| > d$ эти силы близки к ньютоновским силам тяготения, а при $|r_j - r| < d$ имеем отталкивающие силы, стремящиеся к бесконечности при $|r_j - r| \rightarrow 0$. При таком подходе возможно сквозное интегрирование уравнений движения без выделения моментов соударения частиц, и устраняется неоднозначность решения, однако возникают трудности, связанные с жесткостью системы.

Вычислительные эксперименты показывают, что, несмотря на некоторые различия в траекториях отдельных частиц, макрохарактеристики движения рассматриваемых систем при таких упрощениях практически не меняются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сильченко О.К.* Происхождение и эволюция галактик / под ред. В.Г. Сурдина. Фрязино: Век 2, 2017, 224 с. ISBN978-5-85099-196-8.
2. *Галимов Э.М., Кривоцов А.М., Забродин А.В., Легкоступов М.С., Энеев Т.М.* Динамическая модель образования системы Земля–Луна, Геохимия, 11, 2005.
3. *Eneev T., Kozlov N.* The Dynamics of Planet Formation. Theory and Computer Simulation // CityplaceSaarbrücken, Deutschland, Lap Lambert Academic Publishing, 2016, 140 p. ISBN: 978-3-659-85958-8.
4. *Энеев Т.М., Козлов Н.Н., Кузусев Е.И., Чечеватов Д.А.* О возможном механизме образования естественных спутниковых систем. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2006, 072, 20 с.
5. *Hockney R.W., Eastwood J.W.* Computer simulation using particles. McGraw-Hill International Book Company Русский Перевод на русский язык с дополнениями. Хокни Р., Иствуд Дж. Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
6. *Дорофеева В.А., Макалкин А.Б.* Эволюция ранней Солнечной системы. Космохимические и физические аспекты. М.: Едиториал УРСС, 2004, 264 с.
7. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.* Строение и эволюция вселенной. М.: Наука, 1975. 735 с.
8. *Tomooki Matsumoto, Kazuhito Dobashi, and Tomomi Shimoikura* Star Formation in Turbulent Molecular Clouds with Colliding Flow // *Astrophys. J.* 801:77 (21pp). 2015. March 10.
9. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
10. *Kordylewski K.* Photographische Untersuchungen des Librationspunktes im System Erde-Mond // *Acta Astronomica.* 1961. V. 11. № 3. 165–169.
11. *Веденяпин В.В., Сальникова Т.В., Степанов С.Я.* Уравнения Власова–Пуассона–Пуассона, критическая масса и облака Кордылевского // *Докл. АН.* 2019. Т. 485. № 3. С. 276–280. <https://doi.org/10.31857/S0869-56524853276-280>
12. *Сальникова Т.В., Степанов С.Я., Шувалова А.И.* Вероятностная модель облаков Кордылевского // *Докл. РАН.* 2016. Т. 468. № 3. С. 276–279. <https://doi.org/10.7868/S0869565216150111>
13. *Сальникова Т.В., Степанов С.Я.* Математическая модель образования космических пылевых облаков Кордылевского // *Докл. АН.* 2015. Т. 463. № 2. С. 164–167. <https://doi.org/10.7868/S0869565215200104>
14. *Salnikova T., Stepanov S.* Existence of elusive kordylewsky cosmic dust clouds // *Acta Astronautica.* 2019. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2019.02.013>
15. *Salnikova T., Stepanov S., Shuvalova A.* Probabilistic model of the kordylewski dust clouds formation // *Acta Astronautica.* 2018. V. 150. P. 85–91. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2017.12.022>
16. *Salnikova T., Stepanov S.* Dust charged particles motion in vicinity of the lagrange libration points // *Adv. Astronautical Sci.* 2020. V. 170. P. 91–96.
17. *Salnikova T., Stepanov S., Shuvalova A.* Three-body problem for the earth-moon system under photo-gravitational influence of the sun // *Adv. Astronautical Sci.* 2018. V. 161. P. 201–208.

18. *Salnikova T., Stepanov S.* Effect of electromagnetic field on kordylewski clouds formation // AIP Conf. Proc. 2018. V. 1959. № 1. P. 020004–1–020004–6.
<https://doi.org/10.1063/1.5034580>
19. *Сальникова Т.В., Степанов С.Я.* Исследование периодических траекторий движения частицы в окрестности треугольных точек либрации системы Земля–Луна с учетом солнечного возмущения // В сб. докладов: XI Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. 2015. С. 3330–3331.
20. *Salnikova T., Stepanov S.* Polish contribution to the discovery of cosmical dust cloudes // Proc. Internat. Conf. “Geometry, Integrability, Mechanics and quantization. June 6–11, 2014 Varna Bulgaria. Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, 2015. P. 350–355. ISBN 978-619-160-488-3.
21. *Chatterjee A., Ruina A.* A new algebraic rigid-body collision law based on impulse space consideration // J. Appl. Mech. Dec. 1998, 65. С. 939–951.
<https://doi.org/10.1115/1.2791938>
22. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. М.: Международная программа образования, 1997.
23. *Marghitu Dau B., Hurmuzlu Yildirim.* Three dimensional rigid body collisions with multiple contact points // J. Appl. Mech. September 1995, 62. С. 725–732.
<https://doi.org/10.1115/1.2897006>
24. *Barnes J., Hut P.* A Hierarchical $O(n \log n)$ Force Calculation Algorithm // Nature. 1986. V. 324.
25. *Ahn C., Lee S.H.* A new treecode for long-range force calculation // Comput. Phys. Communicat. 2008. V. 178. Issue 2. P. 121–127.
26. *Belleman R.G., Berdorf J., Zwart S.F.P.* High performance direct gravitational N-body simulations on graphics processing units II: An implementation in CUDA // New Astronomy. 2008. V. 13. P. 103–112.
27. *Junichiro Makino.* A Fast Parallel Treecode with GRAPE // Astron. Soc. Japan. 2004. V. 56, P. 521–531.
28. *Makino J.* A fast parallel treecode with GRAPE // Publ. Astron. Soc. Japan. 2004. V. 56. P. 521–531.
29. *Salnikova T.V., Stepanov S.Ya., Kugushev E.I.* Possible models of the planetary systems formations // Internat. J. Modern Phys. A. V. 35. № 02n03. Online Ready. 2020.
<https://doi.org/10.1142/S0217751X20400618>.