ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 10, с. 1741–1756

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.63

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ НА ГРУППЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ОПИСЫВАЮЩИЕ ИХ ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ[1)]

© 2020 г. К. Ю. Замана[1,*], В. Ж. Сакбаев[1,2,3,4,], О. Г. Смолянов[1,5,***]**

[1] *141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер. 9, МФТИ, Россия*

[2] *603950 Нижний Новгород, пр-т Гагарина, 23, ИТММ ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Россия*

[3] *119991 Москва, ул. Губкина, 8, МИ им. В.А. Стеклова РАН, Россия*

[4] *450008 Уфа, ул. Чернышевского, 112, ИМВЦ УФИЦ РАН, Россия*

[5] *119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия*

**e-mail: kostya_zam@mail.ru*

***e-mail: fumi2003@mail.ru*

****e-mail: smolyanov@yandex.ru*

Поступила в редакцию 07.02.2020 г.
Переработанный вариант 20.02.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

Рассматриваются случайные процессы, принимающие значения в группе ортогональных преобразований конечномерного евклидова пространства и являющиеся некоммутативными аналогами процессов с независимыми приращениями. Такие процессы определяются как пределы некоммутативных аналогов случайных блужданий в группе ортогональных преобразований. Эти случайные блуждания представляют собой композиции независимых случайных ортогональных преобразований евклидова пространства. В частности, таким образом определяются некоммутативные аналоги диффузионных процессов со значениями в группе ортогональных преобразований. Для этих процессов получены обратные уравнения Колмогорова. Библ. 16.

Ключевые слова: случайный линейный оператор, случайная операторнозначная функция, операторнозначный случайный процесс, закон больших чисел, уравнение Колмогорова.

DOI: 10.31857/S0044466920100154

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В квантовой теории и статистической механике возникает задача описания как случайных квантовых гамильтонианов и случайных однопараметрических полугрупп линейных операторов [1]–[3], так и случайных классических гамильтонианов [4] и случайных фазовых потоков [5]. Обсуждаемые в предлагаемой статье случайные процессы, принимающие значения в конечномерной ортогональной группе, возникают при исследовании открытых квантовых систем. При исследовании открытых классических гамильтоновых систем появляются случайные функции Гамильтона; такие системы возникают в моделях статистической механики. В этой статье обсуждается математическая теория таких случайных процессов.

В настоящей статье изучаются статистические свойства последовательностей композиций независимых случайных линейных преобразований конечномерного евклидова пространства E. Анализ композиций независимых случайных сдвигов на векторы евклидова пространства E приводит к построению теории случайных блужданий и теории диффузионных случайных процессов со значениями в евклидовом пространстве. Рассматриваемые в настоящей работе композиции случайных преобразований отличаются от композиции случайных сдвигов отсутствием свойства перестановочности и тем самым являются некоммутативным аналогом случайных блужданий в пространстве E.

[1)]Работа О.Г. Смолянова выполнена при финансовой поддержке научной программы “Фундаментальные проблемы механики и математики” механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Для композиций независимых одинаково распределенных случайных линейных преобразований пространства E будет установлен аналог закона больших чисел, утверждающий сходимость по вероятности композиций независимых случайных преобразоаний к своему математическому ожиданию в различных операторных топологиях.

Для случайных ортогональных преобразований пространства E рассматривается аналог броуновского движения по группе ортогональных преобразований – последовательность $\{\mathbf{V}_n(\cdot)\}$ композиций независимых одинаково распределенных случайных операторнозначных функций $\mathbf{U}_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, со значениями в группе ортогональных преобразований пространства E, при каждом $n \in \mathbb{N}$ задаваемых равенством $\mathbf{V}_n(t) = \mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right)$, $t \geq 0$. Установлено, что математическое ожидание функционалов от композиций $\mathbf{V}_n(\cdot)$ случайных ортогональных преобразований сходится при $n \to \infty$ к операторнозначной функции $\hat{U}(\cdot)$, представляющей собой полугруппу операторов, разрешающую начально-краевую задачу для параболического дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Порожденная параболическим дифференциальным уравнением полугруппа $\hat{U}(\cdot)$ задается математическими ожиданиями функционалов от марковского диффузионного процесса ξ со значениями в пространстве E (см. [6]–[8]).

Замечание 1. В рамках разрабатываемого подхода можно заменить броуновское движение по группе ортогональных преобразований пространства E на броуновское движение по произвольной группе Ли.

Пусть E – евклидово пространство конечной размерности $d \in \mathbb{N}$. Пусть $B(E)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E. Пусть λ – мера Лебега на пространстве E. Пусть $\mathcal{H}$ – пространство квадратично интегрируемых по мере λ функций u: $E \to \mathbb{C}$.

Для изучения асимптотического поведения композиций n случайных операторнозначных функций $\mathbf{U}_k\colon [0,+\infty) \to B(E)$, $k \in \mathbb{N}$, со значениями в банаховом пространстве $B(E)$ при $n \to \infty$ рассматривается порождаемое такими оператор-функциями преобразование пространства $\mathcal{H}$.

Так, для описания случайных процессов $\xi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в пространстве E рассматриваются порождаемые случайным процессом ξ случайные преобразования сдвига аргумента пространства интегрируемых функций, действующие по правилу $u(\cdot) \to u(\cdot + \xi(t)) = \hat{\mathbf{S}}_{\xi(t)}u(\cdot)$, $t \in R$, $u \in \mathcal{H}$. Для диффузионных процессов ξ математическое ожидание $\mathrm{M}[\hat{\mathbf{S}}_{\xi(t)}u]$ является решением уравнения Колмогорова–Фоккера-Планка. Для некоторого класса процессов ξ устанавливается слабая сходимость (или сходимость по распределению) последовательности сумм случайных процессов $\{\eta_n\}$, определяемых равенством $\eta_n(t) = \xi_1\left(\frac{t}{n}\right) + \ldots + \xi_n\left(\frac{t}{n}\right)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, к диффузионному процессу (см., например, [9]).

Для описания случайных процессов $\mathbf{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, со значениями в пространстве $B(E)$ рассматриваются порождаемые случайным процессом $\mathbf{U}$ случайные линейные преобразования аргумента пространства $\mathcal{H}$ квадратично интегрируемых функций, действующие по правилу $u(x) \to u(\mathbf{U}(t)x) = \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{U}}(t)u(x)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $u \in \mathcal{H}$. Исследуются асимптотические свойства последовательности $\left\{\mathbf{V}_n(t) = \mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right)\right\}$ итераций случайных линейных преобразований и их математические ожидания. Получены начально-краевые задачи для дифференциального уравнения параболического типа, описывающие предельную эволюцию математического ожидания от функционалов на композициях независимых случайных оператор-функций

$$\mathbf{U}_n\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Будем использовать обозначения и терминологию, принятые в книге [10]. Пусть:

E – евклидово пространство конечной размерности $d \in \mathbb{N}$ со скалярным произведением $(.,.)$ и порожденной им нормой $|.|$; в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, E будет отождествляться с $\mathbb{R}^d$;

$B(E)$ – банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве E, с нормой $\|.\|$; в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям, $B(E)$ будет отождествляться с пространством квадратных матриц порядка d;

$\mathcal{H}$ – гильбертово пространство функций $u\colon E \to \mathbb{C}$, квадратично интегрируемых по мере Лебега λ в E, со скалярным произведением $\langle .,. \rangle$ и порожденной им нормой $\|.\|_{\mathcal{H}}$;

$B(\mathcal{H})$ – банахово пространство линейных ограниченных операторов $\hat{A}\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ с нормой $\|.\|_{B(\mathcal{H})}$; $\hat{I} \in B(\mathcal{H})$ – единичный оператор;

$C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ – топологическое векторное пространство сильно непрерывных операторнозначных функций $\hat{F}\colon [0;+\infty) \to B(\mathcal{H})$, топология которого порождается семейством полунорм $\Phi_{u,T}(\hat{F}) = \sup\limits_{t\in[0;T]} \left\|\hat{F}(t)u\right\|_{\mathcal{H}}$ при всех $T > 0$ и $u \in \mathcal{H}$;

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ – вероятностное пространство.

Определение 1. а) Отображение $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(E)$ со значениями $\mathbf{A}(\omega) = A_\omega \in B(E)$, $\omega \in \Omega$, будем называть *случайным оператором* на E (или, если это не приводит к недоразумениям, *случайной матрицей*), если функции $(\mathbf{A}(\cdot)x, y)$ являются $(\Omega, \mathcal{F})$-измеримыми (т.е., являются комплекснозначными случайными величинами) при всех $x \in E$ и $y \in E$. Аналогично вводится понятие *случайного оператора* $\hat{\mathbf{A}}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$ на $\mathcal{H}$.

б) Отображение $\hat{\mathbf{S}}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ со значениями $\hat{\mathbf{S}}(\omega) = \hat{S}_\omega \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, $\omega \in \Omega$, будем называть *случайной операторнозначной функцией* (или просто *случайной функцией*), если $\hat{S}_{(\cdot)}(t)$ является случайным оператором при всех $t \geq 0$. Если при этом $\hat{S}_\omega$ при каждом $\omega \in \Omega$ является полугруппой операторов, то это отображение будем называть также *случайной полугруппой*.

Замечание 2. В работах [2], [11] рассматривается более сильное требование измеримости случайных операторов и случайных операторнозначных функций: измеримость относительно борелевской сигма-алгебры пространства-образа $B(E)$ для случайных операторов и $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ для случайных операторнозначных функций.

Определение 2. а) *Усреднением* (или математическим ожиданием) случайного оператора $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(E)$ будем называть оператор $\mathrm{M}(\mathbf{A}) \in B(E)$ такой, что

$$(\mathrm{M}(\mathbf{A})x, y) = \mathrm{M}(\mathbf{A}x, y), \quad \forall x \in E, \quad \forall y \in E, \tag{2.1}$$

где M в правой части равенства (2.1) означает математическое ожидание, т.е. интеграл по вероятностному пространству Ω. Аналогично вводится понятие *усреднения* случайного оператора $\hat{\mathbf{A}}\colon \Omega \to B(\mathcal{H})$.

б) *Усреднением* случайной операторнозначной функции $\hat{\mathbf{S}}$ будем называть функцию $\hat{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ такую, что $\hat{F}(t)$ является усреднением случайного оператора $\hat{S}_{(\cdot)}(t)$ при каждом $t \geq 0$. Для усреднения $\hat{\mathbf{S}}$ будем в дальнейшем пользоваться обозначением $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})$.

В указанных выше определениях и далее полужирный шрифт используется для обозначения **случайных** операторов и операторнозначных функций, а знак “крышки” – для обозначения операторов и операторнозначных функций, действующих в $\mathcal{H}$. В тех случаях, когда не имеет значения, на каком пространстве действует оператор (как в указанных ниже в этой главе теоремах), “крышка” будет опускаться.

Для доказательства существования усреднений полезно следующее утверждение, являющееся следствием теоремы Рисса–Фреше:

Теорема 1 (см. [12, с. 58]). *Пусть* $\mathcal{H}$ *– гильбертово пространство*, $\mathrm{B}\colon \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ *– полуторалинейная форма, для которой существует константа* C *такая, что*

$$|\mathrm{B}(u,v)| \leq C\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Тогда существует единственный оператор $A \in B(\mathcal{H})$ *такой, что*

$$\langle Au, v\rangle = \mathrm{B}(u,v) \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{H},$$

причем $\|A\|_{B(\mathcal{H})} \leq C$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *случайный оператор на гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$ *такой, что* $\|A_\omega\|_{B(\mathcal{H})} \le \xi(\omega)$, *где* $\xi\colon \Omega \to [0;+\infty)$ — *случайная величина с конечным математическим ожиданием* m. *Тогда* $\mathbf{A}$ *имеет усреднение* $M(\mathbf{A}) \in B(\mathcal{H})$, *причем* $\|M(\mathbf{A})\|_{B(\mathcal{H})} \le m$.

Доказательство. В силу неравенства Коши—Буняковского и определения операторной нормы

$$|\langle A_\omega u, v\rangle| \le \|A_\omega\|_{B(\mathcal{H})} \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} \le \xi(\omega)\|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Тогда из интегрируемости ξ следует интегрируемость каждой случайной величины $\langle \mathbf{A}u, v\rangle$, причем

$$|\mathrm{M}\langle \mathbf{A}u, v\rangle| \le m\|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Заметим теперь, что выражение $\mathrm{M}\langle \mathbf{A}u, v\rangle$ представляет собой полуторалинейную форму, поскольку скалярное произведение является полуторалинейной формой, а математическое ожидание и операторы A_ω линейны. Остается применить теорему 1 для $\mathrm{B}(u, v) = \mathrm{M}\langle \mathbf{A}u, v\rangle$ и $C = m$.

Это же утверждение можно использовать и для доказательства существования усреднений случайных оператор-функций, однако в этом случае нельзя гарантировать, что усреднение будет принадлежать $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. Достаточные условия сильной непрерывности усреднения приведены в [2]. Здесь эти условия использоваться не будут, поскольку в описываемых ниже ситуациях доказательство сильной непрерывности усреднения несложно провести непосредственно.

Определение 3. Будем говорить, что функция $F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ *эквивалентна по Чернову* полугруппе $U \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, если последовательность *итераций Фейнмана—Чернова* $(F(t/n))^n$ функции F сходится к полугруппе U в топологии пространства $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$.

Следующая теорема дает достаточные условия эквивалентности по Чернову полугруппе операторов.

Теорема 3 (см. [13]). *Пусть оператор-функция* $F \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ *такова, что* $F(0) = I$ *и* $\|F(t)\|_{B(\mathcal{H})} \le e^{\alpha t}$ *при некотором* $\alpha \ge 0$. *Если замыкание оператора* $F'(0)$ *является генератором полугруппы* $U \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *то оператор-функция* F *эквивалентна по Чернову полугруппе* U.

В статье изучаются композиции случайных полугрупп, их усреднения и итерации Фейнмана—Чернова. Будут исследованы усреднения и итерации некоторых конкретных случайных полугрупп $\hat{\mathbf{S}}(t)$, $t \ge 0$, и оператор-функций $\hat{\mathbf{T}}(t) = \hat{\mathbf{S}}(\sqrt{t})$, $t \ge 0$.

Изучаются свойства операции итерирования Фейнмана—Чернова как отображения пространства случайных операторнозначных функций в себя. Исследованы асимптотические свойства последовательности распределений вероятности значений итераций Фейнмана—Чернова исходной оператор-функции — распределений на пространстве $B(E)$ при фиксированном значении временной переменной и распределений на пространстве $C_s([0,T], B(E))$ при произвольном значении $T > 0$. Установлены условия выполнения закона больших чисел для последовательности композиций Фейнмана—Чернова независимых случайных оператор-функций и случайных операторных полугрупп.

3. УСРЕДНЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ СЛУЧАЙНОГО СДВИГА

Пусть $\xi\colon \Omega \to E$ — случайный вектор.

В данной главе будут рассмотрены операторы случайного сдвига $u(\cdot) \to u(\cdot + t\xi(\omega))$ и изучены их усреднения. Исследование удобно сначала провести для фурье-образов $\hat{S}_\omega(t)u(x) = e^{it(\xi(\omega),x)}u(x)$ этих операторов (аналог сдвигов в импульсном пространстве), поскольку при этом, как будет видно ниже, существенно упрощаются выкладки и обоснования, а затем перейти к исходным прообразам (сдвиги в координатном пространстве).

1. Усреднение в импульсном пространстве. Рассмотрим при каждом $\omega \in \Omega$ полугруппу $\hat{S}_\omega$, действующую на $\mathcal{H}$ следующим образом:

$$\hat{S}_\omega(t)u(x) = e^{it(\xi(\omega),x)}u(x) \quad \forall t \ge 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Теорема 4. *Формула* (3.1) *задает случайную полугруппу* $\hat{\mathbf{S}}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *усреднение которой принадлежит* $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ *и имеет вид*

$$\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})(t)u(x) = \varphi_\xi(tx)u(x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

где $\varphi_\xi\colon E \to \mathbb{C}$ – *характеристическая функция случайного вектора* ξ. *Если при этом* ξ *имеет конечное математическое ожидание* $a \in E$, *то функция* $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $\hat{U} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *действующей по правилу*

$$\hat{U}(t)u(x) = e^{it(a,x)}u(x), \quad \forall t \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Доказательство. Очевидно, $\hat{S}_\omega(0) = I$ (здесь $I \in B(\mathcal{H})$ – тождественный оператор) и $\hat{S}_\omega(t+s) = \hat{S}_\omega(t)\hat{S}_\omega(s)$ при всех $t \geq 0$ и $s \geq 0$, поэтому $\hat{S}_\omega$ при каждом $\omega \in \Omega$ является полугруппой. Проверим теперь принадлежность $\hat{S}_\omega$ пространству $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ при каждом $\omega \in \Omega$. При каждом $t \geq 0$ и $u \in \mathcal{H}$ функция $e^{it(\xi(\omega),x)}u(x)$ аргумента $x \in E$ измерима по Лебегу на E и $\left\|e^{it(\xi(\omega),x)}u\right\|_{\mathcal{H}} = \|u\|_{\mathcal{H}}$, поэтому $\hat{S}_\omega(t) \in B(\mathcal{H})$ при каждом $t \geq 0$, причем $\left\|\hat{S}_\omega(t)\right\|_{B(\mathcal{H})} = 1$. Далее, при каждом $t_0 \geq 0$ и $u \in \mathcal{H}$

$$\left\|\hat{S}_\omega(t)u - \hat{S}_\omega(t_0)u\right\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_E \left|e^{it(\xi(\omega),x)} - e^{it_0(\xi(\omega),x)}\right|^2 |u(x)|^2\, dx \xrightarrow{t \to t_0} 0,$$

что следует из теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, поскольку $\left|e^{it(\xi(\omega),x)} - e^{it_0(\xi(\omega),x)}\right|$ сходится поточечно к нулю при $t \to t_0$ и $\left|e^{it(\xi(\omega),x)} - e^{it_0(\xi(\omega),x)}\right| \leq 2$. Значит, полугруппа $\hat{S}_\omega$ сильно непрерывна, поэтому $\hat{S}_\omega \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$.

Рассмотрим теперь при каждом $t \geq 0$, $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{H}$ функцию

$$\xi_{t,u,v}(\omega) = \left\langle \hat{S}_\omega(t)u, v \right\rangle = \int_E e^{it(\xi(\omega),x)}u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Функция $e^{it(\xi(\omega),x)}u(x)\overline{v(x)}$ аргументов ω и x, очевидно, измерима относительно произведения вероятностной меры μ и меры Лебега на E. Кроме того, поскольку

$$\int_\Omega \left(\int_E \left| e^{it(\xi(\omega),x)}u(x)\overline{v(x)} \right| dx \right) \mu(d\omega) = \int_E |u(x)||v(x)|\, dx \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} < \infty,$$

то по теореме Тонелли функция $e^{it(\xi(\omega),x)}u(x)\overline{v(x)}$ интегрируема на $\Omega \times E$. Значит, по теореме Фубини функция $\xi_{t,u,v}(\omega)$ измерима и интегрируема на Ω, причем

$$\begin{gathered}\mathrm{M}\left\langle \hat{S}_\omega(t)u, v \right\rangle = \int_\Omega \left(\int_E e^{it(\xi(\omega),x)}u(x)\overline{v(x)}dx \right) \mu(d\omega) = \int_E \left(\int_\Omega e^{it(\xi(\omega),x)}\mu(d\omega) \right) u(x)\overline{v(x)}dx = \\ = \left\langle \varphi_\xi(tx)u, v \right\rangle = \left\langle \mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})(t)u, v \right\rangle \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{H},\end{gathered} \tag{3.2}$$

где φ_ξ – характеристическая функция случайного вектора ξ. Следовательно, $\hat{\mathbf{S}}$ – случайная полугруппа.

Далее, поскольку равенство (3.2) верно при любом $v \in \mathcal{H}$, то

$$\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})(t)u(x) = \varphi_\xi(tx)u(x) \quad \forall t \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Поскольку функция φ_ξ непрерывна на E и ограничена ($|\varphi_\xi(x)| \leq 1$), то по аналогии со сделанным выше устанавливается сильная непрерывность функции $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})$, откуда следует, что $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}}) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$.

Пусть теперь случайный вектор ξ имееет конечное математическое ожидание $a \in E$. Тогда функция φ_ξ будет непрерывно дифференцируемой на E, и $d\varphi_\xi(0) = i(a, dx)$. Кроме того, $\varphi_\xi(0) = 1$.

Рассмотрим итерации Фейнмана–Чернова $\hat{S}_n$ функции $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})$:

$$\hat{S}_n u(x) = \left(\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u(x) = \left(\varphi_\xi\left(\frac{tx}{n}\right)\right)^n u(x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Эти итерации не выводят нас за пределы пространства $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. Исследуем теперь вопрос о сходимости последовательности $\hat{S}_n$ в пространстве $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. Для этого сначала заметим, что при сделанных выше предположениях

$$\lim_{n\to\infty}\left(\varphi_\xi\left(\frac{tx}{n}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{it(a,x)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{it(a,x)}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in E,$$

т.е. $\left(\varphi_\xi\left(\frac{tx}{n}\right)\right)^n$ сходится к $e^{it(a,x)}$ поточечно по t и по x. Тогда, применяя теорему Лебега о мажорируемой сходимости, получаем

$$\left(\Phi_{t,u}(\hat{S}_n - e^{it(a,x)})\right)^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left|\left(\varphi_\xi\left(\frac{tx}{n}\right)\right)^n - e^{it(a,x)}\right|^2 |u(x)|^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{H},$$

т.е. $\hat{S}_n$ сходится в пространстве $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ к сильно непрерывной полугруппе $e^{it(a,x)}$.

Замечание 3. На самом деле случайная полугруппа $\hat{\mathbf{S}}$ будет измерима не только в смысле определения 1, но и в более сильном смысле, а именно как отображение из Ω в $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, измеримое относительно борелевской сигма-алгебры пространства $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. Именно, ее можно представить в виде композиции $\hat{\mathbf{S}} = \mathcal{S} \circ \xi$, где отображение $\mathcal{S}\colon E \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ каждому вектору $y \in E$ ставит в соответствие оператор-функцию умножения на $e^{it(y,x)}$. Измеримость ξ дана по условию, а непрерывность $\mathcal{S}$ доказывается аналогично проделанному выше. Тогда $\hat{\mathbf{S}}$ измерима как композиция непрерывного и измеримого отображений. Поэтому результаты настоящей работы для случайных полугрупп, измеримых в смысле определения 1, могут быть перенесены на случайные полугруппы, определенные в статьях [2], [11].

Таким образом, усреднение и последующее итерирование случайной полугруппы $\hat{\mathbf{S}}$ приводит к усреднению случайного вектора ξ. Следует отметить, что после усреднения случайная функция $\hat{\mathbf{S}}$ перестает быть в общем случае полугруппой, однако последующие итерации в пределе восстанавливают полугрупповое свойство.

Рассмотрим теперь функции

$$\hat{T}_\omega(t) = \hat{S}_\omega(\sqrt{t}), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.3}$$

где полугруппы $\hat{S}_\omega$ определены выше формулой (3.1). Заметим, что в отличие от предыдущей ситуации функции $\hat{T}_\omega(\cdot)$ уже не являются полугруппами.

Теорема 5. *Формула* (3.3) *задает случайную операторнозначную функцию* $\hat{\mathbf{T}}\colon \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *усреднение которой принадлежит* $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ *и имеет вид*

$$\mathrm{M}(\hat{\mathbf{T}})(t)u(x) = \varphi_\xi(\sqrt{t}x)u(x) \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Если при этом ξ *имеет нулевое математическое ожидание и конечную матрицу ковариаций* D, *то функция* $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{T}})$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $\hat{W} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *действующей по правилу*

$$\hat{W}(t)u(x) = e^{-\frac{t}{2}(Dx,x)}u(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Доказательство. Доказательство первой части этой теоремы, касающегося усреднения $\hat{\mathbf{T}}$, абсолютно аналогично доказательству теоремы 4.

Пусть теперь $\mathrm{M}\xi = 0$ и $\mathrm{M}(\xi_i\xi_j) = D_{ij}$ (здесь ξ_i есть i-й элемент случайного вектора ξ). Тогда характеристическая функция φ_ξ будет дважды непрерывно дифференцируемой на E, причем $d\varphi_\xi(0) = 0$ и $d^2\varphi_\xi(0) = -(Ddx, dx)$. Отметим также, что матрица ковариаций всегда положительно полуопределена, поэтому квадратичная форма (Dx, x) неотрицательна на E.

Рассмотрим итерации Фейнмана–Чернова $\hat{T}_n$ функции $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{T}})$:

$$\hat{T}_n(t)u(x) = \left(\mathrm{M}(\hat{\mathbf{T}})\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u(x) = \left(\varphi_\xi\left(\frac{\sqrt{t}x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n u(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

и при сделанных выше предположениях имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\varphi_\xi\left(\frac{\sqrt{t}x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{2n}(Dx,x) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = e^{-\frac{t}{2}(Dx,x)}u(x), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in E.$$

Поскольку $0 < e^{-\frac{t}{2}(Dx,x)} \leq 1$, то мы снова находимся в рамках условий теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, и аналогичным образом устанавливаем сходимость $\hat{T}_n$ в пространстве $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ к сильно непрерывной полугруппе $e^{-\frac{t}{2}(Dx,x)}$.

Как видим, усреднение и последующее итерирование центрированных случайных сдвигов, умноженных на $\sqrt{t}$, приводит к диффузии в импульсном пространстве, матрица которой совпадает с матрицей ковариаций. С помощью преобразования Фурье этот результат без проблем переносится и на координатное пространство.

2. Усреднение в координатном пространстве. Пусть $\mathcal{F}$ – преобразование Фурье пространства $\mathcal{H} = L_2(E)$. Отметим, что $\mathcal{F} \in B(\mathcal{H})$ является линейным унитарным оператором.

Для дальнейшего нам понадобится

Лемма 1. а) *Если $\hat{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, то и $\mathcal{F}^{-1}\hat{F}\mathcal{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, причем если $\hat{F}$ является полугруппой, то и $\mathcal{F}^{-1}\hat{F}\mathcal{F}$ является полугруппой.*

б) *Если случайная оператор-функция $\hat{\mathbf{S}}$ имеет усреднение $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}}) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, то $\mathcal{F}^{-1}\hat{\mathbf{S}}\mathcal{F}$ – случайная оператор-функция, имеющая усреднение в $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, причем*

$$\mathrm{M}(\mathcal{F}^{-1}\hat{\mathbf{S}}\mathcal{F}) = \mathcal{F}^{-1}\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})\mathcal{F}.$$

в) *Если оператор-функция $\hat{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ эквивалентна по Чернову полугруппе $\hat{U} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, то функция $\mathcal{F}^{-1}\hat{F}\mathcal{F}$ эквивалентна по Чернову полугруппе $\mathcal{F}^{-1}\hat{U}\mathcal{F}$.*

Доказательство. I. Пусть $\hat{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. В силу унитарности преобразования Фурье и его обратного, при каждом $t \geq 0$ и $u \in \mathcal{H}$ получаем

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t)\mathcal{F}u\right\|_{\mathcal{H}} = \left\|\hat{F}(t)\mathcal{F}u\right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\|\hat{F}(t)\right\|_{B(\mathcal{H})}\left\|\mathcal{F}u\right\|_{\mathcal{H}} = \left\|\hat{F}(t)\right\|_{B(\mathcal{H})}\left\|u\right\|_{\mathcal{H}},$$

откуда следует, что $\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t)\mathcal{F} \in B(\mathcal{H})$ при каждом $t \geq 0$. Далее, из сильной непрерывности $\hat{F}$ следует, что при каждом $t_0 \geq 0$ и $u \in \mathcal{H}$ имеем

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t)\mathcal{F}u - \mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t_0)\mathcal{F}u\right\|_{\mathcal{H}} = \left\|\hat{F}(t)\mathcal{F}u - \hat{F}(t_0)\mathcal{F}u\right\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{t\to t_0} 0,$$

откуда и получаем, что $\mathcal{F}^{-1}\hat{F}\mathcal{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$.

Наконец, если $\hat{F}$ является полугруппой, то

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t+s)\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t)F(s)\mathcal{F} = (\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t)\mathcal{F})(\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(s)\mathcal{F}),$$

$$\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(0)\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}I\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} = I,$$

т.е. $\mathcal{F}^{-1}\hat{F}\mathcal{F}$ тоже является полугруппой.

II. Пусть $\hat{\mathbf{S}}$ – случайная оператор-функция. Согласно пункту а), $\mathcal{F}^{-1}\hat{S}_\omega\mathcal{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ при всех $\omega \in \Omega$ и $\mathcal{F}^{-1}\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})\mathcal{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. Далее, при каждом $t \geq 0$, $u \in \mathcal{H}$ и $v \in \mathcal{H}$ имеем

$$\mathrm{M}\left\langle\mathcal{F}^{-1}\hat{S}_\omega(t)\mathcal{F}u, v\right\rangle = \mathrm{M}\left\langle\hat{S}_\omega(t)\mathcal{F}u, \mathcal{F}v\right\rangle = \left\langle\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})(t)\mathcal{F}u, \mathcal{F}v\right\rangle = \left\langle\mathcal{F}^{-1}\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})(t)\mathcal{F}u, v\right\rangle,$$

откуда и следует утверждение пункта б) леммы.

III. Пусть $\hat{F} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ такова, что последовательность $(\hat{F}(t/n))^n$ сходится в пространстве $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$ к полугруппе $\hat{U} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. Обозначим

$$\hat{F}_n(t) = (\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t/n)\mathcal{F})^n = \mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t/n)\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t/n)\mathcal{F}^{-1}\hat{F}(t/n)\mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1}(\hat{F}(t/n))^n\mathcal{F}.$$

Тогда при каждом $T > 0$ и $u \in \mathcal{H}$ имеем

$$\Phi_{u,T}(\hat{F}_n - \mathcal{F}^{-1}\hat{U}\mathcal{F}) = \sup_{t\in[0;T]}\left\|\mathcal{F}^{-1}(\hat{F}(t/n))^n\mathcal{F}u - \mathcal{F}^{-1}\hat{U}\mathcal{F}u\right\|_{\mathcal{H}} = \sup_{t\in[0;T]}\left\|(\hat{F}(t/n))^n\mathcal{F}u - \hat{U}\mathcal{F}u\right\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

откуда следует утверждение пункта в) леммы.

Рассмотрим теперь при каждом $\omega \in \Omega$ полугруппу $\hat{S}_\omega$ случайных сдвигов, действующую на $\mathcal{H} = L_2(E)$ следующим образом:

$$\hat{S}_\omega(t)u(x) = u(x + t\xi(\omega)), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}. \tag{3.4}$$

Применяя лемму 1 к теореме 4 и учитывая свойства преобразования Фурье, получаем, что справедлива

Теорема 6. *Формула* (3.4) *задает случайную полугруппу* $\hat{\mathbf{S}}: \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *усреднение* $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})$ *которой принадлежит* $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. *Если при этом* ξ *имеет конечное математическое ожидание* $a \in E$, *то функция* $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}})$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $\hat{U} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *действующей по правилу*

$$\hat{U}(t)u(x) = u(x + at), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}.$$

Рассмотрим теперь функции

$$\hat{T}_\omega(t) = \hat{S}_\omega(\sqrt{t}), \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall t \geq 0, \tag{3.5}$$

где полугруппы $\hat{S}_\omega$ определены выше формулой (3.4). Аналогичным образом применяя лемму 1 к теореме 5, приходим к следующему утверждению (см. также [2]):

Теорема 7. *Формула* (3.5) *задает случайную полугруппу* $\mathcal{T}: \Omega \to C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *усреднение* $M\mathcal{T}$ *которой принадлежит* $C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$. *Если при этом* ξ *имеет нулевое математическое ожидание и конечную матрицу ковариаций* D, *то функция* $M\mathcal{T}$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $W \in C_s(\mathbb{R}_+, B(\mathcal{H}))$, *разрешающей задачу Коши для уравнения теплопроводности*

$$\frac{d}{dt}v(t,x) = \frac{1}{2}\operatorname{div}(D\operatorname{grad}v(t,x)), v(t,x) = W(t)u(x).$$

4. УСРЕДНЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ПОЛУГРУПП

В данном разделе будет удобно считать, что $E = \mathbb{C}^d$, $d \in \mathbb{N}$, хотя полученные в ней результаты легко переносятся и на случай $E = \mathbb{R}^d$. Тогда $B(E)$ – пространство квадратных матриц порядка d, элементы которых есть комплексные числа.

Пусть $\mathbf{A}: \Omega \to B(E)$ – случайная матрица. Отметим, что измеримость случайной матрицы означает, что все ее элементы являются случайными комплекснозначными величинами, заданными на Ω; существование усреднения $\mathrm{M}(\mathbf{A}) \in B(E)$ означает суммируемость всех этих случайных величин, а само усреднение есть матрица, элементы которой есть математические ожидания соответствующих случайных величин.

Для дальнейшего исследования нам будет полезна

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– случайная матрица. Тогда*:

а) $\|\mathbf{A}\|$ *является случайной величиной*;

б) *существование* $\mathrm{M}(\mathbf{A}) \in B(E)$ *равносильно существованию* $\mathrm{M}\|\mathbf{A}\| \in [0;+\infty)$.

Доказательство. а) Поскольку пространство $B(E)$ конечномерно, то все нормы в нем эквивалентны (см. [12, с. 87, 102]), поэтому топология в нем, порожденная операторной нормой, совпадает со стандартной евклидовой топологией, если рассматривать $B(E)$ как $\mathbb{R}^{2d^2}$. Тогда отображение $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(E)$ измеримо как случайный $2d^2$-мерный вектор, а операторная норма непрерывна. Значит, функция $\|\mathbf{A}(\cdot)\|$ измерима как композиция непрерывного и измеримого отображений.

б) Из указанной в пункте а) эквивалентности норм следует, что операторная норма матрицы мажорируется сверху, например, суммой модулей всех элементов этой матрицы (с некоторой константой, не зависящей от матрицы). Но если все элементы случайной матрицы суммируемы, то и сумма их модулей суммируема, откуда следует суммируемость $\|\mathbf{A}\|$. Обратное следует из теоремы 2.

Рассмотрим случайную матричную экспоненту

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} t^k \quad \forall t \geq 0. \tag{4.1}$$

Из курса анализа известно, что матричный ряд в правой части равенства (4.1) сходится абсолютно при каждом $\omega \in \Omega$ равномерно на каждом отрезке вида $[0;T]$, $T > 0$, причем

$$\left\|e^{A_\omega t}\right\| \leq e^{\|A_\omega\| t} \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall t \geq 0.$$

Отсюда следует, что $e^{A_\omega t} \in C_s(\mathbb{R}_+, B(E))$ при каждом $\omega \in \Omega$. Кроме того, матричная экспонента обладает полугрупповым (и даже групповым) свойством:

$$e^{A_\omega (t+s)} = e^{A_\omega t} e^{A_\omega s} = e^{A_\omega s} e^{A_\omega t}, \quad e^{A_\omega \cdot 0} = I \quad \forall t \geq 0, \quad \forall s \geq 0.$$

Наконец, элементы матрицы $\mathbf{A}^k$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ представляют собой конечные суммы конечных произведений элементов матрицы $\mathbf{A}$, поэтому из измеримости $\mathbf{A}$ следует измеримость $\mathbf{A}^k$ и, следовательно, измеримость $e^{\mathbf{A}t}$ при каждом $t \geq 0$. Из всего сказанного выше следует, что $e^{\mathbf{A}t}$ является случайной полугруппой (группой) матриц, а генератором этой полугруппы является случайная матрица $\mathbf{A}$.

Изучим теперь усреднение и итерации случайной матричной экспоненты при некоторых различных предположениях относительно случайной матрицы $\mathbf{A}$.

1. Случай равномерно ограниченного генератора. Предположим сначала, что случайная матрица $\mathbf{A}$ равномерно ограничена, т.е. существует такое $r > 0$, что $\|A_\omega\| \leq r$ при всех $\omega \in \Omega$. Отметим, что равномерная ограниченность случайной матрицы равносильна ограниченности на Ω каждого ее элемента как случайной величины.

Теорема 8. *Пусть* $\|A_\omega\| \leq r$ *для некоторой константы* $r > 0$ *при всех* $\omega \in \Omega$. *Тогда*:

а) для каждого $k \in \mathbb{N}$ *существует* $\mathrm{M}(\mathbf{A}^k) \in B(E)$, *причем* $\left\|\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)\right\| \leq r^k$;

б) существует $\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t}) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(E))$, причем

$$\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)}{k!} t^k, \quad \left\|\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})\right\| \leq e^{rt};$$

в) функция $\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $e^{\mathrm{M}(\mathbf{A})t}$;

г) если $\mathrm{M}(\mathbf{A}) = 0$, *то функция* $\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}\sqrt{t}})$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $e^{\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)t}$.

Доказательство. Пункт а) следует из теоремы 2, поскольку $\left\|A_\omega^k\right\| \leq \|A_\omega\|^k \leq r^k < \infty$.

Существование $\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})$ при каждом $t \geq 0$ и оценка его нормы в пункте б) также следуют из теоремы 2, поскольку $\left\|e^{A_\omega t}\right\| \leq e^{\|A_\omega\| t} \leq e^{rt} < \infty$. Для доказательства представления $\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})$ в виде ряда заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left|\left\langle A_\omega^k u, v\right\rangle\right| \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(rt)^k}{k!} \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \|v\|_{\mathcal{H}} e^{rt} < \infty \quad \forall \omega \in \Omega, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall u \in \mathcal{H}, \quad \forall v \in \mathcal{H}.$$

Тогда по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$\mathrm{M}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\langle\mathbf{A}^k u,v\rangle\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathrm{M}\langle\mathbf{A}^k u,v\rangle\quad\forall t\ge 0,\quad\forall u\in\mathcal{H},\quad\forall v\in\mathcal{H}.$$

Пользуясь теперь определением усреднения и непрерывностью скалярного произведения, получаем следующую цепочку равенств:

$$\left\langle\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})u,v\right\rangle=\mathrm{M}\left\langle e^{\mathbf{A}t}u,v\right\rangle=\mathrm{M}\left\langle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathbf{A}^k u}{k!}t^k,v\right\rangle=\mathrm{M}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left\langle\mathbf{A}^k u,v\right\rangle\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\mathrm{M}\left\langle\mathbf{A}^k u,v\right\rangle=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left\langle\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)u,v\right\rangle=\left\langle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)u}{k!}t^k,v\right\rangle\quad\forall t\ge 0,\quad\forall u\in\mathcal{H},\quad\forall v\in\mathcal{H},$$

откуда в силу единственности усреднения следует, что

$$\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)}{k!}t^k\quad\forall t\ge 0.$$

Полученное представление позволяет также легко обосновать непрерывность $\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})$:

$$\left\|\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})-\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t_0})\right\|=\left\|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)}{k!}(t^k-t_0^k)\right\|\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}\left|t^k-t_0^k\right|=\left|e^{rt}-e^{rt_0}\right|\xrightarrow{t\to t_0}0,$$

где последнее равенство справедливо для неотрицательных t и t_0. Итак, $\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})\in C_s(\mathbb{R}_+,B(E))$.

Для удобства записи дальнейших выкладок обозначим $F(t)=\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}t})$. Заметим, что

$$\left\|\frac{F(t)-I}{t}-\mathrm{M}(\mathbf{A})\right\|=\left\|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)}{k!}t^{k-1}\right\|\le\frac{1}{t}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(rt)^k}{k!}=\frac{e^{rt}-1-rt}{t}\xrightarrow{t\to 0+}0,$$

т.е. $F'(0)=\mathrm{M}(\mathbf{A})$. Тогда по теореме 3 $F(t)$ эквивалентна по Чернову полугруппе $e^{\mathrm{M}(\mathbf{A})t}$.

Пусть теперь $\mathrm{M}(\mathbf{A})=0$. Тогда

$$\left\|\frac{F(\sqrt{t})-I}{t}-\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)\right\|=\left\|\sum_{k=3}^{\infty}\frac{\mathrm{M}(\mathbf{A}^k)}{k!}t^{\frac{k}{2}-1}\right\|\le\frac{1}{t}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{(r\sqrt{t})^k}{k!}=$$

$$=\frac{e^{r\sqrt{t}}-1-r\sqrt{t}-\frac{1}{2}r^2t}{t}=\frac{r^3\sqrt{t}}{6}e^{r\sqrt{t}\theta(t)}\xrightarrow{t\to 0+}0,\quad 0<\theta(t)<1,$$

т.е. $(F(\sqrt{t}))'\big|_{t=0}=\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)$, откуда по теореме 3 $F(\sqrt{t})$ эквивалентна по Чернову полугруппе $e^{\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)}$.

2. Случай самосопряженного генератора. Предположим теперь, что $\mathbf{A}=i\mathbf{H}$, где матрица $\mathbf{H}(\omega)=H_\omega$ является самосопряженной (эрмитовой) при каждом $\omega\in\Omega$ (при этом будем говорить, что $\mathbf{H}$ является случайной самосопряженной (эрмитовой) матрицей), но не обязательно равномерно ограниченной. Прежде чем перейти к исследованию этого случая, необходимо напомнить некоторые свойства эрмитовых матриц.

Для всякой эрмитовой матрицы H_ω существует такая унитарная матрица U_ω, что

$$H_\omega=U_\omega D_\omega U_\omega^*,\quad D_\omega=\mathrm{diag}\{\lambda_\omega^{(1)},\ldots,\lambda_\omega^{(d)}\},\tag{4.2}$$

где $\lambda_\omega^{(1)},\ldots,\lambda_\omega^{(d)}$ – вещественные собственные числа матрицы H_ω. При этом

$$\|H_\omega\|=\|D_\omega\|=\max_{1\le j\le d}\left|\lambda_\omega^{(j)}\right|.\tag{4.3}$$

Из (4.2) и (4.3) следует, что

$$H_\omega^k=U_\omega D_\omega^k U_\omega^*,\quad D_\omega^k=\mathrm{diag}\{(\lambda_\omega^{(1)})^k,\ldots,(\lambda_\omega^{(d)})^k\},\quad\left\|H_\omega^k\right\|=\left\|D_\omega^k\right\|=\max_{1\le j\le d}\left|\lambda_\omega^{(j)}\right|^k\quad\forall k\in\mathbb{N},$$

а также

$$e^{iH_\omega t} = U_\omega e^{iD_\omega t} U_\omega^*, \quad e^{iD_\omega t} = \mathrm{diag}\{e^{i\lambda_\omega^{(1)} t}, \ldots, e^{i\lambda_\omega^{(d)} t}\}, \quad \left\| e^{iH_\omega t} \right\| = 1 \quad \forall t \ge 0.$$

Теорема 9. *Пусть* $\mathbf{H}$ *— случайная самосопряженная (эрмитова) матрица. Тогда:*

а) если существует $\mathrm{M}(\mathbf{H}) \in B(E)$, *то существует* $\mathrm{M}(e^{i\mathbf{H}t}) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(E))$;

б) если существует $\mathrm{M}(\mathbf{H}^2) \in B(E)$, *то существует и* $\mathrm{M}(\mathbf{H}) \in B(E)$, *а функция* $\mathrm{M}(e^{i\mathbf{H}t})$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $e^{i\mathrm{M}(\mathbf{H})t}$;

в) если существует $\mathrm{M}(\mathbf{H}^3) \in B(E)$, *то существует и* $\mathrm{M}(\mathbf{H}^2) \in B(E)$, *причем если* $\mathrm{M}(\mathbf{H}) = 0$, *то функция* $\mathrm{M}(e^{i\mathbf{H}\sqrt{t}})$ *эквивалентна по Чернову полугруппе* $e^{-\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{H}^2)t}$.

Доказательство. I. Для удобства записи обозначим $F(t) = \mathrm{M}(e^{i\mathbf{H}t})$. Поскольку $\left\| e^{iH_\omega t} \right\| = 1$, то из теоремы 2 следует существование $F(t)$ при каждом $t \ge 0$, причем $\|F(t)\| \le 1$. Далее,

$$\begin{gathered} \left\| e^{iH_\omega t} - e^{iH_\omega t_0} \right\| = \left\| e^{iH_\omega (t - t_0)} - I \right\| = \left\| e^{iD_\omega (t - t_0)} - I \right\| = \\ = \max_{1 \le j \le d} \left| e^{i\lambda_\omega^{(j)}(t - t_0)} - 1 \right| \le |t - t_0| \max_{1 \le j \le d} \left| \lambda_\omega^{(j)} \right| = |t - t_0| \cdot \|H_\omega\|. \end{gathered} \tag{4.4}$$

По лемме 2 из существования $\mathrm{M}(\mathbf{H})$ следует суммируемость $\|\mathbf{H}\|$. Тогда из оценки (4.4) по теореме 2 следует, что

$$\|F(t) - F(t_0)\| \le \mathrm{M}\|\mathbf{H}\| \cdot |t - t_0| \xrightarrow{t \to t_0} 0,$$

откуда и получаем, что $F(t) \in C_s(\mathbb{R}_+, B(E))$.

II. Заметим, что

$$\|H_\omega\| = \max_{1 \le j \le d} \left| \lambda_\omega^{(j)} \right| \le \max_{1 \le j \le d} \left| \lambda_\omega^{(j)} \right|^2 + 1 = \left\| H_\omega^2 \right\| + 1. \tag{4.5}$$

По лемме 2 из существования $\mathrm{M}(\mathbf{H}^2)$ следует суммируемость $\left\| \mathbf{H}^2 \right\|$. Тогда из оценки (4.5) следует суммируемость $\|\mathbf{H}\|$, откуда по лемме 2 следует существование $\mathrm{M}(\mathbf{H})$. Далее,

$$\left\| e^{iH_\omega t} - I - iH_\omega t \right\| = \left\| e^{iD_\omega t} - I - iD_\omega t \right\| = \max_{1 \le j \le d} \left| e^{i\lambda_\omega^{(j)} t} - 1 - i\lambda_\omega^{(j)} t \right| \le \frac{t^2}{2} \max_{1 \le j \le d} \left| \lambda_\omega^{(j)} \right|^2 = \frac{t^2}{2} \left\| H_\omega^2 \right\|.$$

Тогда из теоремы 2 (с учетом линейности усреднения и существования $\mathrm{M}(\mathbf{H})$) получаем:

$$\left\| \frac{F(t) - I}{t} - i\mathrm{M}(\mathbf{H}) \right\| \le \frac{t}{2} \mathrm{M} \left\| \mathbf{H}^2 \right\| \xrightarrow{t \to 0+} 0,$$

т.е. $F'(0) = i\mathrm{M}(\mathbf{H})$. Тогда по теореме 3 $F(t)$ эквивалентна по Чернову полугруппе $e^{i\mathrm{M}(\mathbf{H})t}$.

III. Аналогично пункту II доказывается, что из существования $\mathrm{M}(\mathbf{H}^3)$ следуют суммируемость $\|\mathbf{H}^3\|$ и существование $\mathrm{M}(\mathbf{H}^2)$ (а, значит, и существование $\mathrm{M}(\mathbf{H})$). Оценка проводится также аналогично:

$$\begin{gathered} \left\| e^{iH_\omega t} - I - iH_\omega t + \frac{1}{2} H_\omega^2 t^2 \right\| = \left\| e^{iD_\omega t} - I - iD_\omega t + \frac{1}{2} D_\omega^2 t^2 \right\| = \\ = \max_{1 \le j \le d} \left| e^{i\lambda_\omega^{(j)} t} - 1 - i\lambda_\omega^{(j)} t + \frac{1}{2} (\lambda_\omega^{(j)})^2 t^2 \right| \le \frac{t^3}{6} \max_{1 \le j \le d} \left| \lambda_\omega^{(j)} \right|^3 = \frac{t^3}{6} \left\| H_\omega^3 \right\|. \end{gathered}$$

Тогда из теоремы 2 (учитывая линейность усреднения, существование $\mathrm{M}(\mathbf{H}^2)$ и $\mathrm{M}(\mathbf{H}) = 0$) получаем

$$\left\| \frac{F(\sqrt{t}) - I}{t} + \frac{1}{2} \mathrm{M}(\mathbf{H}^2) \right\| \le \frac{\sqrt{t}}{6} \mathrm{M} \left\| \mathbf{H}^3 \right\| \xrightarrow{t \to 0+} 0,$$

т.е. $(F(\sqrt{t}))'\big|_{t=0} = -\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{H}^2)$, откуда по теореме 3 получаем эквивалентность $F(\sqrt{t})$ по Чернову полугруппе $e^{-\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{H}^2)t}$.

Для целей следующего раздела полезно отметить, что аналогичный результат переносится и на случай кососимметрической матрицы $\mathbf{A}$, действующей на пространстве $\mathbb{R}^d$, поскольку при этом матрица $\mathbf{H} = -i\mathbf{A}$ также будет эрмитовой.

Определение 4. Случайные операторы $\{\mathbf{A}_n\}$, как измеримые отображения вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ в топологическое пространство X, называются *независимыми в совокупности*, если для всякого m и для всякого конечного набора борелевских множеств $B_1, \ldots, B_m$ пространства X выполняется равенство:

$$\mu(\mathbf{A}_1 \in B_1, \ldots, \mathbf{A}_m \in B_m) = \mu(\mathbf{A}_1 \in B_1) \ldots \mu(\mathbf{A}_m \in B_m).$$

Замечание 4. Для случайных матриц введенное в определении 4 понятие независимости эквивалентно следующему: если из каждой случайной матрицы произвольного конечного набора выбрать произвольно по одной компоненте, то выбранные случайные величины будут независимы в совокупности. Учитывая, что элементы произведения случайных матриц являются конечными суммами конечных произведений случайных величин, причем в каждом произведении все случайные величины берутся из разных матриц, а усреднение случайных матриц сводится к нахождению математических ожиданий их компонент, то отсюда непосредственно следует, что математическое ожидание произведения независимых случайных матриц равно произведению усреднений этих матриц. В частности, если случайные матрицы независимы и одинаково распределены, то усреднение произведения n таких матриц совпадает с n-й степенью усреднения любой из этих матриц. Таким образом, даже если такие случайные матрицы принимали не коммутирующие значения, их усреднения будут совпадать и, следовательно, коммутировать.

Пусть $\mathbf{A}_n$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных матриц. Рассмотрим последовательность композиций (произведений) случайных матричных экспонент

$$\mathbf{S}_n(t) = e^{\mathbf{A}_n \frac{t}{n}} \cdot \ldots \cdot e^{\mathbf{A}_1 \frac{t}{n}}, \quad \mathbf{T}_n(t) = e^{\mathbf{A}_n \sqrt{\frac{t}{n}}} \cdot \ldots \cdot e^{\mathbf{A}_1 \sqrt{\frac{t}{n}}}.$$

Тогда получим

$$\mathrm{M}(\mathbf{S}_n)(t) = \left(\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}_1 \frac{t}{n}})\right)^n, \quad \mathrm{M}(\mathbf{T}_n)(t) = \left(\mathrm{M}(e^{\mathbf{A}_1 \sqrt{\frac{t}{n}}})\right)^n.$$

В частности, в рамках условий теорем 8 и 9 на $\mathbf{A}_1$ $\mathrm{M}(\mathbf{S}_n)(t)$ сходится к $e^{\mathrm{M}(\mathbf{A}_1)t}$ в $C_s(\mathbb{R}_+, B(E))$, а $\mathrm{M}(\mathbf{T}_n)(t)$ сходится к $e^{\frac{1}{2}\mathrm{M}(\mathbf{A}_1^2)t}$ в $C_s(\mathbb{R}_+, B(E))$.

Для последовательности композиций $\{\mathbf{S}_n(\cdot)\}$ случайных матричных экспонент справедлив следующий аналог закона больших чисел, характеризующий стремление к нулю вероятности оклонения композиции $\mathbf{S}_n$ от своего математического ожидания при $n \to \infty$ (см. [5]).

Определение 5. Пусть $\{\mathbf{U}_n(t), t \geq 0\}$ – последовательность независимых случайных полугрупп. Тогда если

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{\sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(\mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right) - \mathrm{M}\left[\mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \circ \ldots \circ \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right)\right]\right) x \right\|_H > \epsilon\right\}\right) = 0 \tag{4.6}$$

при любых $T > 0$, $x \in \mathcal{H}$ и $\epsilon > 0$, то говорят, что последовательность $\{U_n(t), t \geq 0\}$ *удовлетворяет закону больших чисел* в сильной операторной топологии равномерно на каждом отрезке полуоси $\mathbb{R}_+$.

Теорема 10 (см. [11]). *Пусть* $\mathbf{H}$ – случайная самосопряженная матрица, принимающая значения в некотором шаре банахова пространства $B(E)$. Тогда если $\{\mathbf{U}_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных полугрупп, распределение каждой из которых совпадает с распределением случайной полугруппы $e^{it\mathbf{H}}, t \geq 0$, то для последовательности композиций

$$\mathbf{S}_n(t) = \mathbf{U}_n\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \mathbf{U}_1\left(\frac{t}{n}\right), \quad t \geq 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

выполняется закон больших чисел в сильной операторной топологии равномерно на каждом отрезке.

5. ПОЛУГРУППА, ПОРОЖДАЕМАЯ СЛУЧАЙНЫМИ ОРТОГОНАЛЬНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

В этом разделе исследуются аналоги уравнения Колмогорова, порождаемые случайными ортогональными преобразованиями евклидова пространства.

Пусть $E = \mathbb{R}^d$ – конечномерное евклидово пространство. Пусть $U \in B(E)$ – ортогональный оператор в пространстве E. Тогда оператор $\hat{S}_U$, определенный на пространстве $\mathcal{H}$ равенством $\hat{S}_U u(x) = u(Ux)$, $x \in E$, при любом $u \in \mathcal{H}$, является унитарным оператором в пространстве $\mathcal{H}$. Поскольку ортогональное преобразование U сохраняет меру Лебега на $\mathbb{R}^d$, то для любого $u \in L_2(\mathbb{R}^d)$ выполняется условие $u \circ U \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть D – область в пространстве $\mathbb{R}^d$, являющаяся шаровым слоем $D = \{x \in \mathbb{R}^d : r_1 < |x| < r_2\}$ при некоторых $0 < r_1 < r_2 < +\infty$. Обозначим через K гильбертово пространство $L_2(D)$ и через $W_{2,0}^1(D)$ гильбертово пространство Соболева функций из пространства $W_2^1(D)$, обращающихся в нуль на границе области D.

Поскольку всякую функцию $u \in W_{2,0}^1(D)$ можно продолжить нулем на пространство $\mathbb{R}^d$ и при этом продолжение является элементом пространства $W_2^1(\mathbb{R}^d)$ (см. [14]), то пространство $W_{2,0}^1(D)$ можно рассматривать как подпространство пространства $W_{2,0}^1(\mathbb{R}^d)$.

Лемма 3. *Подпространство $W_{2,0}^1(D)$ пространства $L_2(\mathbb{R}^d)$ является инвариантным относительно любого ортогонального преобразования $\hat{S}_U$.*

Доказательство. Пусть $u \in W_{2,0}^1(D)$. Поскольку множество D инвариантно относительно ортогонального преобразования U пространства E, то носитель функции $\hat{S}_U u = u \circ U$ лежит в замкнутой области $\bar{D}$. Тогда выполняется включение $u \circ U \in W_{2,0}^1(D)$.

Следствие 1. Пусть $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(E)$ – случайная величина со значениями в множестве кососимметрических (кососамосопряженных) операторов в пространстве E. Тогда $U(t)u = \int_\Omega u \circ e^{\sqrt{t}A_\omega} d\mu(\omega) \in W_{2,0}^1(D)$ для любого $u \in W_{2,0}^1(D)$.

Пусть $\mathbf{U}$ – случайный ортогональный оператор в пространстве E. Тогда $\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{U}$ – случайное унитарное преобразование пространства $\mathcal{H}$. Математическое ожидание случайного оператора $\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{U}$ определяется равенством $\mathrm{M}(\hat{\mathbf{S}}_\mathbf{U}) = \int_\Omega \hat{S}_{\mathbf{U}(\omega)} d\mu(\omega)$.

Пусть $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – стандартный ортонормированный базис евклидова пространства $E = \mathbb{R}^d$, $x_j = (e_j, x)$, $x \in E$, $j \in \overline{1,n}$ и $\dfrac{\partial}{\partial_j}$ – оператор дифференцирования по направлению базисного вектора e_j; пусть матричными элементами случайного оператора $\mathbf{A}$ являются случайные величины $\mathbf{A}_{lj} = (\mathbf{A}e_l, e_j)$, $j, l \in \overline{1,n}$.

Лемма 4. *Пусть отображение* $\mathbf{U}\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to B(E)$ *имеет вид* $\exp(\sqrt{t}\mathbf{A}(\omega))$, $t \geq 0$, *где* $\mathbf{A}\colon \Omega \to B(E)$ – *случайный линейный оператор, принимающий значения в шаре радиуса* $\rho \in (0, +\infty)$ *пространства* $B(E)$, *для которого выполняются следующие условия*:

1) $\mathrm{M}(\mathbf{A}) = \int_\Omega \mathbf{A}(\omega) d\mu(\omega) = 0$;

2) $\mathrm{M}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = \int_\Omega (\mathbf{A}(\omega))^* \mathbf{A}(\omega) d\mu(\omega) = \mathbf{D}$;

3) $\mathrm{M}(\mathbf{A}_{ij}\mathbf{A}_{kl}) = \int_\Omega \mathbf{A}_{ij}(\omega)\mathbf{A}_{kl}(\omega) d\mu(\omega) = \beta_{ijkl} \in \mathbb{R}$ *при всех* $i, j, k, l \in \overline{1,d}$.

Тогда для любого $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{M}u(\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})x) = u(x) + \frac{1}{2}t(\nabla u(x), \mathrm{M}(\mathbf{A}^2)x) + \frac{1}{2}t\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l}\mathrm{M}(\mathbf{A}_{ki}\mathbf{A}_{lj})x_i x_j + r(t),$$

где остаток $r(t)$ *допускает оценку* $\|r(t)\|_H \le Ct^{3/2}\exp\left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\rho\right)$.

Доказательство. Действительно, поскольку $\exp(\sqrt{t}\mathbf{A}) = \mathbf{I} + \sqrt{t}\mathbf{A} + \frac{1}{2}t\mathbf{A}^2 + \alpha(t)$, где $\|\alpha(t)\|_{B(E)} = o(t)$ при $t \to 0$, то согласно формуле Тейлора для функции $u(\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})x)$ имеем

$$\mathrm{M}u(\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})x) = \mathrm{M}\left[u\left(\left(\mathbf{I} + \sqrt{t}\mathbf{A} + \frac{1}{2}t\mathbf{A}^2 + \alpha(t)\right)x\right)\right] =$$

$$= \mathrm{M}\left[u(x) + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\left(\sqrt{t}\mathbf{A}_{jk}x_k + \frac{t}{2}\mathbf{A}_{jl}\mathbf{A}_{lk}x_k + o(t)\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l}(t\mathbf{A}_{ki}x_i\mathbf{A}_{lj}x_j + o(t)) + o(t)\right].$$

Поэтому в силу предположений 1)–3) о случайном операторе $\mathbf{A}$ справедливо равенство

$$\mathrm{M}u(\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})x) = u(x) + \frac{1}{2}t(\nabla u(x), \mathrm{M}(\mathbf{A}^2)x) + \frac{1}{2}t\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_k \partial x_l}\mathrm{M}(\mathbf{A}_{ki}\mathbf{A}_{lj})x_i x_j + o(t) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Оценим L_2-норму остаточного члена в формуле Тейлора. Поскольку $u \in C_0^\infty(R^d)$, то существует постоянная $c > 0$, ограничивающая сверху абсолютное значение функции u и всех ее частных производных не выше третьего порядка. Кроме того, носитель функции u заключен в шаре некоторого радиуса r_0 пространства E, поэтому носитель функции $u \circ \exp(\sqrt{t}\mathbf{A})$ заключен в шаре радиуса $r_t = r_0\exp(\sqrt{t}\rho)$. Из представления остаточного члена формулы Тейлора в форме Лагранжа следует, что квадрат его L_2-нормы не превосходит произведения меры Лебега носителя на квадрат супремума по носителю дифференциала третьего порядка, откуда следует оценка остаточного члена из утверждения леммы.

Предположим, что случайный оператор $\mathbf{A}$ в условиях леммы 4 является кососамосопряженным $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$. Тогда при каждом $t > 0$ случайное преобразование $\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})$ пространства E является ортогональным, а область D является инвариантной относительно любого значения случайного преобразования $\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})$. Кроме того, пространство $W_{2,0}^1(D)$ инвариантно относительно случайных преобразований $\hat{\mathbf{S}}_{\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})}$, $t \ge 0$ в силу леммы 3.

По произвольному случайному кососимметрическому оператору $\mathbf{A}$ в пространстве E, удовлетворяющему условиям леммы 4, зададим на пространстве $W_{2,0}^1(D)$ билинейную форму $\beta(u,v) = \int_D \beta_{ijkl}x_i x_j \partial_{x_k}u\partial_{x_l}v dx$, $u, v \in W_{2,0}^1(D)$.

Лемма 5. *Пусть случайный кососимметрический оператор* $\mathbf{A}$ *в пространстве* E *удовлетворяет условиям леммы* 4 *и условиям*

1) $B = \mathrm{M}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) \in B(E)$,

2) *Для любого единичного вектора* $e \in E$ *выполняется условие* $\inf\limits_{\|f\|=1}\int_\Omega |(\mathbf{A}(\omega)e, f)|^2 \ge \gamma$ *при некотором* $\gamma > 0$.

Тогда соответствующая полуторалинейная форма β *является положительно-определенной и мажорирует квадратичную форму* $u \to \|u\|^2_{W_2^1(D)}$.

Доказательство. Для любых $u, v \in W_{2,0}^1(D)$ выполняется

$$\beta(u,v) = \int\limits_D\int\limits_\Omega \mathbf{A}_{ki}\mathbf{A}_{lj}d\mu(\omega)x_i x_j\partial_{x_k}u\partial_{x_l}v dx = \int\limits_D\int\limits_\Omega (x, \mathbf{A}\nabla u)^2 d\mu(\omega)dx \ge 0.$$

Заметим, что

$$\int\limits_D\int\limits_\Omega (x, \mathbf{A}\nabla u)^2 d\mu(\omega)dx \ge r_1^2\int\limits_D\int\limits_\Omega (\mathbf{A}^* e_x, \nabla u)^2 d\mu(\omega)dx,$$

где $e_x = \frac{1}{\|x\|}x$. Поэтому в силу условия 2) выполнена оценка

$$\int_D \int_\Omega (x, \mathbf{A}\nabla u)^2 d\mu(\omega)dx \geq r_1^2\gamma \int_D \|\nabla u(x)\|^2 dx.$$

Поскольку для ограниченной области $D \in R^d$ оценка $\|u\|_{L_2(D)} \leq c\int_D \|\nabla u(x)\|^2 dx$ имеет место для любой функции $u \in W_{2,0}^1(D)$ с не зависящей от выбора функции константой $c > 0$, то полуторалинейная форма β мажорирует квадратичную форму $u \to \|u\|^2_{W_2^1(D)}$.

Определим линейный оператор $\hat{L}$ в пространстве $L_2(D)$, заданный (соответствующей) неположительной полуторалинейной формой $\beta(u, v) = \int_D \beta_{ijkl} x_i x_j \partial_{x_k} u \partial_{x_l} v dx$ на линейном пространстве $W_{2,0}^1(D)$. Поскольку полуторалинейная форма β является неположительной, то соответствующий ей оператор $\hat{L}$ является самосопряженным и является генератором сжимающей полугруппы в пространстве $L_2(D)$.

Квадратичная форма оператора $\hat{L}$ мажорирует квадратичную форму оператора $\hat{K}$, задаваемого на пространстве $W_{2,0}^1(D)$ равенством $\hat{K}u = -(x, B\nabla u)_{R^d}$, где $B = \mathrm{M}(\mathbf{A}^*\mathbf{A}) = -\mathrm{M}(\mathbf{A}^2)$. Действительно, для любого $v \in W_{2,0}^1(D)$ справедлива цепочка неравенств

$$\left|(\hat{K}v, v)\right| = \left|((x, B\nabla v)_{\mathbb{R}^d}, v)\right| \leq r_2 \|B\|_{B(E)} (|\nabla v|, v) \leq r_2^2 \|B\| \|\nabla v\|_{L_2(D)} \|v\|_{L_2(D)} \leq \frac{r_2^2 \|B\|}{r_1^2 \gamma} \beta(u, u).$$

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2). *Тогда задача Коши*

$$\frac{d}{dt}u(t) = \hat{H}u(t), \quad t > 0; \tag{5.1}$$

$$u(+0) = u_0, \tag{5.2}$$

где оператор $\hat{H}$ задан на области определения оператора $\hat{L}$ дифференциальным выражением

$$\hat{H}u = \mathrm{M}(\mathbf{A}_{jl}\mathbf{A}_{lk})x_k \partial_j u + \mathrm{M}(\mathbf{A}_{ki}\mathbf{A}_{lj})x_i x_j \partial_l \partial_k u,$$

имеет единственное решение $u \in C(\mathbb{R}_+, L_2(D))$ при произвольном $u_0 \in L_2(D)$.

Доказательство. Самосопряженный неположительный оператор $\hat{L}$ является генератором сжимающей полугруппы в пространстве $L_2(D)$. Поскольку $\hat{H} = \hat{L} + \hat{K}$ и квадратичная форма оператора $\hat{L}$ мажорирует квадратичную форму оператора $\hat{K}$, то применима теорема о возмущении генератора полугруппы (см. [15]). Следовательно, оператор $\hat{H}$ является генератором сжимающей полугруппы в пространстве $L_2(D)$, откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 11. *Пусть отображение* $\mathbf{U}$: $R_+ \times \Omega \to B(E)$ *имеет вид* $\exp(\sqrt{t}\mathbf{A}(\omega))$, $t \geq 0$, *где* $\mathbf{A}$: $\Omega \to B(E)$ – *случайный кососортогональный* (*кососамосопряженный*) ($\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$) *линейный оператор, для которого выполняются условия лемм* 4 *и* 5.

Тогда если $u \in L_2(D)$, то последовательность функций $\{v_n\}$: $\mathbb{N} \to C(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$, *определяемых равенствами* $v_n(t, x) = \mathrm{M}u\left(\exp\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{A}_n\right)\ldots\exp\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{A}_1\right)x\right)$, $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E$, $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|v_n(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_K = 0,$$

при любых $T > 0$. Здесь функция v является решением начально-краевой задачи (5.1), (5.2).

Доказательство. Из лемм 3 и 6 следует, что оператор-функция $\hat{F}(t)$, $t \geq 0$, действующая в пространстве $L_2(D)$ по правилу

$$\hat{F}(t)u(x) = \mathrm{M}(u(\exp(\sqrt{t}\mathbf{A})x)), \quad x \in E,$$

при каждом $t \geq 0$, удовлетворяет всем условиям теоремы 3 и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \left\| \left(\hat{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u - \exp(t\hat{H})u \right\|_{L_2(D)} = 0 \tag{5.3}$$

при любых $T > 0$ и $u \in L_2(D)$. Остается заметить, что в силу независимости случайных преобразований

$$\exp\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{A}_1\right), \ \ldots, \ \exp\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{A}_n\right),$$

согласно теореме Фубини (см. [16, с. 408]) при всех $t \geq 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathrm{M}\left(u\left(\exp\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{A}_n\right)\ldots\exp\left(\sqrt{\frac{t}{n}}\mathbf{A}_1\right)x\right)\right) = \left(\hat{F}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n u(x), \quad x \in E,$$

что в соответствии с (5.3) и доказывает утверждение теоремы 11.

Работа авторов над статьей связана с лабораторией бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, руководителем которой является О.Г. Смолянов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арефьева И.Я., Волович И.В.* Квазисредние в моделях случайных матриц // Математическая физика и приложения, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН. 2019. 306. С. 7–15.

2. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. 2016. Т. 80. № 6. С. 141–172.

3. *Волович И.В., Сакбаев В.Ж.* О квантовой динамике на C^*-алгебрах // Комплексный анализ, математическая физика и приложения, Сборник статей, Тр. МИАН. 301. МАИК Наука/Интерпериодика, М., 2018. С. 33–47.

4. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Рандомизированная гамильтонова механика // Докл. АН. 2019. Т. 486. № 6. С. 635–658.

5. *Sakbaev V.Zh.* Averaging of random flows of linear and nonlinear maps // IOP. Journal of Physics. Confer. Series. 2018. V. 990. P. 012012.

6. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. М.: Физматлит, 1963.

7. *Лиггетт Т.* Марковские процессы с локальным взаимодействием. М.: Мир. 1989.

8. *Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г., Шамаров Н.Н.* Негауссовские лагранжевы формулы Фейнмана // Доклады РАН. 2014. Т. 457. № 1. С. 28–31.

9. *Orlov Yu.N., Sakbaev V.Zh., Zavadskii D.V.* Operator random walks and quantum oscilator // Lobachevkii J. Math. 2020. V. 41. № 4. P. 676–685.

10. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

11. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* Формулы Фейнмана и закон больших чисел для случайных однопараметрических полугрупп // Математическая физика и приложения, Сборник статей. К 95-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН. 2019. Т. 306. С. 210–226.

12. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.

13. *Chernoff P.* Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 2. № 2. P. 238–242.

14. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

15. *Слободецкий Л.Н.* Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена. 1958. Т. 197. С. 54–112.

16. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Физматлит, 1986.