
**УРАВНЕНИЯ
В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**

УДК 519.85

**БИГАРМОНИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА С ПРЕПЯТСТВИЕМ:
ГАРАНТИРОВАННЫЕ И ВЫЧИСЛЯЕМЫЕ ОЦЕНКИ ОШИБОК
ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ¹⁾**

© 2020 г. Д. Е. Апушкинская^{1,2,*}, С. И. Репин^{3,4,**}

¹ 66041 Saarbrücken, P.O. Box 151150, Saarland University, Germany

² 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

³ 191023 Санкт-Петербург, Фонтанка 27, ПОМИ РАН, Россия

⁴ 40014 Jyväskylä, P.O. Box 35 (Agora), University of Jyväskylä, Finland

*e-mail: darya@math.uni-sb.de

**e-mail: repin@pdm.ras.ru

Поступила в редакцию 17.06.2020 г.
Переработанный вариант 17.06.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2020 г.

В статье рассматривается эллиптическое вариационное неравенство, возникающее в задаче с препятствием для бигармонического оператора. Изучаются оценки разности между точным решением (минимайзером) соответствующей вариационной задачи и произвольной функцией из энергетического класса, которая удовлетворяет поставленным краевым условиям и ограничениям, связанным с препятствием. Используя общую теорию, построенную для выпуклых вариационных задач, получено тождество, одна часть которого характеризует величину отклонения функции (аппроксимации) от точного решения, а другая является вычисляемой величиной (она зависит только от данных задачи и известных функций). Использование этого тождества в практических вычислениях позволяет оценить качество полученных приближенных решений. Используемая в тождестве мера отклонения от точного решения содержит различные слагаемые. Два из них задаются нормами разности между точными решениями прямой и двойственной вариационных задач и их аппроксимациями соответственно. Два других, вообще говоря, не представимы в виде норм и являются нелинейными мерами, которые обращаются в ноль, если коинцидентное множество, построенное по приближенному решению, удовлетворяет некоторым условиям (например совпадает с точным коинцидентным множеством). Тождество верно для любых допустимых (конформных) аппроксимаций прямой переменной, но содержит некоторые ограничения на двойственную переменную. В статье показано, что эти ограничения могут быть сняты, но при этом тождество заменяется на неравенство. Последнее дает явно вычисляемую мажоранту величины отклонения от точного решения данной нелинейной задачи для любых аппроксимаций прямой и двойственной вариационных задач. Приводится ряд примеров, которые иллюстрируют установленные тождества и неравенства. Библ. 29. Фиг. 5. Табл. 3.

Ключевые слова: вариационные неравенства, оценки отклонения от точного решения, апостериорные оценки.

DOI: 10.31857/S0044466920110034

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве \mathbb{R}^d с липшицевой границей $\partial\Omega$ и единичной внешней нормалью ν , а φ — заданная функция (препятствие) в $C^2(\bar{\Omega})$ такая, что $\varphi \leq 0$ на $\partial\Omega$. Далее будем использовать стандартные обозначения для функциональных пространств Лебега и Соболева. Через g_{\oplus} обозначим $\max\{g, 0\}$.

¹⁾ Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке German Research Foundation (номер проекта AP 252/3-1) и Программы РУДН “5-100”.

Рассматривается вариационная задача (\mathcal{P}): минимизировать функционал

$$J(v) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\Delta v|^2 - f v \right) dx \quad (1.1)$$

на замкнутом выпуклом множестве

$$\mathbb{K} = \left\{ v \in H^2(\Omega) \mid v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, v \geq \varphi \text{ п.в. в } \Omega \right\}.$$

При этом предполагается, что $f \in L^2(\Omega)$, а заданное препятствие φ удовлетворяет условиям $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ и $\varphi \leq 0$ на $\partial\Omega$.

Задача (\mathcal{P}) называется *задачей с препятствием для бигармонического оператора*. Она имеет множество приложений в теории упругости (равновесный контакт без трения упругих пластин или балок над жестким препятствием) и в механике жидкостей (течение несжимаемой жидкости с малым числом Рейнольдса на плоскости). Стандартным образом (см., например, [1], [2]) мы получаем, что задача (\mathcal{P}) имеет единственное решение u , которое удовлетворяет п.в. в Ω соотношениям:

$$\Delta^2 u \geq f, \quad u \geq \varphi, \quad (\Delta^2 u - f)(u - \varphi) = 0. \quad (1.2)$$

В частности, из известных работ [3] и [4] вытекает следующая априорная гладкость решения:

$$u \in H_{\text{loc}}^3(\Omega) \cap W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\Omega) \quad \text{и} \quad \Delta u \in W_{\text{loc}}^{2,\infty}(\Omega). \quad (1.3)$$

В общем случае область Ω разделяется на две подобласти Ω_0 и Ω_φ , где решение u обладает различными свойствами. В Ω_0 выполняется уравнение $\Delta^2 u = f$, а в Ω_φ решение u совпадает с препятствием (это множество принято называть коинцидентным). Граница между множествами заранее неизвестна, поэтому задача \mathcal{P} относится к классу задач со свободными границами.

Задача с препятствием для бигармонического оператора активно изучалась различными авторами, начиная с пионерских работ Ландау и Лифшица [5], Фрезе [4], [6], Чиматти [7], Стампакки [8], Брезиса и Стампакки [8]. Упомянем также известные монографии Дуво и Лионса [10] и Родригеса [11], где приведены примеры изгибающихся пластин, расположенных над препятствиями. Заметим также, что подавляющее большинство исследований задач с препятствием для уравнений четвертого порядка были в основном посвящены либо описанию регулярности минимайзеров, либо свойствам соответствующих свободных границ (см. [3], [4], [6], [7], [12–13], [14]).

Аппроксимационные методы для бигармонической задачи с препятствием разрабатывались в рамках методов вычислений для вариационных неравенств (см., например, [15]–[19]) и соответствующих задач оптимального управления [20], [21]. Таким образом, в принципе понятно, как построить последовательность приближений, сходящихся к точному решению нашей нелинейной вариационной задачи.

В данной статье нас интересует другая проблема. Нашей целью является получение гарантированной и полностью вычисляемой оценки расстояния (измеряемого в терминах естественной энергетической нормы) между точным решением $u \in \mathbb{K}$ и любым приближенным решением $v \in \mathbb{K}$. Для получения такой оценки будет использоваться метод, который использовался в работе [22] при выводе гарантированных оценок разности между точным решением линейной бигармонической задачи и произвольной функцией из энергетического допустимого класса. В [23]–[26] и в некоторых других публикациях этот метод применялся к ряду задач с препятствиями для эллиптических операторов второго порядка. Мы показываем, что предлагаемая методика оказывается весьма эффективной и в случае операторов более высокого порядка. Она позволяет установить естественную меру ошибки (которая характеризует отклонение произвольной функции из соответствующего энергетического пространства от точного решения) и получить полностью вычисляемые оценки этой меры.

2. ОЦЕНКИ ОТКЛОНЕНИЯ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Общий вид тождества для меры ошибки

Рассмотрим функциональные пространства

$$V := \left\{ w \in H^2(\Omega) \mid w|_{\partial\Omega} = \frac{\partial w}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

и $N := L^2(\Omega, M_{\text{Sym}}^{d \times d})$, где $M_{\text{Sym}}^{d \times d}$ – пространство симметричных матриц размера $d \times d$. Соответствующие сопряженные (двойственные) пространства имеют вид $V^* = H^{-2}(\Omega)$ и $N^* = N$.

Нетрудно видеть, что функционал J в задаче (1.1) представим в виде

$$J(v) = G(\Lambda v) + F(v), \tag{2.1}$$

где оператор Λ и функционалы G и F определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Lambda : V_0 &\rightarrow N, \quad \Lambda := \nabla \nabla; & G : N &\rightarrow \mathbb{R}, \quad G(n) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |n|^2 dx; \\ F : V_0 &\rightarrow \mathbb{R}, \quad F(v) := - \int_{\Omega} f v dx + \chi_{\mathbb{K}}(v), & \chi_{\mathbb{K}}(v) &= \begin{cases} 0, & v \in \mathbb{K}, \\ +\infty, & v \notin \mathbb{K}. \end{cases} \end{aligned}$$

Это дает возможность воспользоваться общей теорией, изложенной в [27] и в [28]. Далее, через p^* мы обозначим точное решение двойственной вариационной задачи, которая состоит в отыскании наибольшего значения двойственного функционала (см. [29])

$$I^*(n^*) := -G^*(n^*) - F^*(-\Lambda^* n^*) \tag{2.2}$$

на множестве N^* . Здесь оператор Λ^* определяется в виде

$$\Lambda^* : N \rightarrow V_0^*, \quad \Lambda^* := \text{div Div},$$

а функционалы $G^* : N^* \rightarrow \mathbb{R}$ и $F^* : V^* = H^{-2}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ являются преобразованиями Юнга–Фенхеля от G и F соответственно.

Учитывая соотношение двойственности $J(u) = I^*(p^*)$ (которое выполнено для данной вариационной задачи) и тождества (7.2.13)–(7.2.14) из [28], получаем для любых $v \in \mathbb{K}$ и $n^* \in N^*$ следующие соотношения:

$$J(v) - J(u) = J(v) - I^*(p^*) = \mathcal{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*), \tag{2.3}$$

$$I^*(p^*) - I^*(n^*) = J(u) - I^*(n^*) = \mathcal{D}_G(\Lambda u, n^*) + \mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* n^*). \tag{2.4}$$

Здесь \mathcal{D}_G и \mathcal{D}_F обозначают так называемые *составные функционалы* (compound functionals), которые определяются соотношениями

$$\mathcal{D}_G(\Lambda v, n^*) = G(\Lambda v) + G^*(n^*) - \langle \Lambda v, n^* \rangle, \tag{2.5}$$

$$\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* n^*) = F(v) + F^*(n^*) + \langle \Lambda n^*, v \rangle, \tag{2.6}$$

где $\langle v^*, v \rangle$ обозначает линейный функционал (спаривание элементов $v \in V$ и $v^* \in V^*$). Из определения сопряженного функционала следует, что составной функционал всегда отрицателен.

Из соотношений (2.3), (2.4) следует тождество (“error identity”, см. подробное изложение в [27])

$$\mathcal{D}_G(\Lambda v, p^*) + \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) + \mathcal{D}_G(\Lambda u, n^*) + \mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* n^*) = \mathcal{D}_G(\Lambda v, n^*) + \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* n^*), \tag{2.7}$$

которое справедливо для любых $v \in \mathbb{K}$ и $n^* \in N^*$. Левая часть (2.7) содержит четыре слагаемых, которые можно рассматривать как меры отклонения функций v и n^* от u и p^* соответственно. Первые два слагаемых можно рассматривать как меру $\mu(v)$, характеризующую погрешность аппроксимации v , а два других как меру $\mu^*(n^*)$ погрешности аппроксимации двойственной переменной n^* . Правая часть состоит из двух слагаемых, которые не содержат неизвестных точных решений u и p^* и поэтому может быть явно вычислена. Кроме того, из (2.3) и (2.4) следует, что правая часть (2.7) равна величине так называемого двойственного зазора (duality gap)

$J(v) - I^*(p^*)$. Заметим, что последовательности приближенных решений $\{v_k\}, \{n_k^*\}$, которые строятся с помощью любых вариационных методов, должны минимизировать этот зазор. Поэтому тождество (2.7) показывает, что если они построены правильно и сходятся к точным решениям, то мера в левой части (2.7) обязана стремиться к нулю и, следовательно, является адекватной характеристикой качества приближенных решений.

Тождество (2.7) выполняется для любой вариационной задачи с функционалом вида (2.1). Установим его вид в терминах рассматриваемой задачи. Нетрудно видеть, что $G^* : N^* \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством $G^*(n^*) := \frac{1}{2} \|n^*\|^2$ (здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает норму в пространствах $L_2(\Omega)$ для скалярных, векторных и матричных функций). Поэтому первые слагаемые, стоящие в правых частях (2.3) и (2.4), вычисляются довольно просто:

$$\mathcal{D}_G(\Lambda v, p^*) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla v - p^*\|^2 = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla (v - u)\|^2, \tag{2.8}$$

$$\mathcal{D}_G(\Lambda u, n^*) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla u - n^*\|^2 = \frac{1}{2} \|p^* - n^*\|^2. \tag{2.9}$$

Вычисление вторых слагаемых в правых частях (2.3) и (2.4) потребует значительных усилий.

Для вычисления $\langle v^*, v \rangle$ необходимо ввести промежуточное гильбертово пространство $\mathcal{V} := L^2(\Omega)$. Очевидно, что \mathcal{V} обладает свойством $V \subset \mathcal{V} \subset V^*$. Если $v^* \in \mathcal{V}$, то произведение $\langle v^*, v \rangle$ отождествляется со скалярным произведением в пространстве \mathcal{V} , т.е.

$$\langle v^*, v \rangle = \int_{\Omega} v^* v dx.$$

Заметим, что этот интеграл определен для любого $v^* \in \mathcal{V}$ и $v \in V$.

В соответствии с определением сопряженного функционала для $n^* \in N$ мы имеем

$$F^*(-\Lambda^* n^*) = \sup_{v \in \mathbb{K}} \{ \langle -\Lambda^* n^*, v \rangle + (f, v) \} = \sup_{v \in \mathbb{K}} \{ -(n^*, \Lambda v) + (f, v) \} = \sup_{v \in \mathbb{K}} \left\{ \int_{\Omega} (fv - n^* : \nabla \nabla v) dx \right\}.$$

Предположим, что функция n^* удовлетворяет дополнительному условию

$$n^* \in H(\Omega, \text{div Div}) := \{ m^* \in N^* : \text{div Div } m^* \in L^2(\Omega) \}. \tag{2.10}$$

Принимая во внимание условие $\frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0$ и используя интегрирование по частям, мы заключаем, что

$$0 = \int_{\partial \Omega} v(n^* \nabla v) ds = \int_{\Omega} \text{div}(n^* \nabla v) dx = \int_{\Omega} (\nabla v \text{ Div } n^* + n^* : \nabla \nabla v) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\Omega} (fv - n^* : \nabla \nabla v) dx = \int_{\Omega} (fv + \nabla v \cdot \text{Div } n^*) dx. \tag{2.11}$$

Объединяя (2.11) с формулой

$$0 = \int_{\partial \Omega} (\text{Div } n^* \cdot \nu) v ds = \int_{\Omega} \text{div}(v \text{ Div } n^*) dx = \int_{\Omega} (\text{Div } n^* \cdot \nabla v + v \text{ div Div } n^*) dx, \tag{2.12}$$

приходим к равенству

$$\int_{\Omega} (fv - n^* : \nabla \nabla v) dx = \int_{\Omega} (f - \text{div Div } n^*) v dx.$$

Таким образом,

$$F^*(-\Lambda^* n^*) = \sup_{v \in \mathbb{K}} \left\{ \int_{\Omega} (f - \text{div Div } n^*) v dx \right\} \quad \forall n^* \in H(\Omega, \text{div Div}). \tag{2.13}$$

Пусть $\hat{v} \in \mathbb{K}$ – заданная функция, тогда функция $\hat{v} + w$, где

$$w \in V^+(\Omega) := \{w \in V(\Omega) : w \geq 0 \text{ п.в. в } \Omega\},$$

также принадлежит \mathbb{K} . Нетрудно видеть, что

$$F^*(-\Lambda^* n^*) \geq \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^*) \hat{v} dx + \sup_{w \in V^+(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^*) w dx \right\}.$$

Поэтому это выражение конечно только в том случае, когда $n^* \in Q_{\odot}^*$, где

$$Q_{\odot}^* := \left\{ m^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div}) \mid \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} m^*) w dx \leq 0 \quad \forall w \in V^+(\Omega) \right\}. \quad (2.14)$$

Интегральное условие в определении Q_{\odot}^* означает, что $f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^* \leq 0$ почти всюду в Ω . Действительно, предположим что $n^* \in Q^*$ и при этом $f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^* > 0$ на некотором открытом множестве ненулевой меры ω , так что существует шар $B(x_0, \rho) \subset \omega$, на котором выполнено это неравенство. Выберем гладкую финитную функцию $w \in V^+(\Omega)$ с носителем в этом шаре. Функция w положительна в точках внутри шара и поэтому оказывается, что

$$\int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} m^*) w dx > 0.$$

Мы пришли к противоречию, которое доказывает справедливость утверждения. Пусть $n^* \in Q_{\odot}^*$. Ясно, что

$$\sup_{v \in \mathbb{K}} \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^*) v dx \leq \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^*) \varphi dx.$$

При этом существует последовательность функций $v_k \in \mathbb{K}$ такая, что $v_k \rightarrow \varphi$ в $L^2(\Omega)$. Мы приходим к заключению, что

$$F^*(-\Lambda^* n^*) = \begin{cases} \int_{\Omega} \varphi (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^*) dx, & \text{если } n^* \in Q_{\odot}^*, \\ +\infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому составной функционал $\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* n^*)$ конечен тогда и только тогда, когда условие

$$f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^* \leq 0 \quad (2.15)$$

выполняется почти везде в Ω .

Следовательно, для $n^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$, удовлетворяющего условию (2.15), функционал $\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* n^*)$ принимает вид

$$\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* n^*) = \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^*) (\varphi - v) dx. \quad (2.16)$$

Теперь необходимо вычислить $\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*)$ для любой функции $v \in \mathbb{K}$. Мы не можем воспользоваться предыдущей формулой, поскольку p^* , вообще говоря, не удовлетворяет условию (2.10). Действительно, согласно (1.3) мы знаем только, что $\operatorname{div} \operatorname{Div} p^*$ является интегрируемой с квадратом функцией на множестве Ω_0 (где $u > \varphi$ и выполняется условие $\operatorname{div} \operatorname{Div} p^* = f$) и на коинцидентном множестве $\Omega_{\varphi} = \{u = \varphi\} = \Omega \setminus \Omega_0$. Для всей области это, вообще говоря, неверно. Поэтому мы используем другой метод. Положив $v = u$ в соотношении (2.3), получим равенство

$$\mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* p^*) = 0,$$

из которого следует, что

$$F^*(-\Lambda^* p^*) = -F(u) - \langle \Lambda^* p^*, u \rangle = \int_{\Omega} (f u - p^* : \nabla \nabla u) dx.$$

Теперь, используя последнее равенство и рассуждая так же, как и при выводе (2.11), мы заключаем, что

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) &= F(v) + F^*(-\Lambda^* p^*) + \langle \Lambda^* p^*, v \rangle = \\ &= \int_{\Omega} (f(u - v) - p^* : \nabla \nabla(u - v)) dx = \int_{\Omega} (f(u - v) + \nabla(u - v) \cdot \text{Div } p^*) dx. \end{aligned}$$

Мы имеем

$$\int_{\Omega} (f(u - v) + \text{Div } p^* \cdot \nabla(u - v)) dx = \int_{\{u > \varphi\}} (...) dx + \int_{\{u = \varphi\}} (...) dx.$$

Обозначим через ν_{Γ_u} единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega_{\varphi}$ и положим $e := u - v$. Поскольку

$$\int_{\{u > \varphi\}} (fe + \text{Div } p^* \cdot \nabla e) dx = \underbrace{\int_{\{u > \varphi\}} (f - \text{div Div } p^*) e dx}_{=0} - \int_{\Gamma_u} (\text{Div } p^* \cdot \nu_{\Gamma_u}) eds$$

и

$$\int_{\{u = \varphi\}} (fe + \text{Div } p^* \cdot \nabla e) dx = \int_{\{u = \varphi\}} (f - \text{div Div } p^*) e dx + \int_{\Gamma_u} (\text{Div } p^* \cdot \nu_{\Gamma_u}) eds,$$

мы получаем

$$\mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) = \int_{\Gamma_u} [\text{Div } p^* \cdot \nu_{\Gamma_u}] (u - v) ds + \int_{\{u = \varphi\}} (f - \text{div Div } p^*) (u - v) dx, \tag{2.17}$$

где $[\Upsilon] := \Upsilon_{\Gamma_u}(\Omega_{\varphi}) - \Upsilon_{\Gamma_u}(\Omega_0)$ обозначает скачок величины Υ при переходе через свободную границу $\Gamma_u := \partial\Omega_{\varphi}$ (в нашем случае $\Upsilon = \text{Div } p^* \cdot \nu_{\Gamma_u}$). Таким образом, на свободной границе Γ_u возникает дополнительное интегральное слагаемое, которое необходимо учитывать.

Объединяя (2.3)–(2.9) и (2.16), (2.17), мы получаем конкретные выражения для мер, стоящих в левой части (2.7). Для любой функции $v \in \mathbb{K}$ имеем

$$\mu(v) := \mathcal{D}_C(\Lambda v, p^*) + \mathcal{D}_F(v, -\Lambda^* p^*) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla(u - v)\|^2 + \mu_{\varphi}(v), \tag{2.18}$$

где

$$\mu_{\varphi}(v) := \int_{\{u = \varphi\}} (\text{div Div } \nabla \nabla u - f)(v - u) dx - \int_{\Gamma_u} [\text{Div } \nabla \nabla u \cdot \nu_{\Gamma_u}] (v - u) ds. \tag{2.19}$$

Первое слагаемое в (2.18) контролирует отклонение от u в метрике H^2 при помощи стандартной нормы. Второе слагаемое $\mu_{\varphi}(v)$, определенное формулой (2.19), является дополнительной (нелинейной) мерой разности $v - u$. Эта величина неотрицательна и обращается в ноль, если $v = u$. Действительно, хорошо известно, что задача (\mathcal{P}) эквивалентна бигармоническому вариационному неравенству: найти функцию $u \in \mathbb{K}$ такую, что

$$\int_{\Omega} \{ \nabla \nabla u : \nabla \nabla(v - u) - f(v - u) \} dx \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}. \tag{2.20}$$

Применяя два раза интегрирование по частям и рассуждая так же, как и при выводе (2.17), мы приводим неравенство (2.20) к виду

$$\mu_{\varphi}(v) \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{K}.$$

Отметим, что первое слагаемое в $\mu_{\varphi}(v)$ аналогично соответствующему члену, возникающему в классической задаче с препятствием (см. [25]). Выражение $\text{div Div } p^* - f$ играет роль “весовой” функции и является неотрицательным, поэтому весь интеграл больше или равен нулю. Второе слагаемое в $\mu_{\varphi}(v)$ представляет собой дополнительный член нового типа, который обращается в ноль, если $v = u$ на Γ_u .

Нетрудно видеть, что $\mu_{\varphi}(v) = 0$, если $\Omega_{\varphi} \subset \{x \in \Omega \mid v(x) = \varphi(x)\}$, т.е. если точное коинцидентное множество содержится внутри приближенного, определенного при помощи функции v . В дру-

гих случаях эта мера будет положительной. Таким образом, меру $\mu_\varphi(v)$ можно рассматривать, как некоторую характеристику того, насколько точно множество $\{v = \varphi\}$ аппроксимирует коинцидентное множество Ω_φ . Конечно, эта характеристика весьма слабая и не дает желаемой информации о границе Γ_u . Однако в рамках стандартного вариационного подхода получить более подробную информацию о свободной границе не представляется возможным. Действительно, в силу равенства $\mu(v) = J(v) - J(u)$ мера $\mu(v)$ стремится к нулю на любой минимизирующей последовательности и является наиболее сильной среди всех мер, которые обладают таким свойством.

Аналогичным образом получаем, что если p^* – максимайзер двойственной вариационной задачи (2.2), а $n^* \in H(\Omega, \text{div Div})$ – его аппроксимация, удовлетворяющая условию (2.15), то соответствующая мера отклонения имеет вид

$$\mu^*(n^*) := \mathcal{D}_G(\Lambda u, n^*) + \mathcal{D}_F(u, -\Lambda^* n^*) = \frac{1}{2} \|p^* - n^*\|^2 + \mu_\varphi^*(n^*), \tag{2.21}$$

где

$$\mu_\varphi^*(n^*) := \int_{\Omega_0} (f - \text{div Div } n^*)(\varphi - u) dx. \tag{2.22}$$

Интеграл в (2.22) неотрицателен. Его можно рассматривать в качестве меры, указывающей (в слабом интегральном смысле) на неверное поведение двойственной переменной на множестве Ω_0 (где n^* должно удовлетворять дифференциальному уравнению). В заключение заметим, что $\mu^*(n^*) = I^*(p) - I^*(n^*)$. Поэтому любая последовательность n_k^* является максимизирующей в двойственной задаче тогда и только тогда, когда эта мера погрешности стремится к нулю. К сожалению, обе меры μ_φ и μ_φ^* оказываются слишком слабыми для того, чтобы оценить, насколько точно свободная граница Γ_u воспроизводится приближенным решением. Этот факт показывает ограниченность прямых вариационных методов в отношении реконструкции свободных границ (см. также [25]).

Равенства (2.7), (2.13), (2.16), (2.18) и (2.21) приводят к следующему результату:

Теорема 2.1. *Для любой функции $n^* \in H(\Omega, \text{div Div})$, удовлетворяющей условию (2.15), и для любой функции $v \in \mathbb{K}$ выполняется тождество*

$$\mu(v) + \mu^*(n^*) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla v - n^*\|^2 + \int_{\Omega} (f - \text{div Div } n^*)(\varphi - v) dx, \tag{2.23}$$

левая часть которого представляет собой меру отклонения v от u и n^ от p^* , а правая является полностью вычисляемым выражением.*

2.2. Расширение допустимого множества для n^*

Тождество (2.23) дает простое выражение для вычисления полной меры ошибки, но оно выполняется лишь для функций $n^* \in H(\Omega, \text{div Div})$, удовлетворяющих условию (2.15). Это функциональное множество является довольно узким и неудобным для практического использования. Покажем, как можно преодолеть этот недостаток и расширить допустимое множество для n^* .

Лемма 2.1. *Для любой функции $\tilde{n}^* \in H(\Omega, \text{div Div})$ выполняется проекционное неравенство*

$$\inf_{n^* \in Q_\odot^*} \|n^* - \tilde{n}^*\| \leq C_{F_\Omega} \|(f - \text{div Div } \tilde{n}^*)_\oplus\|, \tag{2.24}$$

где C_{F_Ω} – константа, определяемая в (2.27), а множество Q_\odot^* определено в (2.14).

Доказательство. Для любой функции $m^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|m^* - \tilde{n}^*\|^2 + fw - m^* : \nabla \nabla w \right) dx &= \frac{1}{2} \|m^* - \tilde{n}^*\|^2 + \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} m^*) w dx = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \|m^* - \tilde{n}^*\|^2, & \text{если } m^* \in Q_{\ominus}^*, \\ +\infty, & \text{если } m^* \notin Q_{\ominus}^*. \end{cases} \end{aligned}$$

Поэтому имеем

$$\inf_{n^* \in Q_{\ominus}^*} \frac{1}{2} \|n^* - \tilde{n}^*\|^2 = \inf_{n^* \in N^*} \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|n^* - \tilde{n}^*\|^2 + fw - n^* : \nabla \nabla w \right) dx. \tag{2.25}$$

Лагранжиан, определяющий минимаксную формулировку (2.25) линеен относительно переменной w и выпукл по n^* . При $w = 0$ он коэрцитивен относительно двойственной переменной.

Пространство N^* является гильбертовым, а $V^+(\Omega)$ является выпуклым замкнутым подмножеством рефлексивного пространства V . Используя известные достаточные условия, гарантирующие возможность перестановки \inf и \sup (см., например, [29, § 2, гл. IV]), мы можем переписать (2.25) в виде

$$\inf_{n^* \in Q_{\ominus}^*} \frac{1}{2} \|n^* - \tilde{n}^*\|^2 = \sup_{w \in V^+(\Omega)} \inf_{n^* \in N^*} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|n^* - \tilde{n}^*\|^2 + fw - n^* : \nabla \nabla w \right) dx.$$

Поиск инфимума по $n^* \in N^*$ сводится к алгебраической задаче, решение которой почти везде в Ω удовлетворяет уравнению $n^* = \tilde{n}^* + \nabla \nabla w$. Используя его и интегрируя по частям, мы получаем

$$\begin{aligned} \inf_{n^* \in Q_{\ominus}^*} \frac{1}{2} \|n^* - \tilde{n}^*\|^2 &= \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} |\nabla \nabla w|^2 + fw - \tilde{n}^* : \nabla \nabla w \right) dx = \\ &= \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} |\nabla \nabla w|^2 + (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*) w \right) dx \leq \sup_{w \in V^+(\Omega)} \int_{\Omega} \left(-\frac{1}{2} |\nabla \nabla w|^2 + (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)_{\oplus} w \right) dx. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Применение неравенства типа неравенства Фридрихса

$$\|w\| \leq C_{F_{\Omega}} \|\nabla w\| \leq C_{F_{\Omega}}^2 \|\nabla \nabla w\| \tag{2.27}$$

позволяет оценить последний интеграл следующим образом:

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^* + f)_{\oplus} w dx \leq C_{F_{\Omega}}^2 \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)_{\oplus}\| \|\nabla \nabla w\|. \tag{2.28}$$

Вводя обозначение $t := \|\nabla \nabla w\|$ и объединяя (2.26) с (2.28), мы видим, что супремум в (2.26) можно оценить сверху величиной

$$\sup_{t \geq 0} \left(-\frac{1}{2} t^2 + C_{F_{\Omega}}^2 \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)_{\oplus}\| t \right) = \frac{1}{2} C_{F_{\Omega}}^2 \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)_{\oplus}\|^2,$$

что приводит к (2.24).

2.3. Мажоранта меры отклонения от точного решения

Теперь мы используем лемму 2.1 и тождество (2.23) для получения оценки, которая выполняется для $\tilde{n}^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$. Прежде всего надо преобразовать выражения для меры $\mu^*(n^*)$, определенной соотношением (2.21). При помощи неравенства Юнга (с параметром β) получаем следующую оценку снизу для $\mu^*(n^*)$:

$$\begin{aligned} \mu^*(n^*) &= \frac{1}{2} \|p^* - n^* + \tilde{n}^* - \tilde{n}^*\|^2 + \int_{\Omega \setminus \{u=\varphi\}} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div}(n^* - \tilde{n}^* + \tilde{n}^*)) (\varphi - u) dx \geq \\ &\geq \mu_{\beta}^*(\tilde{n}^*) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \|\tilde{n}^* - n^*\|^2 - \int_{\Omega \setminus \{u=\varphi\}} (\varphi - u) \operatorname{div} \operatorname{Div}(n^* - \tilde{n}^*) dx, \end{aligned} \tag{2.29}$$

где

$$\mu_\beta^*(\tilde{n}^*) := \frac{(1-\beta)}{2} \|p^* - \tilde{n}^*\|^2 + \mu_\varphi^*(\tilde{n}^*).$$

Обратимся к (2.23). Для правой части мы получаем оценку сверху

$$\begin{aligned} \mu(v) + \mu^*(n^*) &= \frac{1}{2} \|\nabla \nabla v - n^*\|^2 + \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)(\varphi - v) dx + \\ &+ \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div}(n^* - \tilde{n}^*))(\varphi - v) dx \leq \frac{1}{2} (1 + \beta) \|\nabla \nabla v - \tilde{n}^*\|^2 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \|n^* - \tilde{n}^*\|^2 + \\ &+ \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)(\varphi - v) dx - \int_{\Omega} (\varphi - v) \operatorname{div} \operatorname{Div}(n^* - \tilde{n}^*) dx. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Оценки (2.29) и (2.30) справедливы для любой функции $\tilde{n}^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$.

Объединяя выражения (2.29) и (2.30), перенося члены

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \|\tilde{n}^* - n^*\|^2 \quad \text{и} \quad \int_{\Omega \setminus \{u=\varphi\}} (\varphi - u) \operatorname{div} \operatorname{Div}(n^* - \tilde{n}^*) dx$$

на противоположную сторону и приводя подобные слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} \mu(v) + \mu_\beta^*(\tilde{n}^*) &\leq \frac{1}{2} (1 + \beta) \|\nabla \nabla v - \tilde{n}^*\|^2 + \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)(\varphi - v) dx + \\ &+ \frac{1}{\beta} \|n^* - \tilde{n}^*\|^2 + \int_{\Omega} (v - u) \operatorname{div} \operatorname{Div}(n^* - \tilde{n}^*) dx. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Последовательное применение неравенства Гёльдера и неравенства Юнга (с параметром β) к последнему слагаемому в правой части (2.31) приводит к неравенству

$$\int_{\Omega} (v - u) \operatorname{div} \operatorname{Div}(n^* - \tilde{n}^*) dx \leq \frac{\beta}{2} \|\nabla \nabla(u - v)\|^2 + \frac{1}{2\beta} \|n^* - \tilde{n}^*\|^2. \tag{2.32}$$

Соотношения (2.31), (2.32) и (2.24) дают требуемую оценку (2.33), правая часть которой содержит только известные функции и может быть явно вычислена.

Теорема 2.2. *Для любых $v \in \mathbb{K}$ и $\tilde{n}^* \in H(\Omega, \operatorname{div} \operatorname{Div})$ полная мера отклонения этих функций от точных решений прямой и двойственной задач (u и p^* соответственно) удовлетворяет оценке*

$$\frac{1-\beta}{2} (\|\nabla \nabla(u - v)\|^2 + \|p^* - \tilde{n}^*\|^2) + \mu_\varphi(v) + \mu_\varphi^*(\tilde{n}^*) \leq \mathfrak{M}(v, \tilde{n}^*, f, \varphi, \beta), \tag{2.33}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(v, \tilde{n}^*, f, \varphi, \beta) &:= \frac{1}{2} (1 + \beta) \|\nabla \nabla v - \tilde{n}^*\|^2 + \\ &+ \frac{3}{2\beta} C_{F_\Omega}^2 \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)_\oplus\|^2 + \int_{\Omega} (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)(\varphi - v) dx, \end{aligned}$$

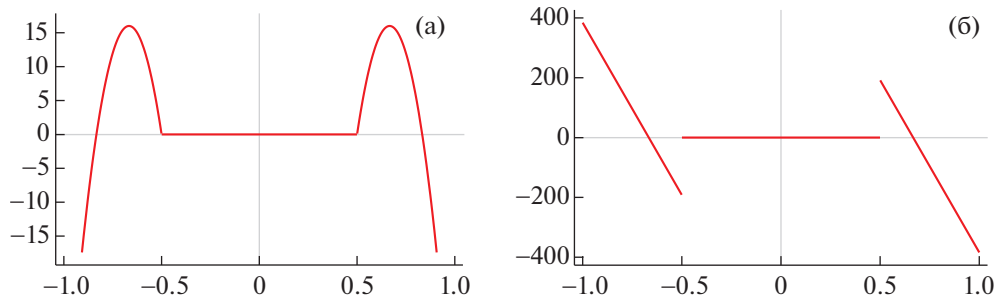
параметр $\beta \in (0, 1]$, а C_{F_Ω} — константа из леммы 2.1.

Замечание 2.1. В (2.29)–(2.32) мы использовали неравенство Юнга с одной и той же постоянной β . Вообще говоря, в разных оценках можно использовать разные положительные постоянные. При этом получится более точное (но и более громоздкое) выражение для мажоранты \mathfrak{M} , которое мы здесь не приводим.

3. ПРИМЕРЫ

Обсудим два примера, которые иллюстрируют, как работают тождество (2.23) и оценка (2.33) для полной меры ошибки.

Сначала мы рассмотрим одномерную модельную задачу, для которой известно точное решение, и, следовательно, мы можем явно посчитать ошибки аппроксимации, соответствующие прямой и двойственной переменным. В обсуждаемом примере приближенное решение имеет



Фиг. 1. Поток p^* (а) и $(p^*)'$ (б).

существенно меньшее коинцидентное множество, чем точное решение. Однако и в этом случае тождество для полной меры ошибки справедливо и оценки ошибок, вычисленные для регуляризованного двойственного приближения оказываются довольно точными.

В качестве второго примера мы рассмотрим взаимодействие с плоским препятствием упругой радиально симметричной пластины с закрепленным краем. Полученные результаты совпадают с соответствующими результатами для одномерной задачи и подтверждают справедливость тождества (2.23).

Очевидный интерес представляет применение полученных оценок в случаях, когда приближенные решения строятся с помощью некоторых стандартных (например, ФЕМ) аппроксимаций бигармонической задачи с препятствием. Однако такая деятельность выходит за рамки данной статьи.

3.1. Модельная одномерная задача

Пусть $\Omega = (-1, 1)$, $\varphi \equiv -1$ и $f \equiv c$. Если положить $c = -1152$, то минимайзер задачи (1.1) имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} -8(x+1)^2(6x^2+4x+1), & \text{если } -1 \leq x < -0.5, \\ -1, & \text{если } x \in \Omega_\varphi := -[0.5, 0.5], \\ -8(x-1)^2(6x^2-4x+1), & \text{если } 0.5 < x \leq 1. \end{cases}$$

Эта функция удовлетворяет краевым условиям $u(\pm 1) = u'(\pm 1) = 0$ и уравнению $u^{IV} + c = 0$ в $\Omega_0 = (-1, -0.5) \cup (0.5, 1)$. При этом поток

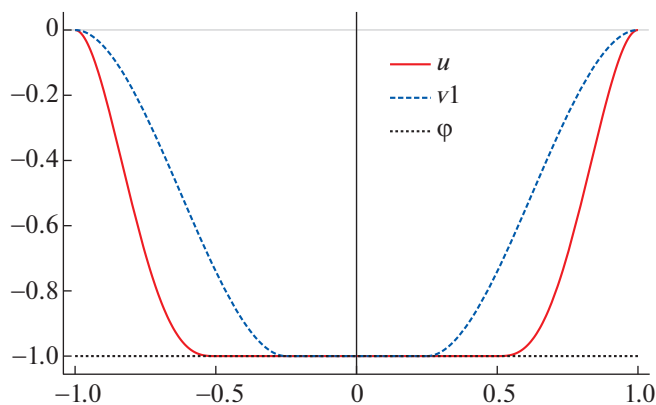
$$p^* = u''(x) = \begin{cases} -48(2x+1)(6x+5), & \text{если } -1 < x < -0.5, \\ 0, & \text{если } x \in \Omega_\varphi, \\ -48(2x-1)(6x-5), & \text{если } 0.5 < x < 1, \end{cases}$$

не удовлетворяет условию (2.10), которое в данном случае сводится к $(p^*)'' \in L^2(-1, 1)$. Функция p^* и ее производная изображены на фиг. 1. Нетрудно видеть, что $(p^*)'' \notin L^2(-1, 1)$.

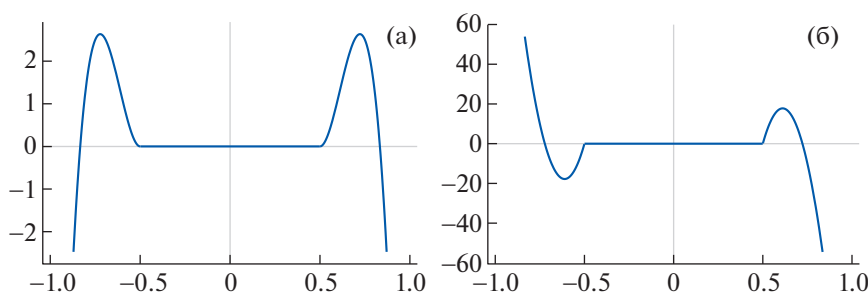
Рассмотрим функцию

$$v_1(x) = \begin{cases} -\frac{16}{27}(x+1)^2(1-8x), & \text{если } -1 < x < -0.25, \\ -1, & \text{если } -0.25 \leq x \leq 0.25, \\ -\frac{16}{27}(x-1)^2(1+8x), & \text{если } 0.25 < x < 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $v_1 \in \mathbb{K}$ и $\{x \in \Omega \mid v_1(x) = -1\} \subset \Omega_\varphi$ (см. фиг. 2).



Фиг. 2. Точное решение u и приближенное решение v_1 .



Фиг. 3. Функция n^* (а) и $(n^*)'$ (б).

В качестве аппроксимации потока выберем сначала функцию

$$n^*(x) = \begin{cases} 20(2x + 1)^2(5 + 6x), & \text{если } -1 < x < -0.5, \\ 0, & \text{если } -0.5 \leq x \leq 0.5, \\ 20(2x - 1)^2(5 - 6x), & \text{если } 0.5 < x < 1. \end{cases}$$

Заметим, что n^* удовлетворяет условиям (2.10) и (2.15) (см. фиг. 3). Согласно (2.18) и (2.19) мера $\mu(v_1)$ состоит из двух слагаемых. В данном примере их можно вычислить:

$$\frac{1}{2} \|\nabla \nabla(u - v_1)\|^2 = \int_0^1 (u'' - v_1'')^2 dx = \int_{0.25}^{0.5} (v_1'')^2 dx + \int_{0.5}^1 (u'' - v_1'')^2 dx \approx 125.15 \tag{3.1}$$

и

$$\mu_\varphi(v_1) = \int_{-0.5}^{0.5} (\text{div Div } \nabla \nabla \varphi - f)(v_1 - \varphi) dx - [u'''(-0.5)](v_1 - u)|_{x=-0.5} - [u'''(0.5)](v_1 - u)|_{x=0.5} = 152.89. \tag{3.2}$$

Здесь $[u'''(a)] := \{u'''(a - 0) - u'''(a + 0)\}$ обозначает скачок в точке a .

Мера $\mu^*(n^*)$ вычисляется в соответствии с (2.21) и (2.22):

$$\frac{1}{2} \|p^* - n^*\|^2 = \int_{0.5}^1 (p^* - n^*)^2 dx \approx 74.74, \tag{3.3}$$

$$\mu_\varphi^*(n^*) = 2 \int_{0.5}^1 (f - n'')(\varphi - u) dx \approx 156.78. \tag{3.4}$$

Объединение (3.1)–(3.4) дает следующее значение для величины полной меры отклонения функций v_1 и n^* от точных решений прямой и двойственной задач соответственно. Мы получаем

$$\mu(v_1) + \mu^*(n^*) = 278.04 + 231.54 = 509.58. \quad (3.5)$$

Рассмотрим правую часть тождества (2.23) (поскольку выбранная функция n^* удовлетворяет условию (2.15) это тождество должно выполняться точно). Непосредственный подсчет дает

$$\frac{1}{2} \|\nabla \nabla v_1 - n^*\|^2 = \int_0^1 (v_1'' - n^*)^2 dx = \int_{0.25}^{0.5} (v_1'')^2 dx + \int_{0.5}^1 (v_1'' - n^*)^2 dx \approx 23.063$$

и

$$\int_{-1}^1 (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} n^*)(\varphi - v_1) dx = 2 \int_{0.25}^{0.5} f(\varphi - v_1) dx + 2 \int_{0.5}^1 (f - n'')(\varphi - v_1) dx \approx 486.515.$$

Таким образом, сумма этих слагаемых дает то же самое значение 509.58, что сумма мер (3.5).

Теперь мы выберем \tilde{n}^* так, чтобы эта функция удовлетворяла условию (2.10), но \tilde{n}^* не удовлетворяла условию (2.15). Зададим \tilde{n}^* в виде

$$\tilde{n}^*(x) = \begin{cases} 8(3x+1)^2(6x+5), & \text{если } -1 \leq x < -1/3, \\ 0, & \text{если } -1/3 \leq x \leq 1/3, \\ 8(3x-1)^2(5-6x), & \text{если } 1/3 < x \leq 1. \end{cases}$$

На множестве $x \in (-1, -\frac{17}{18}] \cup [\frac{17}{18}, 1)$ условие (2.15) не выполняется. Поэтому мы не можем применять тождество (2.23), но можем использовать оценку (2.33). Проверим точность выполнения этой оценки.

Непосредственные вычисления показывают, что

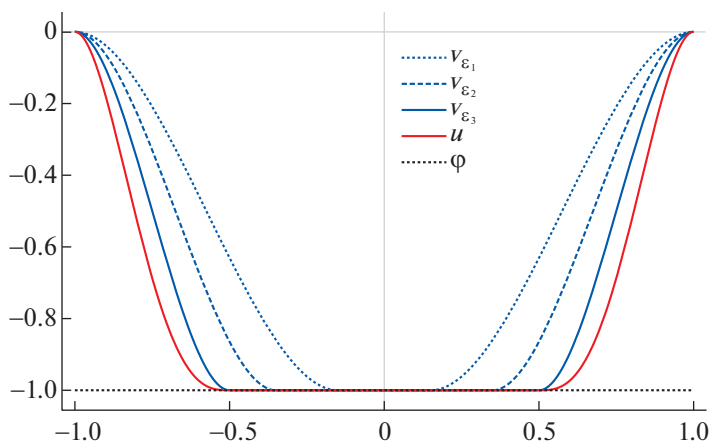
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|p^* - \tilde{n}^*\|^2 &= \int_{1/3}^{0.5} (\tilde{n}^*)^2 dx + \int_{0.5}^1 (p^* - \tilde{n}^*)^2 dx \approx 24.9137, \\ \mu_\varphi^*(\tilde{n}^*) &= 2 \int_{0.5}^1 (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)(\varphi - u) dx = 2 \int_{0.5}^1 (f - (\tilde{n}^*)'')(\varphi - u) dx \approx 72.0, \\ \|\nabla \nabla v_1 - \tilde{n}^*\|^2 &= 2 \int_{0.25}^{1/3} (v_1'')^2 dx + 2 \int_{1/3}^1 (v_1'' - \tilde{n}^*)^2 dx \approx 66.16, \\ \frac{1}{2} \|(f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)_\otimes\|^2 &= \int_{17/18}^1 (f - (\tilde{n}^*)'')^2 dx \approx 384.0, \\ \int_{-1}^1 (f - \operatorname{div} \operatorname{Div} \tilde{n}^*)(\varphi - v_1) dx &= 2 \int_{1/3}^{0.5} f(\varphi - v_1) dx + 2 \int_{0.5}^1 (f - (\tilde{n}^*)'')(\varphi - v_1) dx \approx \\ &\approx 51.0947 + 268.267 \approx 319.36. \end{aligned}$$

Напомним, что для $\Omega = (-1, 1)$ имеем $C_{F_\Omega} = 4/\pi^2$. Таким образом, согласно (2.33) для любого $\beta \in (0, 1]$ мажоранта $\mathfrak{M}(v_1, \tilde{n}^*, f, \varphi, \beta)$ принимает вид

$$\mathfrak{M}(v_1, \tilde{n}^*, -1152, -1, \beta) \approx 352.44 + 33.08\beta + 189.22 \frac{1}{\beta}.$$

Принимая во внимание (3.1) и (3.2), для левой части неравенства (2.33) получаем выражение $524.95 - 150.06\beta$. Таким образом, это неравенство приобретает вид (для $\beta \in (0, 1]$)

$$524.95 - 150.06\beta \leq 352.44 + 33.08\beta + 189.22 \frac{1}{\beta}. \quad (3.6)$$



Фиг. 4. Минимайзер u и функции v_ϵ с $\epsilon_1 = 0.35$, $\epsilon_2 = 0.15$ и $\epsilon_3 = 0$.

В частности, при $\beta = 0.5$ и $\beta = 1$ отношение мажоранты (правая часть (3.6)) к мере отклонения (левая часть (3.6)) характеризуются значениями 1.66 и 1.53 соответственно.

Далее мы рассмотрим серию приближенных решений (см. фиг. 4)

$$v_\epsilon(x) = \begin{cases} -\frac{4}{(2\epsilon + 1)^3}(1 + x)^2(-4x + 6\epsilon - 1), & \text{если } -1 \leq x < \epsilon - \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{если } \epsilon - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} - \epsilon, \\ -\frac{4}{(2\epsilon + 1)^3}(1 - x)^2(4x + 6\epsilon - 1), & \text{если } \frac{1}{2} - \epsilon < x \leq 1, \end{cases}$$

где ϵ — параметр, удовлетворяющий условию $0 \leq \epsilon \leq 1/2$. Для этих аппроксимаций $\{x \in \Omega | v_\epsilon = -1\} \subset \Omega_\phi$. Отметим, что аппроксимация коинцидентного множества $\{x \in \Omega | u = -1\}$ улучшается, если $\epsilon \rightarrow 0$, так что функция v_0 соприкасается с ϕ на точном коинцидентном множестве (при этом эта функция не совпадает с u).

Аппроксимации n_ϵ^* потока точного решения p^* строится путем сглаживания второй производной функции v_ϵ (которая заменяет $\nabla \nabla v_\epsilon$) так, чтобы $(n_\epsilon^*)'' \in L^2(-1, 1)$ (что соответствует условию $n_\epsilon^* \in H(\text{div Div}, \Omega)$). В частности, если взять

$$n_\epsilon^*(x) = \begin{cases} \frac{48}{(2\epsilon + 1)^5}(-2x + 2\epsilon - 1)(4x - 2\epsilon + 3), & \text{если } -1 \leq x < \epsilon - \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{если } \epsilon - \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} - \epsilon, \\ \frac{48}{(2\epsilon + 1)^5}(2x + 2\epsilon - 1)(-4x - 2\epsilon + 3), & \text{если } \frac{1}{2} - \epsilon < x \leq 1, \end{cases}$$

то условие (2.15) выполнено, и мы можем использовать тождество (2.23).

В табл. 1 приведены результаты расчетов для слагаемых, входящих в состав $\mu(v_\epsilon)$, которые были вычислены для $\epsilon = 0.05j$, $j = 7, 5, 3, 1$ и 0. Оба слагаемых (квадратичное и нелинейное) убывают при $\epsilon \rightarrow 0$, однако первое остается положительным (поскольку последовательность приближенных решений не стремится к точному решению u), а второе стремится к нулю (потому что соответствующая последовательность приближенных коинцидентных множеств стремится к точному множеству Ω_ϕ). Нетрудно видеть, что сумма этих двух слагаемых (которая составляет меру $\mu(v_\epsilon)$) в точности равна отклонению $J(v_\epsilon)$ от точного минимума прямой вариационной задачи.

Таблица 1. Компоненты меры $\mu(v_\epsilon)$

ϵ	$\frac{1}{2} \ \nabla \nabla(u - v_\epsilon)\ ^2$	$\mu_\phi(v_\epsilon)$	$J(v_\epsilon) - J(u)$	$k(v_\epsilon)$ [%]
0.35	134.060	250.280	384.340	65.12
0.25	125.156	152.889	278.044	54.99
0.15	109.904	68.192	178.096	38.29
0.05	81.474	9.852	91.326	1.06
0.00	57.600	0	57.60	0

Таблица 2. Компоненты меры $\mu^*(n_\epsilon^*)$

ϵ	$\frac{1}{2} \ p^* - n_\epsilon^*\ ^2$	$\mu_\phi^*(n_\epsilon^*)$	$I^*(p^*) - I^*(n_\epsilon^*)$	$k(n_\epsilon^*)$ [%]
0.35	119.444	422.937	542.381	77.98
0.25	109.443	400.119	509.562	78.52
0.15	95.972	357.378	453.349	78.83
0.05	78.510	270.053	348.563	77.48
0.00	68.571	192	260.571	73.68

Таблица 3. Компоненты тождества (2.23), вычисленные для v_ϵ и n_ϵ^* при различных ϵ

ϵ	$\frac{1}{2} \ \nabla \nabla v_\epsilon - n_\epsilon^*\ ^2$	$\mathcal{N}(v_\epsilon, n_\epsilon^*)$	пр. часть (2.23)	$\mu(v_\epsilon) + \mu^*(n_\epsilon^*)$
0.35	10.049	916.672	926.721	926.721
0.25	14.629	772.978	787.606	787.606
0.15	22.472	608.973	631.445	631.445
0.05	37.094	402.796	439.890	439.890
0.00	49.371	268.800	318.171	318.171

В последнем столбце табл. 1 показан относительный вклад в ошибку нелинейной меры $\mu_\phi(v_\epsilon)$, который определяется формулой

$$k(v_\epsilon) := 100 \frac{\mu_\phi(v_\epsilon)}{\mu(v_\epsilon)} [\%].$$

Табл. 2 содержит аналогичные данные, относящиеся к мере $\mu^*(n_\epsilon^*)$. Как и в случае меры $\mu_\phi(v_\epsilon)$ и квадратичный и нелинейный члены убывают при $\epsilon \rightarrow 0$. Однако здесь нелинейная мера не стремится к нулю. Эта мера контролирует нарушение уравнения $\text{div Div } n^* = f$ на множестве Ω_0 . Функция n_ϵ^* не удовлетворяет этому уравнению ни при каком ϵ , поэтому $\mu^*(n_\epsilon^*) > 0$. Более того, в этом случае мера $\mu_\phi^*(n_\epsilon^*)$ существенно превышает первое слагаемое, что видно по коэффициенту

$$k(n_\epsilon^*) := 100 \frac{\mu_\phi^*(n_\epsilon^*)}{\mu^*(n_\epsilon^*)} [\%],$$

приведенному в последнем столбце таблицы.

Табл. 3 иллюстрирует тождество (2.23). Первые две колонки соответствуют двум слагаемым, образующим правую часть (2.23). Здесь, через $\mathcal{N}(v_\epsilon, n_\epsilon^*)$ обозначается член $\int_{-1}^1 (f - (n_\epsilon^*))'(\phi - v_\epsilon) dx$ (который соответствует слагаемому $\int_{\Omega} (f - \text{div Div } n_\epsilon^*)(\phi - v_\epsilon) dx$ в тождестве). Сумма этих слагаемых приведена в третьем столбце. Она в точности совпадает с суммой мер (которые приведены в табл. 1, 2). Отметим, что величины, стоящие в первых двух столбцах

табл. 3, вычисляются непосредственно по функциям v_ε и n_ε^* . Эти функции можно рассматривать, как приближенные решения, построенные при помощи какой-либо вычислительной процедуры. Таблица показывает, что сумма

$$\frac{1}{2} \|\nabla \nabla v_\varepsilon - n_\varepsilon^*\|^2 + \mathcal{N}(v_\varepsilon, n_\varepsilon^*)$$

является хорошей и легко вычисляемой характеристикой качества приближенных решений.

3.2. Изгиб круглой пластины

Пусть $\Omega = B_3 \subset \mathbb{R}^2$, где B_3 обозначает открытый шар с центром в начале координат и радиусом 3. В этом случае задачу \mathcal{P} можно рассматривать как упрощенный вариант задачи об изгибе упругой круглой пластины, жестко закрепленной по краям над плоским препятствием $\varphi \equiv -1$ под действием внешней силы f . Упрощение заключается в том, что мы заменяем тензор упругих постоянных на единичный тензор, что в контексте рассматриваемых вопросов не играет существенной роли. Положим

$$f \equiv 16 \frac{c_1}{c_2}, \quad \text{где} \quad c_1 = 9 \ln 3 - 4, \quad c_2 = 208 - 216 \ln 3 + 9 \ln^2 3.$$

Отметим, что для выбранных данных можно явно определить точное решение задачи. В полярных координатах (r, θ) минимайзер имеет следующий вид:

$$u(r, \theta) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0 < r < 1, \\ \frac{(r^2 - 1)(128 + c_1(r^2 - 3)) + 4(c_1 - 32(1 + r^2)) \ln r}{4c_2} - 1, & \text{если } 1 \leq r \leq 3. \end{cases}$$

Очевидно, что $\Delta^2 u = f_0$ в $B_3 \setminus B_1$, $u \geq -1$ в B_3 и $u(3, \theta) = \frac{\partial u}{\partial r}(3, \theta) = 0$ для всех $\theta \in [0, 2\pi)$. Простые вычисления показывают, что

$$p^* = \begin{pmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{pmatrix},$$

где $p_{11}^* = p_{12}^* = p_{21}^* = p_{22}^* = 0$ в шаре B_1 , а при $(r, \theta) \in B_3 \setminus B_1$ компоненты p^* задаются формулами

$$p_{11}^* = \frac{(r^2 - 1) \cos(2\theta)(c_1(r^2 + 1) - 32) + 2r^2(c_1(r^2 - 1) - 32 \ln r)}{c_2 r^2},$$

$$p_{12}^* = p_{21}^* = \frac{(r^2 - 1) \sin(2\theta)(c_1(r^2 + 1) - 32)}{c_2 r^2},$$

$$p_{22}^* = \frac{(1 - r^2) \cos(2\theta)(c_1(r^2 + 1) - 32) + 2r^2(c_1(r^2 - 1) - 32 \ln r)}{c_2 r^2}.$$

Нетрудно убедиться, что $\operatorname{div} \operatorname{Div} p^* \notin L^2(B_3)$ и $\operatorname{div} \operatorname{Div} p^* = f_0$ на множестве $B_3 \setminus B_1 = \Omega \setminus \{u = \varphi\}$.

В качестве v зададим функцию

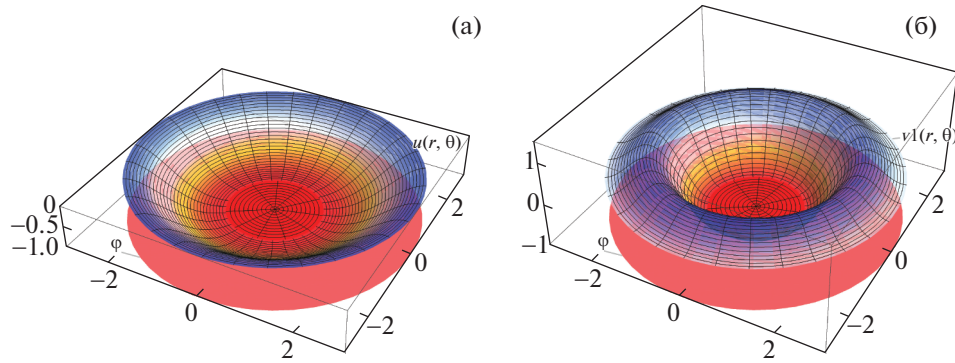
$$v_2(r, \theta) = u(r, \theta) + \begin{cases} 0.5[1 - \cos(\pi(3 - r))], & \text{если } 1 \leq r \leq 3, \\ 0, & \text{если } 0 < r < 1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $v_2 \in \mathbb{K}$ и $v_2 \geq u$ в Ω и $v_2 = u$ в B_1 , так что v_2 имеет такое же коинцидентное множество B_1 , что и минимайзер u (см. фиг. 5).

После проведения непосредственных вычислений меры (2.18) мы получаем

$$\mu(v_2) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla (u - v_2)\|^2 + \mu_\varphi(v_2) = \frac{1}{2} \|\nabla \nabla (u - v_2)\|^2 \approx 157.19. \tag{3.7}$$

Заметим, что $\mu_\varphi(v_2) = 0$, поскольку $\{x \in \Omega \mid v_2 = -1\} = \Omega_\varphi$.



Фиг. 5. Точное решение u (а) и функция v_2 (б).

Положим

$$\tilde{n}^* = \begin{pmatrix} \hat{n}_{11}^* & \hat{n}_{12}^* \\ \hat{n}_{21}^* & \hat{n}_{22}^* \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{n}_{11}^* = \hat{n}_{22}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } (r, \theta) \in B_1, \\ \frac{(r-1)^3 \cos(2\theta)}{c_2 r^2}, & \text{если } (r, \theta) \in B_3 \setminus B_1, \end{cases}$$

$$\hat{n}_{12}^* = \hat{n}_{21}^* = \begin{cases} 0, & \text{если } (r, \theta) \in B_1, \\ \frac{9(r-1)^3 \sin(2\theta)}{c_2 r^2}, & \text{если } (r, \theta) \in B_3 \setminus B_1. \end{cases}$$

Функция \hat{n}^* удовлетворяет условию (2.15) и мы можем проверить выполнение тождества (2.23).

Вычисляя меру ошибки $\mu^*(\hat{n}^*)$, определяемую выражениями (2.21) и (2.22), получаем

$$\mu^*(\hat{n}^*) = \frac{1}{2} \|p^* - \hat{n}^*\|^2 + \int_{B_3 \setminus B_1} (f - \text{div Div } \hat{n}^*)(-1 - u) r dr d\theta \approx 14.84 + 63.46 \approx 78.30. \tag{3.8}$$

Объединение (3.7) и (3.8) дает следующее значение для полной меры ошибки (результат округлен с точностью двух знаков после запятой)

$$\mu(v_2) + \mu^*(\hat{n}^*) \approx 157.19 + 78.30 = 235.49. \tag{3.9}$$

При вычислении слагаемых в правой части тождества (2.23) мы используем только функции v_2 и \hat{n}^* (известные аппроксимации точных решений). Сумма этих слагаемых дает такое же значение, как и (3.9):

$$\frac{1}{2} \|\nabla \nabla v_2 - \hat{n}^*\|^2 - \int_{B_3} (f - \text{div Div } \tilde{n}^*)(1 + v_2) r dr d\theta = 111.15 + 124.34 = 235.49.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions J.-L., Stampacchia G. Variational inequalities // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 493–519.
2. Lions J.-L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires. Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
3. Caffarelli L.A., Friedman A. The obstacle problem for the biharmonic operator // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2.1). 1979. V. 6. № 1. P. 151–184.
4. Frehse J. On the regularity of the solution of the biharmonic variational inequality // Manuscripta Math. 1973. V. 9. P. 91–103.

5. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Theory of Elasticity. Course of Theoretical Physics, Vol. 7. Translated by J. B. Sykes and W. H. Reid Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1959.
6. *Frehse J.* Zum Differenzierbarkeitsproblem bei Variationsungleichungen höherer Ordnung // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1971. V. 36. P. 140–149.
7. *Cimatti G.* The constrained elastic beam // Meccanica – J. Italian Assoc. Theoret. Appl. Mech. 1973. V. 8. P. 119–124.
8. *Stampacchia G.* Su una disequazione variazionale legata al comportamento elastoplastico delle travi appoggiate agli estremi // Boll. Un. Mat. Ital. (2.1). 1975. V. 11. № 3 suppl. P. 444–454.
9. *Brézis H., Stampacchia G.* Remarks on some fourth order variational inequalities // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2.1). 1977. V. 4. № 2. P. 363–371.
10. *Duvaut G., Lions J.-L.* Inequalities in Mechanics and Physics. Translated from the French by C.W. John, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 219 Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
11. *Rodrigues J.-F.* Obstacle Problems in Mathematical Physics. North-Holland Mathematics Studies. V. 134. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987.
12. *Caffarelli L.A., Friedman A., Torelli A.* The two-obstacle problem for the biharmonic operator // Pacific J. Math. 1982. V. 103. № 2. P. 325–335.
13. *Schild B.* On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (2.1). 1986. V. 13. № 4. P. 559–616.
14. *Aleksanyan G.* Regularity of the free boundary in the biharmonic obstacle problem // Calc. Var. Partial Differential Equations. 2019. V. 58. <https://doi.org/10.1007/s00526-019-1638-5>
15. *Brenner S.C., Sung L.-Y., Zhang H., Zhang Y.* A quadratic C^0 interior penalty method for the displacement obstacle problem of clamped Kirchhoff plates // SIAM J. Numer. Anal. 2012. V. 50. № 6. P. 3329–3350.
16. *Glowinski R., Marini L.D., Vidrascu M.* Finite-element approximations and iterative solutions of a fourth-order elliptic variational inequality // IMA J. Numer. Anal. 1984. V. 4. № 2. P. 127–167.
17. *Glowinski R.* Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. Springer Series in Computational Physics Springer-Verlag, New York, 1984.
18. *Haslinger J., Hlaváček I., Nečas J.* A unified approach to a posteriori error estimation using element residual methods // Handb. Numer. Anal., IV. 1996. P. 313–485.
19. *Ito K., Kunisch K.* An augmented Lagrangian technique for variational inequalities // Appl. Math. Optim. 1990. V. 21. № 3. P. 223–241.
20. *Adams D.R., Hryniv V., Lenhart S.* Optimal control of a biharmonic obstacle problem // Around the research of Vladimir Maz'ya. III. Int. Math. Ser. (N. Y.) 2010. V. 13. P. 1–24.
21. *Ito K., Kunisch K.* Optimal control of elliptic variational inequalities // Appl. Math. Optim. 2000. V. 41. № 3. P. 343–364.
22. *Neittaanmäki P., Repin S.I.* A posteriori error estimates for boundary-value problems related to the biharmonic operator // East-West J. Numer. Math. 2001. V. 9. № 2. P. 157–178.
23. *Repin S.I.* Estimates of deviations from exact solutions of elliptic variational inequalities // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2000. V. 271. С. 188–203.
24. *Repin S.* A Posteriori Estimates for Partial Differential Equations. Radon Series on Computational and Applied Mathematics. V. 4. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.
25. *Repin S., Valdman J.* Error identities for variational problems with obstacles // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2018. V. 98. № 4. P. 635–658.
26. *Apushkinskaya D.E., Repin S.I.* Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution // Interfaces Free Bound. 2018. V. 20. № 4. P. 511–531.
27. *Repin S.I.* Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations // Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Vol. IX. Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2003. V. 209. P. 143–171.
28. *Neittaanmäki P., Repin S.* Reliable Methods for Computer Simulation. Studies in Mathematics and its Applications. V. 33. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2004.
29. *Ekeland I., Temam R.* Convex Analysis and Variational Problems. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976.