ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 11, с. 1815–1822

## ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.632.4

# ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АПОСТЕРИОРНЫХ ОЦЕНКАХ ОШИБКИ ДЛЯ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ РЕАКЦИИ, ИМЕЮЩИМ ЗНАЧИТЕЛЬНЫЕ СКАЧКИ


**В. Г. Корнеев**[1,*]

*[1]199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7–9,*
*Санкт-Петербургский государственный университет, Россия*
**e-mail: vad.korneev2011@yandex.ru*

Поступила в редакцию 23.10.2019 г.
Переработанный вариант 28.05.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2020 г.

Получены гарантированные, робастные, вычисляемые апостериорные оценки погрешности приближенных решений уравнения $\Delta\Delta u + \kappa^2 u = f$ с постоянным на каждой подобласти разбиения области – в частности, на каждом конечном элементе – коэффициентом $\kappa \geq 0$, который хаотически изменяется между подобластями в достаточно широких пределах. Для конечно-элементных решений эти оценки робастны, сохраняя точность при $\kappa \in [0, ch^{-2}]$, $c = \mathrm{const}$, и обладают некоторыми другими полезными свойствами. Коэффициенты перед типичными нормами в их правых частях лишь незначительно хуже полученных ранее в случае постоянных $\kappa \equiv \mathrm{const}$. Оценки могут быть вычислены без предварительного использования процедур уравновешивания тестовых вектор-функций моментов. Техника их вывода сходна с использованной в предыдущих работах автора (2016–2019) для получения не улучшаемых по порядку апостериорных оценок погрешности. Библ. 33.

**Ключевые слова:** апостериорные оценки погрешности, сингулярно возмущенные эллиптические уравнения 4-го порядка, метод конечных элементов, кусочно постоянный коэффициент реакции, неулучшаемые по порядку оценки точности.

**DOI:** 10.31857/S0044466920110071

## ВВЕДЕНИЕ

Апостериорным оценкам погрешности для конечно-элементных решений бигармонического уравнения, уравнения изгиба тонких пластин, так же как для сингулярно возмущенных уравнений типа $\varepsilon^2\Delta^2 u - \Delta u = \phi$, посвящен целый ряд работ. Такие оценки получены для конформных, неконформных, смешанных методов, разрывного метода Галеркина (DG) и других (см. [1]–[14]). Однако, насколько известно автору, отсутствуют работы, посвященные задаче об изгибе тонкой пластины на винклеровском основании с кусочно постоянным коэффициентом постели, имеющим значительные скачки. В то же время известны работы по апостериорным оценкам погрешности для уравнения реакции-диффузии 2-го порядка с разрывным кусочно постоянным коэффициентом реакции. В них, как правило, допускалось только достаточно “мягкое” изменение коэффициента реакции между соседними конечными элементами, один из вариантов которого можно найти, например, в [15], [16]. В данной работе показано, что это ограничение может быть снято, а область допустимых величин скачков существенно расширена при незначительном ухудшении коэффициентов перед типичными нормами в правых частях апостериорных оценок.

Мы рассматриваем модельную задачу

$$\begin{aligned} &\Delta\Delta u + \sigma u = f(x) \quad \text{в} \quad \Omega, \\ &u = \partial u/\partial \mathbf{v} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

с $f \in L^2(\Omega)$ и первым краевым условием, в котором $\mathbf{v}$ – внутренняя нормаль к границе области. Основное отличие от предшествующих работ, включая работы автора [17]–[20], в том, что коэффициент $\sigma = \Bbbk^2$ предполагается поэлементно постоянным и удовлетворяет лишь одному ограничению $\sigma \le ch^{-4}$, $c = \text{const}$. Очевидно, это относительно слабое ограничение, допускающее весьма большие значения коэффициента и его скачков между смежными конечными элементами. Несколько удивительным оказалось то, что отличия апостериорных оценок, доказываемых в настоящей работе, от полученных при $\sigma \equiv \text{const}$ для уравнений 2-го порядка в [17], [18] и для уравнений порядка $2n$, $n \ge 1$, в [19], [20] нельзя назвать существенными: в их правых частях содержатся такие же нормы, а коэффициенты перед ними отличаются не более, чем в два раза. К тому же с использованием аппроксимационных свойств $L^2$- и $H^2$-проекций функций на конечно-элементные пространства доказательства оценок простые.

Апостериорные оценки погрешности из работ [17], [18] названы *согласованными*, благодаря двум важным свойствам:

1) порядок их точности относительно размера сетки $h$ такой же, как априорных оценок точных по порядку,

2) доказательство свойства 1), как и вычисление оценок, может быть выполнено с помощью тестирующих потоков (напряжений/усилий), обладающих лишь достаточными аппроксимационными свойствами и не требующих уравновешивания.

Так называемые *эффективные апостериорные оценки* погрешности, т.е. такие, для которых есть обратные оценки, являются согласованными и обе точны по порядку. Однако согласованность существенно более просто проверяемое свойство, чем эффективность.

К числу широко применяемых на практике относятся два типа оценок — апостериорные оценки через невязку и оценки, основанные на применении уравновешенных потоков/напряжений/моментов. К недостаткам оценок первого типа относится то, что их вывод существенно опирается на оценки аппроксимации, в результате чего коэффициенты в оценках существенно зависят от сетки и могут быть завышены. Такого рода эффективная оценка для задачи $\Delta\Delta u = f$ дана, например, в [13]. При применении оценок второго типа для каждого численного решения, например, уравнений второго порядка, находится лишь единственный тестирующий поток, вычисляемый посредством "равновесной" процедуры восстановления потока (equilibrated recovery procedure, см. [21]), зависящей не только от сетки, но и от решаемой задачи. Это понижает универсальность таких оценок. Кроме того, уравновешивание увеличивает диффузионную составляющую ошибки, и степень ее увеличения устанавливается только обратной оценкой, постоянные в которой чаще всего не оптимистичны. В итоге апостериорные оценки обоих типов, интенсивно развивавшиеся несколько последних десятилетий, имеют свои ограничения и их реальная точность, как правило, нуждается в проверке практикой.

Согласованные оценки более универсальны, поскольку для достижения неулучшаемой по порядку точности допускают применение любого тестирующего потока с аппроксимирующими свойствами такими же, как у численного потока, или лучшими. При этом известны многочисленные такие процедуры, преимущественно для восстановления потоков (см. [21]—[24]), глубоко изученные и созданные для оценщиков ошибки через невязку, широко используемых на практике. Главное преимущество согласованных оценок перед оценками со свободной вектор-функцией потока, известными ранее, в том, что они позволяют на порядок уточнить коэффициент перед $L^2$-нормой невязки в правой части (см. [17]—[20]). Техника вывода согласованных, гарантированных, робастных, вычисляемых апостериорных оценок погрешности переносится в настоящей работе на случай поэлементно постоянного коэффициента реакции со значительными скачками на межэлементных границах.

Обозначения $\|\cdot\|_k$ и $|\cdot|_k$ используются для норм и квазинорм в соболевских пространствах $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$ при соглашении, что $|\cdot|_0 = \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|$. Дополнительно нам понадобятся пространства $H_0^2(\Omega) := \{v \in H^2(\Omega) : u = \partial u/\partial v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$, $H_0^2(\Omega, \Delta\Delta) = \{v \in H_0^2(\Omega) : \Delta\Delta v \in L^2(\Omega)\}$ и $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^4$. В связи с задачей (1) полезно ввести пространство $\mathbf{M}(\Omega) = \{\mathbf{m} = \{m_{k,l}\}_{k,l=1}^2 \in$

$\in \mathbf{L}^2(\Omega) : m_{1,2} = m_{2,1}\}$ вектор-функций $\mathbf{m}$ и операторы $\mathcal{D} : H^2(\Omega) \to \mathbf{M}(\Omega)$ и $\mathcal{D}^* : \mathbf{M}(\Omega) \cap \cap\, \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{D}^*) \to L^2(\Omega)$, определяемые соотношениями

$$\mathcal{D}v = \left\{\frac{\partial^2 v}{\partial x_k \partial x_l}\right\}_{k,l=1}^2, \quad \mathcal{D}^*\mathbf{m} = \sum_{k,l=1}^2 \frac{\partial^2 m_{k,l}}{\partial x_k \partial x_l},$$

где $\mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{D}^*) = \{\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega) : \mathcal{D}^*\mathbf{m} \in L^2(\Omega)\}$. Если (1) есть задача об изгибе тонкой пластинки, вектор-функции $\mathbf{m} = \mathcal{D}u$ имеют смысл компонент изгибающих и крутящих моментов. Мы будем называть $m_{k,l}$ моментами, хотя в общем случае (коэффициент Пуассона и цилиндрическая жесткость не равны соответственно нулю и единице) они определяются более сложными выражениями. Там, где это не вызывает недоразумений, для норм $\|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\cdot)}$ в пространствах $\mathbf{L}^2(\cdot)$ используется обозначение $\|\cdot\|$, например, $\|\mathbf{m}\|$ обозначает $\|\mathbf{m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.

Для простоты мы ограничиваемся случаем полигональной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2$, которая триангулирована совместными квазиоднородными треугольными конечными элементами $\tau_r$, $r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}$, размера $h$, понимаемого как наибольший из диаметров треугольников $\tau_r$ (см. [25], [26]). Предполагаем, что комплекс конечных элементов индуцирует пространство $\mathcal{V}_h(\Omega) \subset H^2(\Omega)$ и подпространство $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega) = \{v \in \mathcal{V}_h(\Omega) : v = \partial v/\partial \mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$. На самом деле, результаты обобщаются на произвольные достаточно гладкие области, поскольку приемы, предложенные в [27], [28], позволяют получать конечно-элементные комплексы, определенные на таких областях посредством использования вблизи границы специальных криволинейных конечных элементов. Они порождают пространства $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$, которые обеспечивают те же порядки аппроксимации и сходимости, как в случае полигональных $\Omega$.

## 1. ОБЩАЯ АПОСТЕРИОРНАЯ ОЦЕНКА

Пусть $a(w, v) = (\mathcal{D}w, \mathcal{D}v)$, $\mathbb{V}(\Omega)$ — гильбертово пространство функций со скалярным произведением $[w, v] = a(w, v) + (\sigma w, v)$ и нормой $|\!|\!|v|\!|\!|^2 = [v, v]$, и $\mathbb{V}_0(\Omega) = \{v \in \mathbb{V}(\Omega) : v = \partial v/\partial \mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$. В слабой форме задачи (1) требуется найти функцию $u \in \mathbb{V}_0(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$a(u, v) + (\sigma u, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}_0(\Omega), \tag{2}$$

где $\sigma = \sigma_r = \text{const}$ при $x \in \tau_r$, $r = 1, 2 \ldots, \mathcal{R}$. Для широкого круга приближений решения $u$, в том числе полученных численными методами, слабая норма погрешности приближения меньше его сильной нормы. То есть, если $v$ — такое приближение, $v \in H_0^2(\Omega)$, и $e = v - u$ — его погрешность, то при некотором $\lambda_e > 1$ выполняется, например, неравенство, ср. [19, (5)],

$$\|e\|^2 \le \lambda_e^{-1} \|\mathcal{D}e\|^2. \tag{3}$$

Ниже используются также обозначения $\sigma_{\max} = \|\sigma\|_{L^\infty(\Omega)}$ и $\sigma_{\min} = \min_{x\in\Omega} \sigma$.

**Лемма 1.** *Пусть $u \in H_0^2(\Omega, \Delta\Delta)$, выполняется неравенство* (3), *$\sigma$ — произвольная неотрицательная поэлементно постоянная функция и $\sigma \le \sigma_*$ при некотором $\sigma_* = \text{const} \le \lambda_e$. Тогда для любой функции $v \in H_0^2(\Omega)$ и любой вектор-функции $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega, \mathcal{D}^*)$ справедлива оценка*

$$\begin{gathered} |\!|\!|e|\!|\!|^2 \le \Theta M(\sigma_*, v, \mathbf{m}), \\ \mathcal{M}(\sigma_*, v, \mathbf{m}) = \|\mathcal{D}v + \mathbf{m}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{\sigma_*}\|f - \sigma v - \mathcal{D}^*\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{gathered} \tag{4}$$

*в которой $\Theta = \max(\Theta_e, \gamma)$ и*

$$\Theta_e = 1 + \frac{1}{\lambda_e}(\sigma_* - \gamma\sigma_{\min}), \quad \gamma = \min\left(\beta, \frac{\sigma_*}{\sigma_{\max}}\right), \quad \beta = \frac{\lambda_e + \sigma_*}{\lambda_e + \sigma_{\min}}. \tag{5}$$

**Доказательство.** Доказательство лишь незначительно отличается от доказательства [19, теорема 1] для уравнений порядка $2n$ типа реакции-диффузии с постоянным $\sigma = \mathrm{const}$, см. также [17, lemma 1], и поэтому представлено кратко. Интегрируя по частям и применяя неравенство Коши, получаем

$$\begin{aligned} |||e|||^2 &= (\mathcal{D}e, \mathcal{D}e) + (\sigma e, e) = (\mathcal{D}v - \mathbf{m}, \mathcal{D}e) - (\mathcal{D}u - \mathbf{m}, \mathcal{D}De) + (\sigma e, e) = \\ &= (\mathcal{D}v - \mathbf{m}, \mathcal{D}e) - (f - \sigma v - \mathcal{D}^*\mathbf{m}, e) \le \|\mathcal{D}v - \mathbf{m}\|\|\mathcal{D}e\| + \|f - \sigma v - \mathrm{D}^*\mathbf{m}\|\|e\| \le \\ &\le \left\{\|\mathcal{D}v - \mathbf{m}\|^2 + \frac{1}{\sigma_*}\|f - \sigma v - \mathcal{D}^*\mathbf{m}\|^2\right\}^{1/2}\left\{\|\mathcal{D}e\|^2 + \sigma_*\|e\|\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Для второго сомножителя правой части, используя (3), при любом $\beta \in [1, \sigma_*/\sigma_{\max}]$ можно написать

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}e\|^2 + \sigma_*\|e\|^2 &= \|\mathcal{D}e\|^2 + (\sigma_* - \beta\sigma e, e) + \beta(\sigma e, e) \le \\ &\le \|\mathcal{D}e\|^2 + (\sigma_* - \beta\sigma_{\min})\|e\|^2 + \beta(\sigma e, e) \le \left(1 + \frac{\sigma_* - \beta\sigma_{\min}}{\lambda_e}\right)\|\mathcal{D}e\|^2 + \beta\|e\|^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Теперь выберем такое $\beta = \beta(\lambda_e, \sigma_*, \sigma_{\min})$, чтобы правая часть (7) приняла форму $\beta|||e|||^2$. Для этого должно выполняться условие

$$1 + (\sigma_* - \beta\sigma_{\min})/\lambda_e = \beta, \tag{8}$$

из которого получаем $\beta$, данное в (5).

Коэффициент $\beta$, найденный согласно (5), может быть больше $\sigma_*/\sigma_{\max}$. В этом случае $\beta = \sigma_*/\sigma_{\max}$ – максимальное допустимое значение и, переобозначив его через $\gamma$, подставляем в правую часть (7). Комбинируя рассмотренные два случая, приходим к выражению для $\Theta$, фигурирующему в (4).

Сделаем несколько замечаний относительно коэффициентов перед нормами в правой части (4). Прежде всего мы видим, что всегда $\Theta \le 2$. При $\sigma = \mathrm{const}$, что означает $\sigma_{\min} = \sigma_{\max} = \sigma$, имеем $\Theta = \beta = (\lambda_e + \sigma_*)/(\lambda_e + \sigma)$, и, как известно (см., например, [19]), $\lambda_e = \mathbb{O}(h^{-4})$ для решений методом конечных элементов в $H^4$-регулярных областях. Следовательно, в этом случае (4) совпадает с согласованными оценками из [19] (точными по порядку для приближенных решений методом конечных элементов при подстановке в них тестирующих моментов достаточной точности) и обладает указанными в этой работе достоинствами. Из (5) следует, что среди значений $\varkappa := \sigma_*/\sigma_{\max}$, при которых можно использовать $\Theta = \beta$, наименьшая величина, обозначаемая $\underline{\varkappa}$, достигает максимума при $\sigma_* = \lambda_e$ и $\sigma_{\min} = 0$. При этом $\underline{\varkappa} = 2$ и уменьшается при $\sigma_* < \lambda_e$.

Очевидно, что в общем случае простейшим выбором для использования в (4), (5) будет $\sigma_* = \lambda_e = 1/c_F$, где $c_F$ – постоянная из неравенства типа неравенства Фридрихса

$$\|v\|^2 \le c_F\|\mathcal{D}v\|^2 \quad \forall v \in H_0^2(\Omega). \tag{9}$$

Если дополнительно $\sigma_{\min} = 0$, то $\Theta = 2$, и оценка (4) принимает простейший вид

$$\|\mathcal{D}(v - u)\|^2 \le 2\left[\|\mathcal{D}v + \mathbf{m}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)} + \frac{1}{c_F}\|f - \sigma v - \mathcal{D}^*\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega)}\right], \tag{10}$$

аналогичный известной оценке для приближенных решений уравнения Пуассона (см., например, [29]). Однако необходимо иметь в виду два обстоятельства. 1) В соответствии с леммой 1 оценка (10) справедлива не только при постоянном $\sigma$, но и при кусочно-постоянном с произвольными $\sigma_r$ из отрезка $[0, c_F]$. Это относится и к оценке работы [29], полученной для случая постоянного $\sigma$. 2) Выбор $\sigma_* = \lambda_e = 1/c_F$ делает коэффициент перед нормой невязки в $\mathcal{M}$ (см. (4)) значительно превосходящим его точное значение.

Если $u \in H_0^2(\Omega, \Delta\Delta)$ и $v$ принадлежит тому же пространству, что может иметь место при применении метода Галеркина, то можно использовать $\mathbf{m} = \mathcal{D}v$. При этом апостериорная оценка в случае $\sigma_{\min} = 0$ принимает вид

$$|||e|||^2 \le \left(\frac{1}{\sigma_*} + \frac{1}{\lambda}\right)\|f - \sigma v - \mathcal{D}^*\mathbf{m}\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{11}$$

## 2. АПОСТЕРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В этом разделе мы получим две оценки на основе двух предположений (A) и (B), сформулированных ниже. Пусть $H_0^l(\Omega) := H^l(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $l \ge 2$, и $\mathcal{P}_p$ – пространство полиномов степени не выше $p$ по совокупности переменных.

(A) Область триангулирована геометрически совместными треугольными конечными элементами, удовлетворяющими условиям квазиоднородности с параметром сетки $h$, понимаемым как максимальный из диаметров конечных элементов (см., например, [26], [30]). Конечно-элементный ансамбль индуцирует пространство $\mathcal{V}_{h,0}(\Omega) = \{v \in H_0^2(\Omega) : v|_{\tau_r} \in \mathcal{P}_p,\ r = 1, 2, \ldots, \mathcal{R}\}$, при этом существует такой линейный оператор $Q_h : H_0^2(\Omega) \mapsto \mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$, что для $\forall w \in H_0^l(\Omega)$ найдется аппроксимация $\tilde{w} = Q_h w$, для которой

$$|\tilde{w} - w|_k \le c_{k,l} h^{l-k} |w|_l, \quad c_{k,l} = \text{const}, \tag{12}$$

для $k = 0, 1, 2$, $l = 2, \ldots, p+1$.

(B) Область $\Omega$ такова, что при $\sigma \equiv 0$, любой $f \in L^2(\Omega)$ и некоторой постоянной $c_\circ$, решение $u$ задачи (1) удовлетворяет неравенству

$$|u|_4 \le c_\circ \|f\|. \tag{13}$$

Заметим, что если $\sigma = \text{const} \ge 1$, то постоянная $c_\circ$ не больше удвоенной $c_\circ$ для случая $\sigma \equiv 0$ (см. [19]).

В некоторых ситуациях неравенство (3) доказывается просто. Введем обозначения $e_{\text{fem}} = u_{\text{fem}} - u$ ($u_{\text{fem}}$ – решение метода конечных элементов для задачи (1)), $u_\Delta$ – конечно-элементная функция, минимизирующая функционал $\|\mathcal{D}(v-u)\|^2$ на $v \in \mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$, $e_\Delta = u_\Delta - u$ – соответствующая погрешность, и, наконец, $\lambda_\Delta$ – число, удовлетворяющее неравенству

$$\|e_\Delta\| \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_\Delta}}\|\mathcal{D}e_\Delta\|. \tag{14}$$

Через $\lambda_{\text{fem}}$ обозначим число $\lambda_{\text{e}}$ для погрешности $e = e_{\text{fem}}$.

**Теорема 1.** *Пусть $u \in H_0^2(\Omega, \Delta\Delta)$, выполняются предположения* (A), (B), *$\sigma$ – произвольная положительная поэлементно постоянная функция со значениями $\sigma_r$ на отрезке $[\sigma_{\min}, \sigma_{\max}]$ и $\sigma \le \sigma_*$ при некотором $\sigma_* = \text{const} \le \lambda_{\text{fem}}$. Пусть также $\sigma_{\max}/\sigma_{\min} \ge c_\sigma > 0$. Тогда для $e = e_{\text{fem}}$ справедлива апостериорная оценка* (4), (5) *с $\lambda_{\text{e}}^{-1} = \lambda_{\text{fem}}^{-1} = c_\sigma(c_\circ c_{2,4}h^2)^2$.*

**Доказательство.** Помимо леммы 1, ключевым фактом доказательства является неравенство

$$\lambda_\Delta^{-1} \le 1\Big/(c_\circ c_{2,4}h^2)^2, \tag{15}$$

которое является следствием оценки скорости сходимости в $H^2(\Omega)$, вытекающей из (12), (13), и трюка Обэна–Нитше (см. [31], [32]). Доказательство (15) для более общего случая можно найти в [19, lemma 1]. В рассматриваемом случае определения погрешностей $e_{\text{fem}}$ и $e$ приводят к неравенствам

$$\|\mathbb{k}e_{\text{fem}}\| \le \|\mathbb{k}e_\Delta\|, \quad \|\mathcal{D}e_\Delta\| \le \|\mathcal{D}e_{\text{fem}}\|, \tag{16}$$

при этом первое из них получаем аналогично случаю $\sigma = \text{const}$ (см. [18]). Из (16) следует

$$\lambda_{\text{fem}}^{-1} \le c_\sigma \lambda_\Delta^{-1}, \tag{17}$$

и, комбинируя (15), (17) и лемму 1, подтверждаем теорему 1.

Имеется другой путь вывода апостериорной оценки, робастной для всех $\sigma \le \mathbb{C}h^{-4}$, $\mathbb{C} = \text{const}$, в отличие от оценки (4), (5), (17), теряющей точность с ростом $c_\sigma$ (см. ниже). Обозначение $\hat{f}$ используем для функции, имеющей на каждом конечном элементе вид $\hat{f}\big|_{\tau_r} = f_r = Q_h^r f$, где $Q_h^r : L^2(\tau_r) \mapsto \mathcal{P}_p$ – оператор ортогональной $L^2$-проекции на пространство $\mathcal{P}_p$ полиномов степени не выше $p$.

**Теорема 2.** *Пусть* $u \in H_0^2(\Omega, \Delta\Delta)$, $u_{\text{fem}} \in \mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$, *где* $u_{\text{fem}}$ – *решение метода конечных элементов, и* $\mathbf{m} \in \mathbf{L}^2(\Omega, \mathfrak{D}^*)$. *Пусть также предположения* (A), (B) *выполняются и* $0 \le \sigma \le \sigma_* \le \lambda_\Delta$. *Тогда*

$$\begin{gathered}|||u_{\text{fem}} - u|||^2 \le \Theta \mathcal{M}(\sigma_*, u_{\text{fem}}, \mathbf{m}),\\ \mathcal{M}(\sigma_*, u_{\text{fem}}, \mathbf{m}) = \left\{ \|\mathfrak{D}u_{\text{fem}} + \mathbf{m}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\sigma_*}\left[\|(\hat{f} - \sigma u_{\text{fem}} - \mathfrak{D}^*\mathbf{m})\|_{L_2(\Omega)} + \|f - \hat{f}\|_{L_2(\Omega)}\right]^2 \right\},\end{gathered} \tag{18}$$

*причем* $\Theta = 1 + \sigma_*/\lambda$, *и можно принять* $\lambda_\Delta = \mathbb{C}h^{-4}$, $\mathbb{C} = 1/(c_\text{o} c_{2,4})^2$.

**Доказательство.** Так же, как в (6), для $e = e_{\text{fem}} = u_{\text{fem}} - u$ и $\forall w \in \mathcal{V}_{h,0}(\Omega)$, интегрируя по частям и применяя неравенство Коши, получаем

$$\begin{gathered}(\mathfrak{D}e, \mathfrak{D}e) + (\sigma e, e) = (\mathfrak{D}e, \mathfrak{D}(e + w)) + (\sigma e, e + w) = \\ \le \left\{ \|\mathfrak{D}v - \mathbf{m}\|^2 + \frac{1}{\sigma_*}\left[\|\hat{f} - \sigma v - \mathfrak{D}^*\mathbf{m}\| + \|f - \hat{f}\|\right]^2 \right\}^{1/2} \left\{\|\mathfrak{D}(e + w)\|^2 + \sigma_* \|e + w\|^2\right\}^{1/2}.\end{gathered} \tag{19}$$

Пусть $Q_\Delta : H_0^2(\omega) \mapsto \mathcal{V}_{h,0}$ – оператор ортогонального проектирования, сопоставляющий $u_\Delta$ каждой функции $u \in H_0^2(\omega)$. Положив $w = -Q_\Delta e_{\text{fem}}$, видим, что $e + w = (I - Q_\Delta)e = e$ и далее

$$\|\mathfrak{D}(e + w)\|^2 + \sigma_* \|e + w\|^2 = \|\mathfrak{D}e_\Delta\|^2 + \sigma_* \|e_\Delta\|^2 \le \|\mathfrak{D}e_\Delta\|^2 + \sigma_* \|e_\Delta\|^2 + \|ke\|^2. \tag{20}$$

Нормы $\|\Delta e_\Delta\|$ и $\|e_\Delta\|$ оценены в (16) и (14), (17) соответственно. Как следствие, получаем оценку

$$\|\mathfrak{D}(e + w)\|^2 + \sigma_* \|e + w\|^2 \le \Theta |||e_{\text{fem}}|||^2, \quad \Theta = 1 + \sigma_*/\lambda, \tag{21}$$

которая вместе с (19) завершает доказательство.

Для повышения точности апостериорной оценки важен правильный выбор вектор-функции моментов $\mathbf{m}$, для вычисления которой применяется, как правило, процедура восстановления моментов. Эти процедуры являются аналогами процедур восстановления потоков для решений метода конечных элементов эллиптических уравнений второго порядка и по решению $u_{\text{fem}}$ вычисляют вектор-функцию $\mathbf{m}$ подходящего конечно-элементного пространства $\mathbb{M}(\Omega) \subset \mathbf{L}^2(\Omega, \mathfrak{D}^*)$. Наиболее популярную из них называют *процедурой осреднения*. В ней любой узловой параметр функции $m_{k,l}$ любого узла определяется осреднением с весами значений $\partial^2 u_{\text{fem}}/\partial x_k \partial x_l$ или производных от $\partial^2 u_{\text{fem}}/\partial x_k \partial x_l$, соответствующих узловому параметру, по элементам, содержащим узел. Весами служат отношения площадей конечных элементов к площади звезды конечных элементов, содержащих узел (см. [13], [21], [22]). В качестве $\mathbb{M}(\Omega)$ удобно использовать пространство $\mathbb{M}(\Omega) = [\mathcal{V}_h(\Omega)]^4$. Однако для согласованности порядков точности левой и правой частей апостериорной оценки достаточно использовать более простые пространства, обеспечивающие на два порядка меньшие, чем пространство $[\mathcal{V}_h(\Omega)]^4$, порядки аппроксимации. Нередко прибегают к процедуре наименьших квадратов, определяя моменты $m_{k,l}$ как $L^2(\Omega)$ ортогональные проекции производных $\partial^2 u_{\text{fem}}/\partial x_k \partial x_l$ на соответствующее подпространство $\mathbb{M}_{k,l}(\Omega)$ пространства $\mathbb{M}(\Omega)$.

Примеры процедур восстановления моментов и потоков можно найти в [13], [21], [33] и других работах.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как отмечалось во введении, известные апостериорные оценки погрешности при поэлементно постоянном коэффициенте реакции были получены при условии его слабой локальной вариации. Последнее может подразумевать, например, что на каждой подобласти $\overline{\delta}_r := \cup\overline{\tau}_{r'}$, являющейся объединением таких конечных элементов, для которых $\overline{\tau}_{r'} \cap \overline{\tau}_r \neq \varnothing$, имеем $\sigma_{r'} \leq \hat{c}\sigma_r$ для $\sigma_r > 0$ и $\sigma_{r'} \leq \hat{c}$ для $\sigma_r = 0$. Оценки данной работы имеют более широкий круг применения. Например, теорема 2 применима к задачам с хаотическим изменением $\sigma$ от элемента к элементу в достаточно широком диапазоне $[0, \mathbb{C}h^{-4}]$. В то же время коэффициенты перед типичными нормами в правой части апостериорных оценок только незначительно хуже коэффициентов в оценках для задач с постоянным $\sigma$. К положительным свойствам одной из полученных оценок относится так же то, что известные гарантированные, робастные, согласованные оценки для $\sigma = \text{const}$ являются ее частным случаем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Verfürth R.* A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Chichester: Wiley-Teubner, 1995.
2. *Charbonneau A., Dossou K., Pierre R.* A residual-based a posteriori error estimator for the Ciarlet-Raviart formulation of the first biharmonic problem // Numer. Methods Partial Differential Eq. 1997. V. 13. P. 93–111.
3. *Neittaanmaki P., Repin S.I.* A posteriori error estimates for boundary-value problems related to the biharmonic operator // East-West J. Numer. Math. 2001. V. 2. P. 157–178.
4. *Adjerid S.* A posteriori error estimates for fourth-order elliptic problems // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 2002. V. 191. P. 2539–2559.
5. *Gratsch Th., Bathe K.-J.* A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis // Computers and Structures. 2005. V. 83. P. 235–265.
6. *Liu K.* A Gradient Recovery-based a Posteriori Error Estimators for the Ciarlet–Raviart Formulation of the Second Biharmonic Equations // Appl. Math. Sci. 2007. V. 1. P. 997–1007.
7. *Beirao da Veiga*, *Niiranen J., Stenberg R.L.* A posteriori error estimates for the Morley plate bending element // Numer. Math. 2007. V. 106. V. 165–179.
8. *Feng X., Wu H.* A posteriori error estimates for finite element approximations of the Cahn-Hilliard equation and Hele-Shaw flow // J. Comput. Math. 2008. V. 26. P. 767–796.
9. *Wang M., Zhang S.* A posteriori estimators of nonconforming finite element method for fourth order elliptic perturbation problems // J. Comp. Math. 2008. V. 26. P. 554–577.
10. *Brenner S.C., Gudi T., Sung L.-Y.* An a posteriori error estimator for a quadratic $C^0$ interior penalty method for the biharmonic problem // IMA J. Numer. Anal. 2010. V. 30. № 3. P. 777–798. https://doi.org/10.1093/imanum/drn057
11. *Hansbo P., Larson M.G.* A posteriori error estimates for continuous/discontinuous Galerkin approximations of the Kirchhoff–Love plate // Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 2011. V. 200. № 47–48. P. 3289–3295. https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.07.007
12. *Georgoulis E.H., Houston P., Virtanen J.* An a posteriori error indicator for discontinuous Galerkin approximations of fourth-order elliptic problems // IMA J. Num. Anal. 2011. V. 31. P. 281–298.
13. *Gudi T.* Residual-based a posteriori error estimator for the mixed finite element approximation of biharmonic equation // Numer. Meth. Part. Diff. Engng. 2011. V. 27. P. 315–328.
14. *Du S.H., Lin R., Zhang Z.M.* Robust residual-based a posteriori error estimators for mixed finite element methods for fourth order elliptic singularly perturbed problems // arXiv:1609.04506v1 [math.NA] 15 Sep 2016, 1–21.
15. *Ainsworth M., Vejchodský T.* Robust error bounds for finite element approximation of reaction-diffusion problems with non-constant reaction coefficient in arbitrary space dimension // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 2014. V. 281. P. 184–199.
16. *Ainsworth M., Vejchodský T.* A simple approach to reliable and robust a posteriori error estimation for singularly perturbed problems // Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 2019. V. 353. P. 373–390. https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.05.014
17. *Korneev V.G.* On a renewed approach to a posteriori error bounds for approximate solutions of reaction-diffusion equations // Advanced Finite Element Methods with Applications. Springer, 2019.
18. *Корнеев В.Г.* О контроле погрешности при численном решении уравнений реакции-диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 1. С. 3–20.

19. *Корнеев В.Г.* О точности апостериорных функциональных мажорант погрешности приближенных решений эллиптических уравнений // Докл. АН. Математика 2017. V. 475. № 6. P. 605–608.
20. *Korneev V., Kostylev V.* Some a posteriori error bounds for numerical solutions of plate in bending problems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. V. 39. № 7. P. 904–915.
21. *Ainsworth M., Oden T.* A posteriori estimation in finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000.
22. *Xu J., Zhang Z.* Analysis of recovery type a posteriori error estimators for mildly structured grids // Math. Comput. 2003. V. 73. № 247. P. 1139–1152.
23. *Zhang Z.* Ultracovergence of the patch recovery technique // Math. Comput. 1996. V. 65. № 216. P. 1431–1437.
24. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* The superconvergence patch recovery (SPR) and adaptive finite element refinement // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1992. V. 101. № 207–224.
25. *Ciarlet P.G.* The finite element method for elliptic problems. Amsterdam: North-Holland, 1978.
26. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. Ленинград: Изд-во Ленинградского гос. ун-та, 1977.
27. *Корнеев В.Г.* Точная аппроксимация границы при численном решении эллиптических уравнений высоких порядков. Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский университет, 1991.
28. *Корнеев В.Г., Хусанов К.А.* Криволинейные конечные элементы класса $C^1$ с сингулярными координатными функциями // Дифференц. ур-ния. 1986. V. 22. № 12. P. 2144–2157.
29. *Репин С., Фролов М.* Об апостериорных оценках точности приближенных решений краевых задач для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. V. 42. № 12. P. 1774–1787.
30. *Korneev V.G., Langer U.* Dirichlet-Dirichlet Domain Decomposition Methods for Elliptic Problems: h and hp Finite Element Discretizations. London: World Scientific, 2015.
31. *Aubin J.-P.* Approximation of elliptic boundary-value problems. Wiley-Interscience, 1972.
32. *Nitsche J.* Zur Konvergenz von Naherungsverfahren bezuglich verschiedener Normen // Numer. Math. 1970. V. 15. № 3. P. 224–228.
33. *Brenner S.C., Sung L.-Y.* $C^0$ interior penalty methods for fourth order elliptic boundary value problems on polygonal domains // J. Sci. Comput. 2005. № 22/23. P. 83–118.