ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 11, с. 1985–1997

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НЕЛИНЕЙНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ШРЁДИНГЕРА

© 2020 г. М. А. Мусаева

AZ-1000 Baku, 68, Uzeyir Hacıbeyli str., Азербайджанский Государственный Педагогический Университет, Азербайджан

e-mail: musayeva08@inbox.ru

Поступила в редакцию 28.02.2020 г.
Переработанный вариант 28.02.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2020 г.

Работа посвящена вариационным методам решения задачи об одновременном определении неизвестных комплекснозначных коэффициентов младшего и нелинейного членов нестационарного уравнения типа Шрёдингера, которое обобщает известное квантовомеханическое уравнение Шрёдингера. Отыскиваемый коэффициент младшего члена является комплекснозначным квантовым потенциалом. Такие задачи встречаются в нелинейной оптике, изучении процессов в квантовых волноводах и в других областях. Доказана разрешимость вариационной постановки рассматриваемой задачи и установлено необходимое условие для ее решения, а также найдено выражение для градиента функционала качества, составленного по финальному наблюдению. Все это служит для разработки и обоснования итеративного алгоритма решения рассматриваемой задачи. Приведен пример неустойчивости ее решения и указан итеративный регуляризующий алгоритм решения задачи. Библ. 14.

Ключевые слова: уравнение типа Шрёдингера, обратные задачи, комплекснозначный коэффициент уравнения, необходимое условие экстремума, градиент функционала, финальное наблюдение, итеративная регуляризация.

DOI: 10.31857/S0044466920110101

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейное нестационарное уравнение типа Шрёдингера с комплекснозначными коэффициентами встречается в нелинейной оптике, наноисследованиях, изучении процессов в квантовых волноводах и в других областях современной практики. Рассмотренное ниже уравнение является обобщением известного уравнения Шрёдингера в квантовой механике. Комплексные коэффициенты являются показателями преломления и поглощения среды. При математическом моделировании квантовых явлений они оказываются неизвестными функциями и подлежат определению (см. [1]–[4]).

Определение потенциала взаимодействия частиц всегда было одной из основных проблем квантовой механики. Исторически простой подход к решению этой проблемы состоял в интуитивном и полуэмпирическом выборе потенциала в виде некоторой функции с неизвестными параметрами в ее выражении. Определение этих неизвестных параметров проводилось на основе дополнительных наблюдений изучаемых процессов. По сей день в атомистическо-молекулярных компьютерных вычислениях используются разные формы потенциалов взаимодействия. Потенциалы Кулона, “пара взаимодействия” Морса и ближнего взаимодействия Ван-дер-Ваальса являются часто используемыми в практике для этой цели потенциалами. Во всех случаях определения квантовых потенциалов преобладают вариационные методы.

Определение квантовых потенциалов относится к классу обратных и некорректных задач математической физики (см. [1]–[4], [5]–[9]). Ниже приведен пример неустойчивости решения изучаемых задач. Ввиду неустойчивости решения обратных задач, начиная с 60-х годов прошлого столетия, для их решения были созданы и развиты методы регуляризации (см. [5]–[9]).

Данная работа посвящена изучению разрешимости вариационной постановки задачи об одновременном определении неизвестных комплекснозначных коэффициентов младшего и нелинейного членов нестационарного уравнения типа Шрёдингера в классе измеримых ограниченных функций действительной и мнимой части этих коэффициентов, а также указан устойчивый итеративный алгоритм для их нахождения. Задача определения неизвестных коэффициентов уравнения Шрёдингера ранее была предметом изучения в ряде работ (см. [1]–[4] и библиографию там). Весьма мало исследованы задачи об определении нескольких неизвестных коэффициентов, особенно комплекснозначных, а также задачи об определении коэффициентов нелинейных слагаемых уравнений типа Шрёдингера. Решения названных задач связаны с рядом трудностей. Ниже к этим задачам применяются более тонкие априорные оценки, полученные в работах [2], [3] для уравнений типа Шрёдингера.

Вариационная формулировка рассматриваемой задачи, которая исследуется в данной работе, дает возможность не только теоретически обосновать ее разрешимость, но и указать итеративные методы определения неизвестных коэффициентов уравнения. В работе выводится формула для градиента критерия качества, а также доказывается необходимое условие, которое положено в основу итерационных методов устойчивого приближенного решения исходной задачи. В работе [9] на примере систем алгебраических уравнений показано влияние разрешимости задачи на порядок сходимости приближенных решений. Поэтому условия разрешимости и обоснование вычислительных алгоритмов решения взаимосвязаны. В данной работе вариационные методы применены не только для изучения вопросов разрешимости, но и для разработки устойчивых вычислительных алгоритмов решения (см. [3], [5], [7]–[11]).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $l > 0$, $T > 0$ – заданные числа, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, $\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$, $\Omega = \Omega_T$; $L_p(0,l)$ – лебегово пространство измеримых на $(0,l)$ функций, суммируемых со степенью $p \ge 1$; $C^k([0,T],B)$ – банахово пространство, состоящее из всех определенных и k $(k \ge 0)$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0,T]$ функций со значениями в банаховом пространстве B; $W_p^k(0,l)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$ – соболевские пространства функций с обобщенными производными порядка k по переменной x, при $0 \le x \le l$ и с обобщенными производными порядка κ, $m \ge 0$ по переменным x, t, соответственно, суммируемыми со степенью $p \ge 1$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ – подпространство пространства $W_2^1(0,l)$, элементы которого обращаются в нуль на концах отрезка $[0,l]$, $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$; символ $\overset{0}{\forall}$ означает, что данное свойство имеет место для почти всех значений переменной величины. Ниже всюду положительные постоянные, не зависящие от оцениваемых величин, обозначим через c_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, и комплексное сопряжение обозначим чертой над функцией.

Рассмотрим следующее нелинейное нестационарное уравнение типа Шрёдингера:

$$i\rho^2(x)\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) - a(x)\psi + v_0(x)\psi + v_1(x)|\psi|^2\psi = f(x,t), \quad (x,t)\in\Omega, \tag{1}$$

где i – мнимая единица, $\rho(x)$, $a_0(x)$, $a(x)$ – заданные вещественнозначные измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 < \mu_0 \le \rho(x), \quad a_0(x) \le \mu_1, \quad \left|\frac{da_0(x)}{dx}\right| \le \mu_2 \quad \overset{0}{\forall} x \in (0,l), \quad \mu_0,\mu_1,\mu_2 = \text{const} > 0; \tag{2}$$

$$0 \le a(x) \le \mu_3 \quad \overset{0}{\forall} x \in (0,l), \quad \mu_3 = \text{const} > 0; \tag{3}$$

$f(x,t) = f \in W_2^{0,1}(\Omega)$ – заданная комплекснозначная измеримая функция, $v_0(x)$, $v_1(x)$ – неизвестные комплекснозначные коэффициенты уравнения (1).

Пусть для уравнения (1) заданы следующие начальное и краевые условия:

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l), \quad \psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{4}$$

где $\varphi(x) = \varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ – комплекснозначная измеримая функция. Рассматриваемая задача заключается в определении неизвестных комплекснозначных коэффициентов $v_0(x)$, $v_1(x)$ уравнения (1) на основе условий (2)–(4) и дополнительного условия, заданного в виде финального наблюдения:

$$\psi(x,T) = y(x), \quad x \in (0,l), \tag{5}$$

где $y = y(x)$ – заданная комплекснозначная функция из $L_2(0,l)$.

Займемся вариационной формулировкой этой задачи. Функцию $v = v(x) = (v_0(x), v_1(x))$ представим в виде вектор-функции с четырьмя вещественнозначными компонентами: $v = v(x) = (v_{01}(x), v_{02}(x), v_{11}(x), v_{12}(x))$, $v_{m1}(x) = \operatorname{Re} v_m(x)$, $v_{m2}(x) = \operatorname{Im} v_m(x)$, $m = 0, 1$, $v_0(x) = \operatorname{Re} v_0(x) + i \operatorname{Im} v_0(x)$, $v_1(x) = \operatorname{Re} v_1(x) + i \operatorname{Im} v_1(x)$.

Пусть функция $v = v(x) = (v_0(x), v_1(x))$ ищется на множестве

$$V \equiv \{v = (v_{01}, v_{02}, v_{11}, v_{12}) : v_{ms} \in L_2(0,l), |v_{0s}(x)| \le b_s,$$
$$h_s \le v_{1s}(x) \le d_s,\ m = 0,1;\ s = 1,2,\ \overset{0}{\forall} x \in (0,l)\},$$

где $b_s \ge 0$, d_s, h_s, $s = 1,2$ – заданные числа такие, что $h_2 \ge 2|h_1|$. Множество V назовем множеством допустимых решений.

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из условий (1)–(4) при каждом выбранном $v \in V$ назовем прямой задачей. Под решением этой задачи будем понимать функцию $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из пространства

$$B_0 \equiv C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap C^1([0,T], L_2(0,l)),$$

удовлетворяющую уравнению (1) для любого $t \in [0,T]$ и почти всех $x \in (0,l)$, а условиям (4) для почти всех $x \in (0,l)$ и $t \in (0,T)$ соответственно.

Понятно, что прямая задача является начально-краевой задачей для уравнения (1). Вопросы корректности этой задачи с комплекснозначными коэффициентами уравнения типа Шрёдингера ранее были мало изучены. Отметим лишь работы [1], [4], [12], где для этого уравнения, в основном, с вещественнозначными, а при дополнительных предположениях с комплекснозначными коэффициентами были доказаны теоремы разрешимости. В работах [2], [3] при более общих предположениях установлена разрешимость и доказаны более тонкие априорные оценки для решения начально-краевой задачи.

Рассмотрим задачу о минимизации функционала:

$$J_\alpha(v) = \|\psi(.,T) - y\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|v - \omega\|^2_H \tag{6}$$

на множестве V, при условиях (1)–(4), где $H \equiv (L_2(0,l))^4$, $\omega \in H$ – заданный элемент, число $\alpha \ge 0$, заранее задается или определяется из дополнительного условия, например, по “принципу невязки”, как в работах [5], [7], [9], [10] и др. В этих работах развита методика выбора параметра $\alpha \ge 0$ для решения неустойчивых задач на основе априорной и апостериорной дополнительной информации.

3. РАЗРЕШИМОСТЬ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Далее считаем, что V – заданное непустое ограниченное замкнутое и выпуклое множество в гильбертовом пространстве $H = (L_2(0,l))^4$. Изучим разрешимость вариационной задачи (6). В работе [2] доказывается, что если функции $\rho(x)$, $a_0(x)$, $a(x)$, $f(x,t)$, $\varphi(x)$ удовлетворяют перечисленным выше условиям, тогда для каждого фиксированного $v \in V$ прямая задача (1)–(4) имеет единственное решение в пространстве B_0 и для этого решения верна оценка

$$\|\psi(.,t)\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} \le c_0\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right) \tag{7}$$

для $\forall t \in [0,T]$, где $c_0 > 0$ – некоторая постоянная.

Теорема 1. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Тогда при любом* $\alpha \ge 0$ *и* $\forall\omega \in H$ *вариационная задача* (6) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Сперва проверим непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Пусть $\delta v \in H$ – приращение произвольного элемента $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$ и $\delta\psi = \delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v) - \psi(x,t;v)$, где $\psi(x,t;v)$ – решение прямой задачи (1)–(4) при $v \in V$. Из соотношений (1)–(4) следует, что функция $\delta\psi = \delta\psi(x,t)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$\begin{gathered} i\rho^2(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right) - a(x)\delta\psi + (v_0(x) + \delta v_0(x))\delta\psi + \\ + (v_1(x) + \delta v_1(x))\left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)\delta\psi + (v_1(x) + \delta v_1(x))\psi_\delta\psi\delta\bar{\psi} = \\ = -\delta v_0(x)\psi - \delta v_1(x)|\psi|^2\psi, \quad (x,t) \in \Omega, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\delta\psi(x,0) = 0, \quad x \in (0,l), \quad \delta\psi(0,t) = \delta\psi(l,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{9}$$

где $\psi_\delta = \psi_\delta(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v)$. Теперь оценим решение этой начально-краевой задачи. С этой целью обе части уравнения (8) умножим на функцию $\delta\bar{\psi}(x,t)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_t. Тогда, вычитая из полученного равенства его комплексное сопряжение и используя условие (9), имеем

$$\begin{gathered} \|\rho(x)\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(D)} + 2\int_{\Omega_t}(v_{02}(x) + \delta v_{02}(x))|\delta\psi|^2\,dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}(v_{12}(x) + \delta v_{12}(x))\left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2\,dx = \\ = -2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}(\delta v_0(x)\psi\delta\bar{\psi})\,dxd\tau - \\ - 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left(\delta v_1(x)|\psi|^2\psi\delta\bar{\psi}\right)dxd\tau - 2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left((v_1(x) + \delta v_1(x))\left(\psi\psi_\delta(\delta\bar{\psi})^2\right)\right)dxd\tau \end{gathered}$$

для $\forall t \in [0,T]$. Отсюда в силу условия $v + \delta v \in V$ получим неравенство

$$\begin{gathered} \|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(D)} + 2h_2\int_{\Omega_t}\left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2\,dxd\tau \le 2b_2\int_{\Omega_t}|\delta\psi|^2 dxd\tau + \\ + 2\int_{\Omega_t}|\delta v_0(x)||\psi||\delta\psi|\,dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}|\delta v_1(x)||\psi|^3|\delta\psi|\,dxd\tau + \\ + \int_{\Omega_t}|v_1(x) + \delta v_1(x)|\left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2\,dxd\tau, \quad \forall t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{10}$$

Из предположения, что $v + \delta v \in V$, имеем

$$|v_1(x) + \delta v_1(x)| \le |v_{11}(x) + \delta v_{11}(x)| + |v_{12}(x) + \delta v_{12}(x)| \le |h_1| + h_2 \quad \overset{0}{\forall} x \in (0,l). \tag{11}$$

С учетом (11) и условия $h_2 \ge 2|h_1|$, из (10) получим неравенство

$$\begin{gathered} \|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(D)} + \frac{h_2}{2}\int_{\Omega_t}\left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)|\delta\psi|^2\,dxd\tau \le 2b_2\int_{\Omega_t}|\delta\psi|^2 dxd\tau + \\ + 2\int_{\Omega_t}|\delta v_0(x)||\psi||\delta\psi|\,dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}|\delta v_1(x)||\psi|^3|\delta\psi|\,dxd\tau \quad \forall t \in [0,T]. \end{gathered} \tag{12}$$

В силу теорем вложения, пространство $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)\right)$ вложено в пространство $C(\bar{\Omega})$ [12]. Поэтому имеют место следующие неравенства:

$$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}}|\psi(x,t)|^2 \le c_1\|\psi\|^2_{C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)\right)}, \quad \max_{(x,t)\in\bar{\Omega}}|\psi_\delta(x,t)|^2 \le c_1\|\psi_\delta\|^2_{C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)\right)}. \tag{13}$$

Из этих неравенств, с учетом (12) и неравенства Коши–Буняковского, а также леммы Гроноулла имеем

$$\|\delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_2\|\delta v\|^2_H \quad \forall t\in[0,T]. \tag{14}$$

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на произвольном элементе $v\in V$:

$$\delta J_0(v) = J_0(v+\delta v) - J_0(v) = 2\int_0^l \mathrm{Re}\left[(\psi(x,T)-y(x))\,\delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx + \|\delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{15}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского и используя оценки (7) и (14), а также условие $y\in L_2(0,l)$, получаем справедливость оценки:

$$|\delta J_0(v)| \le c_3\left(\|\delta v\|_H + \|\delta v\|^2_H\right) \quad \forall v\in V. \tag{16}$$

Отсюда следует, что $\delta J_0(v)\to 0$ при $\|\delta v\|_H\to 0$ для $\forall v\in V$ и функционал $J_0(v)$ непрерывен на множестве V.

Ввиду того, что $J_\alpha(v)\ge 0$, $\forall v\in V$, этот функционал ограничен снизу на множестве V для любого $\alpha\ge 0$. Поэтому существует минимизирующая последовательность для этого функционала. Возьмем любую минимизирующую последовательность $\{v^{(k)}\}\in V$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty}J_\alpha(v^{(k)}) = J_{\alpha*} = \inf\limits_{v\in V}J_\alpha(v)$. Положим $\psi_k = \psi_k(x,t)\equiv\psi\left(x,t;v^{(k)}\right)$, $k=1,2,\ldots$. Элемент $v^{(k)}$ при любом k принадлежит множеству V и в силу сказанного выше утверждения прямая задача (1)–(4) при каждом k имеет единственное решение из B_0 и тогда справедлива оценка

$$\|\psi_k(.,t)\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi_k(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} \le c_0\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}\right), \quad k=1,2,\ldots \tag{17}$$

для $\forall t\in[0,T]$. Правая часть этой оценки не зависит от k. Поскольку V является непустым замкнутым и ограниченным множеством пространства H, то из последовательности $\{v^{(k)}\}$ можно извлечь подпоследовательность (для простоты изложения снова обозначим через $\{v^{(k)}\}$), которая в $L_2(0,l)$ $(*)$-слабо сходится: $v_m^{(k)}\to v_m$, при $m=0,1$ и $k\to\infty$. В силу структуры множества V нетрудно проверить, что оно является $(*)$-слабо замкнутым множеством, следовательно, $v\in V$ и справедливо следующее предельное соотношение:

$$\int_0^l v_m^{(\kappa)}(x)q(x)\,dx \to \int_0^l v_m(x)q(x)\,dx, \quad m=0,1, \tag{18}$$

для любой функции $q\in L_2(0,l)$ при $k\to\infty$.

Из оценки (17) следует, что последовательность $\{\psi_k(x,t)\}$ равномерно ограничена в норме пространства B_0. Тогда из этой последовательности можно извлечь подпоследовательность (для простоты изложения ее снова обозначим через $\{\psi_k(x,t)\}$), что $\psi_k(.,t)\to\psi(.,t)$ слабо в $W_2^2(0,l)$ и

$\frac{\partial\psi_k(.,t)}{\partial t} \to \frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}$ слабо в $L_2(0,l)$ при $k\to\infty$ для каждого $t\in[0,T]$. Ясно, что каждый элемент подпоследовательности $\{\psi_k(x,t)\}\in B_0$ удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l\left[i\rho^2(x)\frac{\partial\psi_k(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi_k(x,t)}{\partial x}\right)-a(x)\psi_k(x,t)+v_0^{(k)}(x)\psi_k(x,t)+\right.$$
$$\left.+v_1^{(k)}(x)|\psi_k(x,t)|^2\psi_k(x,t)-f(x,t)\right]\overline{\eta}(x)\,dx=0,\quad k=1,2,\dots, \tag{19}$$

для $\forall t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$ с начальным условием

$$\psi_k(x,0)=\varphi(x)\quad \overset{0}{\forall} x\in(0,l),\quad k=1,2,\dots, \tag{20}$$

и краевым условиям

$$\psi_k(0,t)=\psi_k(l,t)=0\quad \overset{0}{\forall} t\in(0,T),\quad k=1,2,\dots. \tag{21}$$

Используя вышеуказанные предельные соотношения, имеем

$$\int_0^l\left[i\rho^2(x)\frac{\partial\psi_k(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi_k(x,t)}{\partial x}\right)-a(x)\psi_k(x,t)\right]\overline{\eta}(x)\,dx\to$$
$$\to\int_0^l\left[i\rho^2(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right)-a(x)\psi(x,t)\right]\overline{\eta}(x)\,dx$$

для каждого $t\in[0,L]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$ при $k\to\infty$. Теперь докажем, что имеют место соотношения:

$$\int_0^l v_0^{(k)}(x)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx\to\int_0^l v_0(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx, \tag{22}$$

$$\int_0^l v_1^{(k)}(x)|\psi_k(x,t)|^2\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx\to\int_0^l v_1(x)|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx \tag{23}$$

для каждого $t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$ при $k\to\infty$. Ясно, что имеют место равенства

$$\int_0^l v_0^{(k)}(x)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx=\int_0^l\left(v_0^{(k)}(x)-v_0(x)\right)\psi(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx+$$
$$+\int_0^l v_0^{(k)}(x)(\psi_k(x,t)-\psi(x,t))\overline{\eta}(x)\,dx+\int_0^l v_0(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx,\quad k=1,2,\dots, \tag{24}$$

для каждого $t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$. Ввиду того, что для каждого $t\in[0,T]$ функция $\psi(x,t)$ принадлежит пространству $W_2^1(0,l)$, а пространство $W_2^1(0,l)$ вложено в $L_\infty(0,l)$, для произвольной функции $\eta\in L_2(0,l)$ имеем

$$q(.,t)=\psi(.,t)\overline{\eta}\in L_2(0,l),\quad t\in[0,T].$$

С учетом этого и из предельного соотношения (18) при $m=0$ получим

$$\int_0^l v_0^{(k)}(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx\to\int_0^l v_0(x)\psi(x,t)\overline{\eta}(x)\,dx \tag{25}$$

для каждого $t\in[0,T]$ и для любой функции $\eta\in L_2(0,l)$ при $k\to\infty$. Из компактного вложения пространства $W_2^2(0,l)$ в пространство $L_\infty(0,l)$ следует, что для слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi_k(x,t)\}$ справедливо предельное соотношение: $\psi_k(.,t) \to \psi(.,t)$ сильно в $L_\infty(0,l)$, для каждого $t \in [0,T]$. Пользуясь этим соотношением и неравенством

$$\left|\int_0^l v_0^{(k)}(x)(\psi_k(x,t) - \psi(x,t))\overline{\eta}(x)\,dx\right| \le \left\|v_0^{(k)}\right\|_{L_\infty^{(2)}(0,l)} \|\eta\|_{L_2(0,l)} \|\psi_k(.,t) - \psi(.,t)\|_{L_2(0,l)}, \tag{26}$$

где $t \in [0,T]$, $L_\infty^{(2)}(0,l) = L_\infty(0,l) \times L_\infty(0,l)$, а также условием, что $\left\|v_0^{(k)}\right\|_{L_\infty^{(2)}(0,l)} \le b_1 + b_2$, получаем справедливость предельного соотношения

$$\int_0^l v_0^{(k)}(x)(\psi_k(x,t) - \psi(x,t))\overline{\eta}(x)\,dx \to 0 \tag{27}$$

для каждого $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta \in L_2(0,l)$ при $k \to \infty$. Тогда, используя предельные соотношения (25), (27) и переходя к пределу в равенствах (24) при $k \to \infty$, получаем справедливость предельного соотношения (22). Используя предельное соотношение (27), устанавливаем справедливость соотношения (23). Таким образом, с учетом предельных соотношений (22), (23), переходя к пределу в интегральном тождестве (19) при $k \to \infty$, получаем справедливость следующего интегрального тождества:

$$\begin{gathered}\int_0^l \left[i\rho^2(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right) - a(x)\psi(x,t) + v_0(x)\psi(x,t) + \right. \\ \left. + v_1(x)|\psi(x,t)|^2\psi(x,t) - f(x,t)\right]\overline{\eta}(x)\,dx = 0\end{gathered} \tag{28}$$

для каждого $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta \in L_2(0,l)$. Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x,t)$ для каждого $t \in [0,T]$ и для почти всех $x \in (0,l)$ удовлетворяет уравнению (1). Действуя, как в работе [3], нетрудно установить, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет начальному и краевому условиям (4). Наряду с этим указанная выше предельная процедура показывает, что предельная функция $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ принадлежит пространству B_0 и является решением прямой задачи (1)–(4) при $v \in V$.

В силу теорем вложения, пространство B_0 компактно вложено в пространство $C^0([0,T], L_2(0,l))$, (см. [2], [12]). Тогда для слабо сходящейся подпоследовательности $\{\psi_k(x,t)\}$ из B_0 к функцию $\psi(x,t)$ имеет место соотношение: $\psi_k(.,T) \to \psi(.,T)$ сильно в $L_2(0,l)$ при $k \to \infty$. Используя этот факт и слабую полунепрерывность снизу нормы в пространствах $L_2(0,l)$ и H, при $\alpha \ge 0$ и для любого $\omega \in H$ имеем

$$J_{\alpha*} \le J_\alpha(v) \le \underline{\lim}_{k\to\infty} J_\alpha(v^{(k)}) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha*}.$$

Отсюда следует, что $v = v(x) \in V$ предоставляет минимум функционалу (6) на множестве V, т.е. $v \in V$ является решением вариационной задачи (6) при $\alpha \ge 0$ и при любом $\omega \in H$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *При перечисленных выше условиях существует такое всюду плотное подмножество K пространства H, что для любых $\omega \in K$ и $\alpha > 0$ задача* (6) *имеет единственное решение.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 была установлена непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Дальнейшее доказательство теоремы базируется на утверждении из работ [13], [14] о том, что если функционал $I(v)$ полунепрерывен снизу и снизу ограничен на непустом замкнутом ограниченном множестве W равномерно выпуклого банахова пространства X, тогда существует такое всюду плотное множество K пространства X, что для любого $\omega \in K$, задача минимизации функционала $I(v) + \alpha\|v - \omega\|_X^2$ на W, при $\alpha > 0$ имеет единственное решение.

Ввиду того, что $J_0(v) \ge 0$, $\forall v \in V$, этот функционал снизу ограничен на множестве V. Выше доказана непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Кроме того, по принятому выше предположению множество V является непустым замкнутым и ограниченным множеством в пространстве H. Пространство H как гильбертово пространство является равномерно выпуклым пространством. В утверждении из работ [13], [14] примем $I(v) = J_0(v)$, $W = V$, $\alpha > 0$. Тогда выполнятся все условия этого утверждения и получим справедливость теоремы 2.

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА

Пусть функция $\Phi = \Phi(x,t)$ является решением следующей задачи, называемой сопряженной задачей:

$$i\rho^2(x)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - a(x)\Phi + \overline{v}_0(x)\Phi + 2\overline{v}_1(x)|\psi|^2\Phi + v_1(x)\psi^2\overline{\Phi} = 0, \quad (x,t)\in\Omega, \tag{29}$$

$$\Phi(x,T) = -2i(\psi(x,T) - y(x)), \quad x\in(0,l), \tag{30}$$

$$\Phi(0,t) = \Phi(l,t) = 0, \quad t\in(0,T), \tag{31}$$

где $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ – решение прямой задачи (1), (4) при $v\in V$, $\overline{v}_m = \overline{v}_m(x)$, $m = 0, 1$, есть комплексные сопряжения функций $v_m = v_m(x)$, $m = 0, 1$.

Под решением сопряженной задачи (29)–(31) будем понимать функцию $\Phi = \Phi(x,t)$ из пространства B_0, удовлетворяющую уравнению (29) для любого $t\in(0,T)$ и почти всех $x\in(0,l)$ и условиям (30), (31) для почти всех $x\in(0,l)$, $t\in(0,T)$ соответственно. Очевидно, что сопряженная задача (29)–(31) является начально-краевой задачей для уравнения типа Шрёдингера (29). Как доказано в [2], [3], при перечисленных выше условиях и при $y\in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$, сопряженная задача (29)–(31) имеет единственное решение из пространства B_0 и для этого решения при $\forall t\in[0,T]$ справедлива оценка

$$\|\Phi(.,t)\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\Phi(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)} \le c_4\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \|y\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}\right). \tag{32}$$

Выше при доказательстве теоремы 1 была установлена непрерывность функционала $J_\alpha(v)$. Теперь докажем дифференцируемость функционала $J_\alpha(v)$. С этой целью введем функцию

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(x,\psi(x,.),v_{01}(x),v_{02}(x),v_{11}(x),v_{12}(x),\overline{\Phi}(x,.)) = -\int_0^T \mathrm{Re}(\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t))\,dt\,v_{01}(x) + \\ + \int_0^T \mathrm{Im}(\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t))\,dt\,v_{02}(x) - \int_0^T \mathrm{Re}\left(|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)dt\,v_{11}(x) + \\ + \int_0^T \mathrm{Im}\left(|\psi(x,t)|^2\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t)\right)dt\,v_{12}(x) - \alpha\sum_{s=1}^{2}\sum_{m=0}^{1}(v_{ms}(x) - \omega_{ms}(x))^2, \end{aligned} \tag{33}$$

которую называем функцией Гамильтона–Понтрягина для вариационной задачи (6), где $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ – решение прямой, а $\Phi = \Phi(x,t) \equiv \Phi(x,t;v)$ – решение сопряженной задачи при $v\in V$, $\omega_{ms}(x)$ – $m = 0, 1$; $s = 1, 2$ – компоненты заданной вектор-функции $\omega(x)\in H$.

Теорема 3. *Пусть выполнены перечисленные выше условия и $\omega\in H$ – заданный элемент. Тогда функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедлива формула*

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v} = -\left(\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v_{01}}, \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v_{02}}, \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v_{11}}, \frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v_{12}}\right),$$

$$J'_{\alpha01}(v) = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v_{01}} = \int_0^T \mathrm{Re}(\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t))\,dt + 2\alpha(v_{01}(x) - \omega_{01}(x)),$$

$$J'_{\alpha02}(v) = -\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial v_{02}} = -\int_0^T \mathrm{Im}(\psi(x,t)\overline{\Phi}(x,t))\,dt + 2\alpha(v_{02}(x) - \omega_{02}(x)), \tag{34}$$

$$J'_{\alpha 11}(v) = -\frac{\partial H}{\partial v_{11}} = \int_0^T \operatorname{Re}\left(|\psi(x,t)|^2 \psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dt + 2\alpha(v_{11}(x) - \omega_{11}(x)),$$

$$J'_{\alpha 12}(v) = -\frac{\partial H}{\partial v_{12}} = -\int_0^T \operatorname{Im}\left(|\psi(x,t)|^2 \psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dt + 2\alpha(v_{12}(x) - \omega_{12}(x)).$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала $J_\alpha(v)$ на произвольном элементе $v \in V$. Оно может быть представлено в виде

$$\delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\delta v) - J_\alpha(v) = 2\int_0^l \operatorname{Re}[(\psi(x,T) - y(x))\delta\bar{\psi}(x,T)]dx +$$
$$+ 2\alpha\int_0^l \sum_{s=1}^{2}\sum_{m=0}^{1}(v_{ms}(x) - \omega_{ms}(x))\delta v_{ms}(x)\,dx + \|\delta\psi(.,L)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|\delta v\|^2_H, \tag{35}$$

где $\delta\psi = \delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v) - \psi(x,t;v)$ и $\delta v \in H$ – приращение на элементе $v \in V$ такое, что $v + \delta v \in V$. Сначала преобразуем первое слагаемое в правой части этой формулы. Ясно, что функция $\delta\psi = \delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\delta v) - \psi(x,t;v)$ принадлежит пространству B_0. Тогда для любой функции $\eta \in L_2(\Omega)$ можем писать следующее тождество:

$$\int_\Omega \left(i\rho^2(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\delta\psi}{\partial x}\right) - a(x)\delta\psi + (v_0(x) + \delta v_0(x))\delta\psi +\right.$$
$$\left. + (v_1(x) + \delta v_1(x))\left(|\psi_\delta|^2 + |\psi|^2\right)\delta\psi + (v_1(x) + \delta v_1(x))\psi_\delta\psi\delta\bar{\psi}\right)\bar{\eta}\,dxdt = \tag{36}$$
$$= -\int_\Omega \delta v_0(x)\psi\bar{\eta}\,dxdt - \int_\Omega \delta v_1(x)|\psi|^2\psi\bar{\eta}\,dxdt.$$

Кроме того, решение сопряженной задачи также принадлежит пространству B_0. Поэтому для любой функции $\eta_1 \in L_2(\Omega)$ можем написать следующее тождество:

$$\int_\Omega \left(\rho^2(x)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - a(x)\Phi + \bar{v}_0(x)\Phi + 2\bar{v}_1(x)|\psi|^2\Phi + v_1(x)\psi^2\bar{\Phi}\right)i\bar{\eta}_1 dxdt = 0. \tag{37}$$

В этом тождестве вместо функции $\eta_1 = \eta_1(x,t)$ возьмем функцию $\delta\psi = \delta\psi(x,t)$ из B_0. Тогда имеем

$$\int_\Omega \left(i\rho^2(x)\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) - a(x)\Phi + \bar{v}_0(x)\Phi + 2\bar{v}_1(x)|\psi|^2\Phi + v_1(x)\psi^2\bar{\Phi}\right)\delta\bar{\psi}\,dxdt = 0.$$

Произведя интегрирование по частям в первом и во втором слагаемых левой части этого равенства и используя условия (9), (30), (31), получаем следующее равенство:

$$\int_\Omega -i\rho^2(x)\frac{\partial\delta\bar{\psi}}{\partial t}\Phi\,dxdt + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\delta\bar{\psi}}{\partial x}\right)\Phi\,dxdt +$$
$$+ \int_\Omega (-a(x)\delta\bar{\psi} + \bar{v}_0(x)\delta\bar{\psi} + 2\bar{v}_1(x)|\psi|^2\delta\bar{\psi})\Phi\,dxdt + \int_\Omega v_1(x)(\psi)^2\delta\bar{\psi}\bar{\Phi}\,dxdt = \tag{38}$$
$$= -2\int_\Omega (\psi(x,T) - y(x))\delta\bar{\psi}(x,T)\,dx.$$

В тождестве (36) вместо функции $\eta = \eta(x,t)$ возьмем функцию $\Phi = \Phi(x,t)$ и из полученного равенства вычтем комплексное сопряжение равенства (38). В результате, суммируя полученное равенство с его комплексным сопряжением, имеем

$$2\int_\Omega \operatorname{Re}\left[\rho^2(x)(\psi(x,T) - y(x))\delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx = \int_\Omega \operatorname{Re}(\psi\bar{\Phi})\delta v_{01}(x)\,dxdt - \int_\Omega \operatorname{Im}(\psi\bar{\Phi})\delta v_{02}(x)\,dxdt +$$
$$+ \int_\Omega \operatorname{Re}(\delta\psi\bar{\Phi})\delta v_{01}(x)\,dxdt - \int_\Omega \operatorname{Im}(\delta\psi\bar{\Phi})\delta v_{02}(x)\,dxdt + \int_\Omega \operatorname{Re}\left(|\psi|^2\psi\bar{\Phi}\right)\delta v_{11}(x)\,dxdt -$$
$$- \int_\Omega \operatorname{Im}\left(|\psi|^2\psi\bar{\Phi}\right)\delta v_{12}(x)\,dxdt + \int_\Omega \operatorname{Re}\left(\psi^2\delta\bar{\psi}\bar{\Phi}\right)\delta v_{11}(x)\,dxdt - \int_\Omega \operatorname{Im}\left(\psi^2\delta\bar{\psi}\bar{\Phi}\right)\delta v_{12}(x)\,dxdt + \tag{39}$$

$$+\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2+|\psi|^2\right)\delta v_{11}(x)\,dxdt+\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2-|\psi|^2\right)v_{11}(x)\,dxdt-$$

$$-\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2+|\psi|^2\right)\delta v_{12}(x)\,dxdt+\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2-|\psi|^2\right)v_{12}(x)\,dxdt.$$

Учитывая это равенство в правой части (35), получаем следующую формулу для приращения функционала:

$$\delta J_{\alpha}(v)=\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\psi\bar{\Phi})\,\delta v_{01}(x)\,dxdt-\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\psi\bar{\Phi})\delta v_{02}(x)\,dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\operatorname{Re}\left(|\psi|^2\psi\bar{\Phi}\right)\delta v_{11}(x)\,dxdt-\int_{\Omega}\operatorname{Im}\left(|\psi|^2\psi\bar{\Phi}\right)\delta v_{12}(x)\,dxdt+$$

$$+2\alpha\int_0^l\sum_{s=1}^{2}\sum_{m=0}^{1}(v_{ms}(x)-\omega_{ms}(x))\delta v_{ms}(x)\,dx+R(\delta v),$$

где $R(\delta v)$ определяется формулой:

$$R(\delta v)=\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\delta\psi\bar{\Phi})\,\delta v_{01}(x)\,dxdt-\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\delta\psi\bar{\Phi})\delta v_{02}(x)\,dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\operatorname{Re}\left(\psi^2\delta\bar{\psi}\bar{\Phi}\right)\delta v_{11}(x)\,dxdt-\int_{\Omega}\operatorname{Im}\left(\psi^2\delta\bar{\psi}\bar{\Phi}\right)\delta v_{12}(x)\,dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2+|\psi|^2\right)\delta v_{11}(x)\,dxdt+\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2-|\psi|^2\right)v_{11}(x)\,dxdt-$$

$$-\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2+|\psi|^2\right)\delta v_{12}(x)\,dxdt+\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\delta\psi\bar{\Phi})\left(|\psi_{\delta}|^2-|\psi|^2\right)v_{12}(x)\,dxdt+\|\delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}+\alpha\|\delta v\|^2_H.$$

С помощью этой формулы, в силу оценок (8), (17), (32), имеем

$$\max_{(x,t)\in\bar{\Omega}}|\Phi(x,t)|^2\le c_5\|\Phi\|^2_{C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)\right)}.$$

В результате получим следующее соотношение:

$$|R(\delta v)|\le c_6\|\delta v\|^2_H=\mathrm{o}\left(\|\delta v\|_H\right).$$

С учетом этого соотношения приращение функционала $J_{\alpha}(v)$ может быть представлено в виде

$$\delta J_{\alpha}(v)=\int_{\Omega}\operatorname{Re}(\psi\bar{\Phi})\,\delta v_{01}(x)\,dxdz-\int_{\Omega}\operatorname{Im}(\psi\bar{\Phi})\delta v_{02}(x)\,dxdz+$$

$$+\int_{\Omega}\operatorname{Re}\left(|\psi|^2\psi\bar{\Phi}\right)\delta v_{11}(x)\,dxdt-\int_{\Omega}\operatorname{Im}\left(|\psi|^2\psi\bar{\Phi}\right)\delta v_{12}(x)\,dxdt+$$

$$+2\alpha\int_0^l\sum_{s=1}^{2}\sum_{m=0}^{1}(v_{ms}(x)-\omega_{ms}(x))\delta v_{ms}(x)\,dx+\mathrm{o}\left(\|\delta v\|_H\right).$$

Используя вид функции Гамильтона–Понтрягина и определение дифференцируемости по Фреше функционалов в функциональных пространствах, из последней формулы для приращения функционала $J_{\alpha}(v)$ на любом элементе $v\in V$ получаем, что этот функционал дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедлива формула (34). Теорема 3 доказана.

5. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 4. *Пусть выполнены перечисленные выше условия. Для того чтобы $v^*\in V$ было решением вариационной задачи* (6)*, необходимо для любого $v\in V$ выполнение следующего неравенства*:

$$\int_0^l\left\{\left[\int_0^T\rho^2(x)\operatorname{Re}(\psi^*(x,t)\bar{\Phi}^*(x,t))\,dt+2\alpha\left(v_{01}^*(x)-\omega_{01}(x)\right)\right]\left(v_{01}(x)-v_{01}^*(x)\right)+\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left[-\int_0^T \rho^2(x)\,\mathrm{Im}\left(\psi^*(x,t)\,\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v_{02}^*(x)-\omega_{02}(x)\right)\right]\left(v_{02}(x)-v_{02}^*(x)\right)+\\
&+\left[\int_0^T \rho^2(x)\,\mathrm{Re}\left(\left|\psi^*(x,t)\right|^2\psi^*(x,t)\,\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v_{11}^*(x)-\omega_{11}(x)\right)\right]\left(v_{11}(x)-v_{11}^*(x)\right)+\\
&+\left[-\int_0^T \rho^2(x)\,\mathrm{Im}\left(\left|\psi^*(x,t)\right|^2\psi^*(x,t)\,\bar{\Phi}^*(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v_{12}^*(x)-\omega_{12}(x)\right)\right]\left(v_{12}(x)-v_{12}^*(x)\right)\Bigg\}dx \ge 0,
\end{aligned}
\tag{40}
$$

где $\psi^*(x,t)\equiv\psi(x,t;v^*)$, $\Phi^*(x,t)\equiv\Phi(x,t;v^*)$ — решения прямой и сопряженной задач, соответственно, на элементе $v^*\in V$.

Доказательство. Согласно теореме 2, функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента верна формула (34). Докажем, что градиент функционала $J_\alpha(v)$ непрерывен на множестве V. С этой целью достаточно доказать непрерывность любого компонента градиента $J'_\alpha(v)$ на множестве V. Действительно, градиент функционала $J'_\alpha(v)$ имеет компоненты $(J'_{\alpha01}(v), J'_{\alpha02}(v), J'_{\alpha03}(v), J'_{\alpha04}(v))$. Формула приращения для компоненты $J'_{\alpha01}(v)$ будет иметь вид:

$$
\begin{aligned}
\delta J'_{\alpha01}(v) = J'_{\alpha01}(v+\delta v) - J'_{\alpha01}(v) &= \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_\delta(x,t)\,\delta\bar{\Phi}(x,t)\right)dt +\\
&+\int_0^T \mathrm{Re}\left(\delta\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\right)dt + 2\alpha\delta v_{01}(x).
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Здесь $\delta\Phi=\delta\Phi(x,t)=\Phi_\delta(x,t)-\Phi(x,t)\equiv\Phi(x,t;v+\delta v)-\Phi(x,t;v)$ является решением следующей начально-краевой задачи:

$$
\begin{aligned}
&i\rho^2(x)\frac{\partial\delta\Phi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_0(x)\frac{\partial\delta\Phi}{\partial x}\right)-a(x)\,\delta\Phi+\left(v_{01}(x)+\delta\bar{v}_0(x)\right)\delta\Phi=-\delta\bar{v}_0(x)\,\Phi-\\
&-2\left(\bar{v}_1(x)+\delta\bar{v}_1(x)\right)\left|\psi_\delta\right|^2\Phi_\delta-\left(v_1(x)+\delta v_1(x)\right)\psi_\delta^2\bar{\Phi}_\delta+2\bar{v}_1\left|\psi\right|^2\Phi+v_1(x)\,\psi^2\bar{\Phi},\quad (x,t)\in\Omega,
\end{aligned}
\tag{42}
$$

$$
\delta\Phi(x,T)=-2i\delta\psi(x,T),\quad x\in(0,l),\quad \delta\Phi(0,t)=\delta\Phi(l,t)=0,\quad t\in(0,T),
\tag{43}
$$

где $\Phi_\delta=\Phi_\delta(x,t)\equiv\Phi(x,t;v+\delta v)$ — решение сопряженной задачи при $v+\delta v\in V$.

Аналогично выводу оценки для решения начально-краевой задачи (10)–(12), нетрудно оценить решение задачи (42), (43) в виде

$$
\left\|\delta\Phi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_7\left\|\delta v\right\|_H^2 \quad \forall t\in[0,T].
$$

Используя эту оценку и оценки (8), (17), (38), из равенства (41) получаем

$$
\left\|\delta J'_{\alpha01}(v)\right\|_{L_1(0,l)}^2 \le c_8\left\|\delta v\right\|_H^2 .
$$

Аналогично этому для $J'_{\alpha02}(v)$, $J'_{\alpha11}(v)$, $J'_{\alpha12}(v)$ могут быть доказаны неравенства

$$
\left\|\delta J'_{\alpha02}(v)\right\|_{L_{21}(0,l)}^2 \le c_9\left\|\delta v\right\|_H^2,\quad \left\|\delta J'_{\alpha11}(v)\right\|_{L_1(0,l)}^2 \le c_{10}\left\|\delta v\right\|_H^2,\quad \left\|\delta J'_{\alpha12}(v)\right\|_{L_1(0,l)}^2 \le c_{11}\left\|\delta v\right\|_H^2 .
$$

Если объединим эти оценки, то получим

$$
\left\|J'_\alpha(v+\delta v)-J'_\alpha(v)\right\|_{L_1(0,l)} \le c_{12}\left\|\delta v\right\|_H \quad \forall v\in V.
$$

Итак, доказано, что функционал $J_\alpha(v)$ непрерывно дифференцируем по Фреше на множестве V. С другой стороны, множество V является непустым ограниченным замкнутым и выпуклым множеством. Тогда, согласно доказанному в [10], выполнится следующее необходимое условие минимума функционала $J_\alpha(v)$ на V: $\left\langle J'_\alpha(v^*), v-v^*\right\rangle_H \ge 0$ $\forall v\in V$, где элемент $v^*\in V$ доставляет минимум функционалу (6) на множестве V. Учитывая здесь формулу (34) для градиента функционала $J_\alpha(v)$, получаем утверждение теоремы 4.

6. ИТЕРАТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Приведем пример об определении комплеснозначного коэффициента уравнения Шрёдингера и одновременно поясним случаи неустойчивости решения этой задачи. Проверим, что при $\alpha = 0$ задача (6) становится неустойчивой.

Пример. Рассмотрим задачу об определении комплекснозначного коэффициента v_0 уравнения

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - v_0\psi = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < 1, \tag{44}$$

со следующими начальным и краевыми условиями:

$$\psi(x,0) = \sin x, \quad x \in (0,\pi), \quad \psi(0,t) = \psi(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,1), \tag{45}$$

и финальным наблюдением

$$\psi(x,1) = \exp\{3(1-i)\}\sin x, \quad x \in (0,\pi). \tag{46}$$

Здесь $v_0 = v_{00} + iv_{01}$ является искомым комплексным числовым коэффициентом уравнения (44). Очевидно, что функционал качества $J_\alpha(v)$, составленный по финальному наблюдению (46), имеет вид

$$J_\alpha(v) = \int_0^\pi [\psi(x,1) - \exp\{3(1-i)\}\sin x]^2 dx + \alpha\|v - \omega\|^2_{R^2}, \tag{47}$$

где ω – заданное комплексное число. Пусть $\omega = 2 + 3i$, коэффициент v_0 уравнения (44) ищется как минимум функционала $J_\alpha(v)$ на множестве $V = \{v = (v_{00}, v_{01})\colon v \in \mathrm{R}^2, |v_{00}| \le 2, |v_{00}| \le 3\}$. Теоремы 1 и 2 утверждают разрешимость и единственность решения задачи о минимизации функционала (47). Теорема 4 дает необходимое условие для решения этой задачи. Нетрудно проверить, что величины $v_0 = 2 + 3i$ и $\psi(x,t) = \exp\{3(1-i)t\}\sin x$ удовлетворяют условиям (44)–(46). Функционал $J_\alpha(v) \ge 0$ и на элементе $v_0 = 2 + 3i$ множества V он достигает наименьшего значения, что является решением рассматриваемой задачи. Проверим, что решение задачи минимизации функционала $J_\alpha(v)$ при условиях (44), (45) на множестве V, когда $\alpha = 0$ неустойчиво. Действительно, рассмотрим последовательность $\{v_0^{(k)} = \sin k\}$. Нетрудно проверить, что элементы этой последовательности вместе с функциями $\psi_k(x,t) = \exp\{-i(\sin k + 1)t\}\sin x$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ удовлетворяют уравнению

$$i\frac{\partial\psi_k}{\partial t} + \frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2} - v_0^{(k)}\psi_k = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < t < 1, \tag{48}$$

следующему начальному и краевым условиям:

$$\psi_k(x,0) = \sin x, \quad x \in (0,\pi), \quad \psi_k(0,t) = \psi_k(\pi,t) = 0, \quad t \in (0,1). \tag{49}$$

При этом финальное наблюдение имеет вид

$$\psi_k(x,1) = \exp\{-i(\sin k + 1)\}\sin x, \quad x \in (0,\pi). \tag{50}$$

Функционал качества $J_\alpha(v)$, составленный по этому финальному наблюдению, имеет вид

$$J_\alpha(v^{(k)}) = \int_0^\pi [\psi_k(x,1) - \exp\{-i(\sin k + 1)\}\sin x]^2 dx + \alpha\|v^{(k)} - \omega\|^2_{R^2}. \tag{51}$$

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ элементы $v_0^{(k)} = \sin k$ и функции $\psi_k(x,t) = \exp\{-i(\sin k + 1)t\}\sin x$, $x \in (0,\pi)$, удовлетворяют условиям (48), (49). При этом и при $\alpha = 0$ функционал $J_\alpha(v) \ge 0$ на элементе $v_0^{(k)} = \sin k$ множества V достигает наименьшего нулевого значения. Однако последовательность $\{v_0^{(k)} = \sin k\}$ не имеет предела, что свидетельствует о неустойчивости решения рассматриваемой вариационной задачи (6) при $\alpha = 0$.

Неустойчивость решения задачи (6) указывает на необходимость регуляризации ее решения. Итеративная регуляризация является не только одним из универсальных, но и эффективным устойчивым вычислительным методом решения некорректных задач (см. [9], [10] и др.). Доказанные выше теоремы и установленная формула для градиента функционала качества, которая вычисляется по решениям основной и сопряженной задач, а также установленное необходимое условие для решения дают основание разработать итеративные алгоритмы решения вариационной задачи (6). Здесь приемлемы также другие методы итеративной регуляризации, например, регуляризованные методы Ньютона, проекции градиента и др. [9], [10].

Пусть теперь исходные данные задачи (6) заданы с погрешностью $\delta > 0$ и это выражено в задании финального наблюдения:

$$\|\psi(.,T) - y\|^2_{L_2(0,l)} \le \delta. \tag{52}$$

Рассмотрим итерационный процесс по схеме “условного градиента” [10]:

$$v^{(k+1)}(x) = v^{(k)}(x) + \beta_k\left[w^{(k)}(x) - v^{(k)}(x)\right], \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{53}$$

где $v^{(0)}(x)$ – начальное приближение, которое является произвольным элементом множества $V \in \mathrm{H}$, $\beta_k \in (0,1)$ – числовой параметр, который определяется из условия убывания функционала: $J_0(v^{(k+1)}) \le J_0(v^{(k)})$, $w^{(k)}(x)$ – минимум следующего линейного функционала:

$$I_k(w) = \left\langle J_0'\left(v^{(k)}(x)\right), w(x) - v^{(k)}(x)\right\rangle + \alpha_k\left\langle v^{(k)}(x) - w(x), w(x) - v^{(k)}(x)\right\rangle \tag{54}$$

на множестве V, $\langle\ ,\ \rangle$ – скалярное произведение соответствующих элементов, $\alpha_k \ge 0$ – параметр итерационного процесса, который выбирается из условия (52) в зависимости от $\delta > 0$. Элементы, найденные из условий (53), (54), обозначим через $v^{(k)}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Проводя этот итерационный процесс, находим последовательность $\{v^{(k)}(x)\}$. При принятых выше предположениях и указанных условиях на параметры алгоритма β_k, α_k, а также предположении выпуклости функционала $J_0(v)$ на множестве V, в [10, с. 855–862] доказаны сходимость и регуляризуемость итерационного процесса (53), (54). Практика решения экстремальных задач типа (6) указывает, что параметры алгоритма и число итерации выбираются в зависимости от погрешности исходных данных в соответствии с правилом “останова” (см. [5]–[10] и др.). При этом удобной формой реализации условия (52) является выполнение его в виде равенства: $\|\psi(.,T) - y\|^2_{L_2(0,l)} = \delta$. Вопрос сходимости решения вариационной постановки к решению соответствующей невариационной постановки задачи с приближенными данными требует отдельного рассмотрения. Отметим лишь, что при стремлении погрешности данных к нулю в случае выпуклости функционалов качества, для решения операторных уравнений I рода при довольно общих предположениях доказаны сходимости решения вариационных постановок к решению соответствующих невариационных [9], [10]. Нелинейность и неустойчивость задачи определения коэффициентов уравнений сильно усложняют не только их теоретическое исследование, но и увеличивают объем вычислительной работы [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шрёдингера // Дифференц. ур-ния. 1997. Т. 33. № 12. С. 1691–1698.
2. *Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я., Мусаева М.А.* Идентификация квантовых потенциалов. Баку: Чашыоглы, 2012.
3. *Мусаева М.А.* Вариационные методы определения квантового потенциала. Баку: Чашыоглы, 2018.
4. *Baudoin L., Kavian O., Puel J.-P.* Regularity for Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control // J. Differential Equat. 2005. V. 216. P. 188–222.
5. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
6. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
7. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.А.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
9. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: КУРС, 2017.
10. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: МЦНМО, 2011.
11. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные решения, некорректные задачи. М.: Наука, 2017.
12. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
13. *Baranger J.* Existence de solution pour des problemes d’optimisation non conexes // J. Math. Pures Appl. 1975. V. 52. P. 377–406.
14. *Goebel M.* On existence of optimal control // Math. Natchr. 1979. V. 93. № 4. P. 67–73.