ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 11, с. 1962–1974

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.63

О ВЛИЯНИИ БЕТА-ЭФФЕКТА НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ОКЕАНСКИХ ТЕЧЕНИЙ[1)]

© 2020 г. С. Л. Скороходов[1,*], Н. П. Кузьмина[2,**]

[1] 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Россия

[2] 117997 Москва, Нахимовский пр-т, 36, Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Россия

*e-mail: sskorokhodov@gmail.com

**e-mail: kuzmina@ocean.ru

Поступила в редакцию 12.03.2020 г.
Переработанный вариант 21.05.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2020 г.

На основе уравнения потенциального вихря в квазигеострофическом приближении представлен анализ устойчивых и неустойчивых возмущений океанских течений конечного поперечного масштаба с вертикальным линейным профилем скорости (течения типа Куэтта). В модели учитывается влияние вертикальной диффузии плавучести, трения и бета-эффекта (изменение параметра Кориолиса с широтой). Для анализа используется метод малых возмущений. Задача зависит от нескольких физических параметров и сводится к решению спектральной несамосопряженной задачи для уравнения 4-го порядка с малым параметром при старшей производной. Построены асимптотические разложения собственных функций и собственных значений при малых значениях волнового числа k. С помощью метода продолжения по параметру k вычислены траектории собственные значения, которые позволили провести сравнение влияния бета-эффекта на неустойчивые возмущения первой моды и более высоких мод. Показано, что неустойчивость течения сложным образом зависит от физических параметров течения. Библ. 21. Фиг. 2.

Ключевые слова: спектральная несамосопряженная задача, метод продолжения по параметру, метод Ньютона, асимптотические разложения.

DOI: 10.31857/S0044466920110137

ВВЕДЕНИЕ

Работа является продолжением исследований устойчивых и неустойчивых возмущений типичных для океана модельных течений (см. [1]–[8]). В отличие от моделей, представленных в перечисленных работах, здесь будут учитываться не только вертикальная диффузия плавучести и трение, но и бета-эффект (изменение параметра Кориолиса с широтой), т.е. влияние на динамику возмущений сферичности Земли. Анализ будет проводиться для течения с линейным вертикальным профилем скорости (течение типа Куэтта). Динамика малых возмущений такого течения описывается линейным уравнением потенциального вихря в квазигеострофическом приближении. Вывод основных уравнений модели подробно представлен в [3]–[7].

Важно также отметить, что исследование влияния бета-эффекта на динамику возмущений геострофических течений проводилось в приближении идеальной жидкости (без учета диффузии плавучести и трения) для течений бесконечного поперечного масштаба (см. [9], [10]). Задача в более полной постановке (с учетом диссипации и конечного поперечного масштаба течения) может позволить описать новые физические особенности динамики возмущений.

С помощью предложенного ранее подхода к решению возникающей спектральной задачи (см. [5], [6], [3]) разработан аналитико-численный метод решения такой задачи типа Орра–Зоммерфельда и построены асимптотические разложения собственных функций (СФ) и собственных значений (СЗ) при малых волновых числах k. Этот метод позволил провести много-

[1)] Участие Н.П. Кузьминой в данном исследовании поддерживалось бюджетным финансированием ИО РАН (тема № 0149-2019-0003).

численные расчеты и исследовать неустойчивость модельных течений в широком диапазоне физических параметров.

Постановка задачи. Область, в которой исследуется модельное течение, является бесконечным (вдоль направления течения) горизонтальным слоем с верхней и нижней границами z_0 и z_1 и боковыми границами y_0 и y_1. Декартовы координаты внутри такого слоя следующие: вертикальная переменная $z \in [z_0, z_1]$, поперечная переменная $y \in [y_0, y_1]$ и продольная переменная x направлена вдоль течения, $x \in (-\infty, \infty)$.

Следуя стандартному методу исследования неустойчивости течения (см., например, [3], [5]), представим возмущение безразмерного давления в виде бегущей вдоль оси x волны:

$$p(x, y, z; t) = \sin\left(\pi n \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}\right) e^{ik(x-ct)} F\left(\frac{z}{H}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{0.1}$$

где k — волновое число возмущения вдоль координаты x, $(y_1 - y_0)/n$ — масштаб возмущения в поперечном направлении y, H — вертикальный масштаб слоя, а $F\left(\frac{z}{H}\right)$ — искомый вертикальный профиль возмущения давления.

В безразмерных переменных задача исследования динамики течения с линейным вертикальным профилем скорости $U(z) = z$ сводится к решению на отрезке $z \in [0,1]$ уравнения для комплекснозначной функции $F = F(z)$:

$$\frac{1}{ik\mathrm{R}}\left[F^{(\mathrm{IV})} - \mathrm{Pr}\mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)F''\right] = (z - c)\left[F'' - \mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)F\right] + \mu F, \tag{0.2}$$

где $\mathrm{R} = \mathrm{Pe}H/L$, Pe — число Пекле (аналог числа Рейнольдса), $L = y_1 - y_0$ — поперечный масштаб течения, Pr — число Прандтля, Bu — число Бургера, μ — параметр, учитывающий бета-эффект, i — мнимая единица.

Два краевых условия задают отсутствие протекания на горизонтальных границах слоя $z = 0$ и $z = 1$:

$$\frac{1}{ik\mathrm{R}} F'''(0) = -cF'(0) - F(0), \quad \frac{1}{ik\mathrm{R}} F'''(1) = (1 - c)F'(1) - F(1). \tag{0.3}$$

Еще два условия на этих границах задают равенство нулю потоков плавучести,

$$F''(0) = F''(1) = 0. \tag{0.4}$$

Поставленная задача является спектральной для бесконечно дифференцируемой комплекснозначной функции $F(z)$ на отрезке $z \in [0,1]$.

Задача. Найти СФ $F(z)$ и соответствующие им СЗ c, т.е. решения уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3), (0.4).

Отметим здесь, что оператор задачи является несамосопряженным, он содержит малый параметр $(k\mathrm{R})^{-1}$ при старшей производной (величина $k\mathrm{R}$ для реальных течений может быть очень большой), а спектральный параметр c входит как в уравнение (0.2), так и в краевое условие (0.3). Собственных функций $F_m(z)$ и соответствующих им СЗ c_m будет счетное множество, а неустойчивость по времени возмущений давления $p(x, y, z; t)$ возникает для тех СФ, которым соответствует СЗ c_m с положительной мнимой частью $\mathrm{Im}(c_m) > 0$, что следует из представления (0.1).

Обзор литературы и современное состояние исследований спектра подобных операторов содержится в [11]; обзор методов вычисления СЗ таких задач дан в [12]—[14]. В [5]—[7], [15] изложен метод, позволивший эффективно вычислить СФ и СЗ уравнений типа Орра—Зоммерфельда с высокой точностью. В настоящей работе этот метод получил дальнейшее развитие и был использован для решения задачи (0.2)—(0.4).

В [6] для случая $\mu = 0$ и $n = 1$ при вещественных параметрах k, R, Pr, Bu было доказано свойство симметрии СЗ c_m относительно прямой $\mathrm{Re}(c) = \frac{1}{2}$ и показано образование двойных СЗ при некоторых значениях k.

Именно, если c_m является СЗ задачи (0.2)—(0.4) при $\mu = 0$ и $n = 1$, то

$$\hat{c}_m = 1 - \mathrm{Re}(c_m) + i\mathrm{Im}(c_m)$$

также является СЗ этой задачи.

Это свойство симметрии СЗ может быть аналогично доказано для задачи (0.2)–(0.4) при $\mu = 0$ и $n \in \mathbb{N}$.

Однако для $\mu \neq 0$ эта симметрия исчезает и двойные СЗ не образуются. При этом расстояние между двумя соседними траекториями СЗ, т.е. величина

$$\varrho = \min_k \left|c_{m+1}(k) - c_m(k)\right|,$$

может быть очень малой, а это, в свою очередь, может приводить к дополнительным трудностям в численном анализе.

1. МЕТОД РАСЧЕТА СФ И СЗ

Вычисление СФ $F(z)$ и соответствующих СЗ c основано на построении степенных разложений $F(z)$ в граничных точках $z = 0$ и $z = 1$ и их гладкой сшивке в некоторой точке $z_* \in (0,1)$ (см. [5]–[7], [15], [16]).

Пусть спектральный параметр c зафиксирован. Тогда $F(c;z)$, решение уравнения (0.2), представим в виде следующих разложений в точках $z = 1$ и $z = 0$:

$$F(c;z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(c)(z-1)^m, \tag{1.1}$$

$$F(c;z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m(c)z^m, \tag{1.2}$$

где коэффициенты a_m и b_m зависят от параметров задачи k, R, Pr, Bu, n, μ и выбранного спектрального параметра c. Разложения (1.1), (1.2) сходятся при всех $|z| < \infty$, поскольку решение уравнения (0.2) имеет единственную особую точку $z = \infty$.

Подставляя ряды (1.1), (1.2) в уравнение (0.2), получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов a_m и b_m:

$$\begin{gathered} a_{m+4} = \{(m+1)(m+2)[\mathrm{PrBu}(\pi^2n^2 + k^2) + (1-c)ik\mathrm{R}]a_{m+2} + ik\mathrm{R}m(m+1)a_{m+1} + \\ + ik\mathrm{R}[\mu + \mathrm{Bu}(\pi^2n^2 + k^2)(c-1)]a_m - ik\mathrm{R}\mathrm{Bu}(\pi^2n^2 + k^2)a_{m-1}\}[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)]^{-1}, \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} b_{m+4} = \{(m+1)(m+2)[\mathrm{PrBu}(\pi^2n^2 + k^2) - ik\mathrm{R}c]b_{m+2} + ik\mathrm{R}m(m+1)b_{m+1} + \\ + ik\mathrm{R}[\mu + \mathrm{Bu}(\pi^2n^2 + k^2)c]b_m - ik\mathrm{R}\mathrm{Bu}(\pi^2n^2 + k^2)b_{m-1}\}[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)]^{-1}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Учет краевых условий (0.3) дает связь коэффициентов a_0, a_1, a_3 и b_0, b_1, b_3:

$$a_3 = \frac{ik\mathrm{R}}{6}[(1-c)a_1 - a_0], \quad b_3 = -\frac{ik\mathrm{R}}{6}(cb_1 + b_0). \tag{1.5}$$

Краевое условие (0.4) приводит к равенствам для a_2 и b_2:

$$a_2 = 0, \quad b_2 = 0. \tag{1.6}$$

Теперь построим функцию $F_1(c;z)$ в виде разложения (1.1), задав $a_0^{(1)}$ и $a_1^{(1)}$ следующими:

$$a_0^{(1)} = 1, \quad a_1^{(1)} = 0,$$

коэффициенты $a_2^{(1)}$ и $a_3^{(1)}$ определив из (1.6) и (1.5), а все последующие $a_m^{(1)}$ вычислив из соотношения (1.3), где дополнительно полагаем $a_{-1}^{(1)} = 0$.

Аналогично этому построим вторую функцию $F_2(c;z)$ в виде такого же разложения (1.1), но задав $a_0^{(2)}$ и $a_1^{(2)}$ следующими:

$$a_0^{(2)} = 0, \quad a_1^{(2)} = 1.$$

Тогда общее решение $F(c;z)$ уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3), (0.4) лишь в точке $z = 1$ есть линейная комбинация $F_1(c;z)$ и $F_2(c;z)$,

$$F(c;z) = t_1F_1(c;z) + t_2F_2(c;z), \tag{1.7}$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_1 и t_2.

Теперь построим две функции $F_3(c;z)$ и $F_4(c;z)$ в виде разложений (1.2), задав коэффициенты $b_0^{(1)}$, $b_1^{(1)}$ и $b_0^{(2)}$, $b_1^{(2)}$ следующими,

$$b_0^{(1)} = 1, \quad b_1^{(1)} = 0, \quad b_0^{(2)} = 0, \quad b_1^{(2)} = 1,$$

положив b_2, в соответствии с (1.6), нулевыми, b_3 вычислив из (1.5), а все последующие коэффициенты b_m для обоих разложений вычислив из соотношения (1.4) с учетом равенства $b_{-1}^{(1)} = b_{-1}^{(2)} = 0$.

Тогда общее решение $F(c;z)$ уравнения (0.2) с краевыми условиями (0.3), (0.4) лишь в точке $z = 0$ есть линейная комбинация $F_3(c;z)$ и $F_4(c;z)$,

$$F(c;z) = t_3F_3(c;z) + t_4F_4(c;z), \tag{1.8}$$

с произвольными весовыми коэффициентами t_3 и t_4.

Для построения СФ и нахождения СЗ задачи (0.2)–(0.4) выберем произвольную точку z_* на интервале $(0,1)$ и потребуем совпадения в этой точке как функций (1.7) и (1.8), так и их первых трех производных по z, т.е.

$$t_1F_1^{(p)}(c;z_*) + t_2F_2^{(p)}(c;z_*) - t_3F_3^{(p)}(c;z_*) - t_4F_4^{(p)}(c;z_*) = 0, \quad p = 0,1,2,3. \tag{1.9}$$

В силу исходного уравнения (0.2) четвертого порядка мы заключаем, что в точке z_* все производные более высокого порядка разложений $t_1F_1(c;z) + t_2F_2(c;z)$ и $t_3F_3(c;z) + t_4F_4(c;z)$ также совпадают. Это обеспечит гладкость искомого решения $F(c;z)$ исходной задачи во всех точках $z \in [0,1]$.

Ненулевое решение системы (1.9) возможно только в случае равенства нулю вронскиана $W(F_1,F_2,F_3,F_4)$:

$$W(F_1,F_2,F_3,F_4;c;z_*) = 0. \tag{1.10}$$

Решая это уравнение, мы находим искомую комплексную скорость бегущей волны c, зависящую от параметров задачи (0.2)–(0.4).

Решение (1.10) будем строить с помощью метода Ньютона

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - W(\ldots;c^{(q)};z_*)\left[\frac{\partial W(\ldots;c^{(q)};z_*)}{\partial c}\right]^{-1}, \quad q = 0,1,\ldots, \tag{1.11}$$

а начальные приближения $c^{(0)}$ будем брать на основе метода продолжения по параметру k и из представленных ниже асимптотических разложений при $k \to 0$.

Необходимая для метода Ньютона производная $\partial W(\ldots;c;z_*)/\partial c$ от вронскиана (1.10) системы (1.9) находилась с помощью явного дифференцирования по спектральному параметру “c” всех производных $F_1^{(p)}(c;z_*)$, $F_2^{(p)}(c;z_*)$, $F_3^{(p)}(c;z_*)$, $F_4^{(p)}(c;z_*)$ для $p = 0,1,2,3$. Например, смешанные производные $\partial F_1^{(p)}(c;z_*)/\partial c$ и $\partial F_2^{(p)}(c;z_*)/\partial c$ вычислялись дифференцированием рядов (1.1),

$$\frac{\partial F^{(p)}(c;z_*)}{\partial c} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!}{(m-p)!}a_m(c)(z_*-1)^{m-p}, \quad p = 0,1,2,3, \tag{1.12}$$

а необходимые для разложений (1.12) производные $a_m = a_m(c)$ находились дифференцированием по "c" соотношений (1.3) и (1.5),

$$a'_{m+4} = \Big\{(m+1)(m+2)[\mathrm{PrBu}(\pi^2 n^2 + k^2) + (1-c)ik\mathrm{R}]a'_{m+2} - (m+1)(m+2)ik\mathrm{R}a_{m+2} + ik\mathrm{R}m(m+1)a'_{m+1} +$$
$$+ ik\mathrm{RBu}(\pi^2 n^2 + k^2)[(c-1)a'_m + a_m] + ik\mathrm{R}\mu a'_m - ik\mathrm{RBu}(\pi^2 n^2 + k^2)a'_{m-1}\Big\}[(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)]^{-1},$$

$$a'_3 = \frac{ik\mathrm{R}}{6}[-a_1 + (1-c)a'_1 - a'_0],$$

где значения a'_0, a'_1 и a'_2 равны нулю. Построенное разложение для $\partial W(\ldots;c;z_*)/\partial c$ позволяет избежать использования конечно-разностной производной

$$\frac{W(\ldots;c+\Delta c;z_*) - W(\ldots;c;z_*)}{\Delta c}$$

и связанной с ней потери точности при малых $|\Delta c|$.

2. АСИМПТОТИКА СФ И СЗ ПРИ $k \to 0$

Построим при $k \to 0$ асимптотическое разложение СФ и СЗ при ненулевых параметрах R, Bu, Pr, $n \in \mathbb{N}$ и $\mu \geq 0$. Здесь необходимо отдельно рассмотреть два варианта – случай конечных СЗ и случай неограниченных СЗ.

2.1. Ограниченные СЗ

Исследуем сначала асимптотическое разложение при $k \to 0$ для СФ и СЗ задачи (0.2)–(0.4) при условии, что СЗ имеет конечный предел.

Введем следующую сдвижку аргумента z и СЗ c:

$$z = w + \frac{1}{2}, \quad c = \omega + \frac{1}{2}. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (0.2) для $F(w)$ и краевые условия (0.3), (0.4) примут следующий вид:

$$F^{(4)} - \mathrm{PrBu}(\pi^2 n^2 + k^2)F'' = ik\mathrm{R}\left\{(w-\omega)\left[F'' - \mathrm{Bu}(\pi^2 n^2 + k^2)F\right] + \mu F\right\}, \quad w \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \tag{2.2}$$

$$F'''\left(-\frac{1}{2}\right) = ik\mathrm{R}\left[-\left(\frac{1}{2}+\omega\right)F'\left(-\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)\right], \quad F'''\left(\frac{1}{2}\right) = ik\mathrm{R}\left[\left(\frac{1}{2}-\omega\right)F'\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right], \tag{2.3}$$

$$F''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad F''\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Используя методы асимптотического анализа [17], [18], представим решение задачи (2.2)–(2.4), т.е. СФ $F(k;w)$ и соответствующее ей СЗ $\omega(k)$, в виде разложения по степеням малого параметра k:

$$F(k;w) = \varphi_0(w) + k\varphi_1(w) + k^2\varphi_2(w) + \ldots, \tag{2.5}$$

$$\omega(k) = \omega_0 + k\omega_1 + k^2\omega_2 + \ldots, \qquad k \to 0. \tag{2.6}$$

Подстановка (2.5), (2.6) в уравнение (2.2) и краевые условия (2.3), (2.4) и приравнивание соответствующих слагаемых при степенях k^p, $p = 0, 1, \ldots$, приводит к цепочке краевых задач для $\varphi_p(w)$ на отрезке $w \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Первая из них, для $\varphi_0(w)$, имеет вид

$$\varphi_0''''(w) - \mathrm{PrBu}\pi^2 n^2 \varphi_0''(w) = 0, \tag{2.7}$$

$$\varphi_0'''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi_0'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_0''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi_0''\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{2.8}$$

Решением (2.7), (2.8) является линейная функция,

$$\varphi_0(w) = A_0 + B_0 w \quad \forall A_0, B_0. \tag{2.9}$$

Далее, для функции $\varphi_1(w)$ и константы ω_0 имеем уравнение

$$\varphi_1''''(w) - \mathrm{PrBu}\pi^2 n^2 \varphi_1''(w) = i\mathrm{R}\{(w-\omega_0)[\varphi_0''(w) - \mathrm{Bu}\pi^2 n^2 \varphi_0(w)] + \mu\varphi_0(w)\} \tag{2.10}$$

и краевые условия

$$\varphi_1'''\left(-\frac{1}{2}\right) = i\mathrm{R}\left[-\left(\frac{1}{2}+\omega_0\right)\varphi_0'\left(-\frac{1}{2}\right) - \varphi_0\left(-\frac{1}{2}\right)\right], \quad \varphi_1'''\left(\frac{1}{2}\right) = i\mathrm{R}\left[\left(\frac{1}{2}-\omega_0\right)\varphi_0'\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi_0\left(\frac{1}{2}\right)\right], \tag{2.11}$$

$$\varphi_1''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi_1''\left(\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{2.12}$$

Решение уравнения (2.10) ищем в виде суммы $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$, где φ_h — общее решение однородного уравнения, а φ_{nh} — частное решение неоднородного уравнения. Учитывая вид (2.9) для φ_0, выводим следующее представление для функции $\varphi_{nh}(w)$:

$$\varphi_{nh}(w) = D_2 w^2 + D_3 w^3 + D_4 w^4, \tag{2.13}$$

где

$$D_2 = \frac{i\mathrm{R}B_0}{\mathrm{Pr}^2\mathrm{Bu}\pi^2 n^2} - \frac{i\mathrm{R}A_0}{2\mathrm{Pr}}\left(\omega_0 + \frac{\mu}{\mathrm{Bu}\pi^2 n^2}\right), \quad D_3 = \frac{i\mathrm{R}}{6\mathrm{Pr}}\left(A_0 - \omega_0 B_0 - \frac{\mu B_0}{\mathrm{Bu}\pi^2 n^2}\right), \quad D_4 = \frac{i\mathrm{R}B_0}{12\mathrm{Pr}}. \tag{2.14}$$

Решение $\varphi_h(w)$ запишем в виде

$$\varphi_h(w) = A_1 \sinh\lambda w + B_1\cosh\lambda w + D_0 + D_1 w, \quad \lambda = \pi n\sqrt{\mathrm{PrBu}}, \tag{2.15}$$

с произвольными константами A_1, B_1, D_0 и D_1. Тогда, подставляя решение $\varphi_1 = \varphi_h + \varphi_{nh}$ в краевые условия (2.11), (2.12), получаем систему для искомых коэффициентов A_1 и B_1:

$$\lambda^2 B_1\cosh\frac{\lambda}{2} + 2D_2 + 3D_4 = 0, \quad \lambda^2 A_1\sinh\frac{\lambda}{2} + 3D_3 = 0,$$

$$\lambda^3\left(A_1\cosh\frac{\lambda}{2} - B_1\sinh\frac{\lambda}{2}\right) + 6D_3 - 12D_4 + i\mathrm{R}(\omega_0 B_0 + A_0) = 0,$$

$$\lambda^3\left(A_1\cosh\frac{\lambda}{2} + B_1\sinh\frac{\lambda}{2}\right) + 6D_3 + 12D_4 + i\mathrm{R}(\omega_0 B_0 + A_0) = 0.$$

Учитывая соотношения (2.14) и разрешая эту систему относительно A_1 и B_1, получаем систему относительно коэффициентов A_0 и B_0 в представлении $\varphi_0(z)$ из (2.9):

$$\left(\frac{\mu}{\lambda} + \frac{\omega_0\lambda}{\mathrm{Pr}}\right)\sinh\frac{\lambda}{2}A_0 - \left[\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{\lambda}{4}\right)\frac{\sinh\frac{\lambda}{2}}{\mathrm{Pr}} - \frac{\cosh\frac{\lambda}{2}}{\mathrm{Pr}}\right]B_0 = 0,$$

$$\left[\frac{\lambda\cosh\frac{\lambda}{2}}{2\mathrm{Pr}} - \frac{(1+\mathrm{Pr})\sinh\frac{\lambda}{2}}{\mathrm{Pr}}\right]A_0 - \left[\frac{\mu\cosh\frac{\lambda}{2}}{2\lambda} + \frac{\lambda\omega_0\cosh\frac{\lambda}{2}}{2\mathrm{Pr}} - \frac{\mu\sinh\frac{\lambda}{2}}{\lambda^2} + \frac{\omega_0(\mathrm{Pr}-1)\sinh\frac{\lambda}{2}}{\mathrm{Pr}}\right]B_0 = 0.$$

Нетривиальность решения этой системы требует равенства нулю ее детерминанта, что приводит к трансцендентному уравнению для искомой величины ω_0:

$$Q_0\omega_0^2 + Q_1\omega_0 + Q_2 = 0, \tag{2.16}$$

где

$$Q_0 = \lambda\left[\frac{\lambda\cosh\frac{\lambda}{2}}{2} + (\mathrm{Pr}-1)\sinh\frac{\lambda}{2}\right], \quad Q_1 = \mu\mathrm{Pr}\left[\cosh\frac{\lambda}{2} + (\mathrm{Pr}-2)\frac{\sinh\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right], \tag{2.17}$$

$$Q_2 = \frac{\mu^2 \mathrm{Pr}^2}{\lambda^2}\left(\frac{\cosh\frac{\lambda}{2}}{2} - \frac{\sinh\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right) - \left[\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4}\right) - \frac{\lambda}{2}\right]\left[\frac{\lambda\cosh\frac{\lambda}{2}}{2} - (\mathrm{Pr}+1)\sinh\frac{\lambda}{2}\right]. \quad (2.18)$$

Решение уравнения (2.16) есть

$$\omega_{0_{1,2}} = \frac{-Q_1 \pm \sqrt{Q_1^2 - 4Q_0Q_2}}{2Q_0}, \quad (2.19)$$

откуда получаем, что при $Q_1^2 - 4Q_0Q_2 < 0$ оба значения $\omega_{0_{1,2}}$ комплексно-сопряженные, одно из них лежит в верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\omega_0 > 0$, а значит, при малых параметрах k, в силу представления (2.1), обеспечивает условие $\mathrm{Im}\,c > 0$, что приводит к неустойчивости исследуемого течения.

При $Q_1^2 - 4Q_0Q_2 > 0$ оба значения $\omega_{0_{1,2}}$, как видно из (2.19), лежат на оси $\mathrm{Im}\,\omega_0 = 0$, а значит, при $k \to +0$ это практически соответствует нейтральности возмущений с точностью до первого члена разложения (2.6).

Теперь рассмотрим случай достаточно широких течений, которым соответствуют значения параметра $\mathrm{Bu} \ll 1$; при этом значения $\mathrm{Pr} \sim 1$. Тогда, учитывая определение λ в (2.15), заключаем, что при не слишком больших n величина $\lambda \ll 1$. Разложим выражения Q_0, Q_1 и Q_2 из равенств (2.17), (2.18) в ряд по малому параметру λ и получим для $\omega_{0_{1,2}}$:

$$\begin{gathered}\omega_{0_{1,2}} = -\mu\left(\frac{\mathrm{Pr}}{2\lambda^2} + \frac{1}{24} - \frac{\mathrm{Pr}+5}{1440\mathrm{Pr}}\lambda^2\right) \pm \\ \pm\sqrt{\mu^2\left(\frac{\mathrm{Pr}^2}{4\lambda^4} - \frac{\mathrm{Pr}}{24\lambda^2} + \frac{\mathrm{Pr}}{1440} + \frac{1}{192} - \frac{2\mathrm{Pr}^2 + 21\mathrm{Pr} + 70}{120960\mathrm{Pr}}\lambda^2\right) - \frac{1}{12} + \frac{5-\mathrm{Pr}}{360\mathrm{Pr}}\lambda^2} + O(\lambda^4).\end{gathered} \quad (2.20)$$

Из (2.20) в частном случае $\mu = 0$ следует результат, ранее полученный в [6], что в исходной задаче ограниченные СЗ при $k \to 0$ имеют следующую асимптотику при малых $\lambda = \pi n\sqrt{\mathrm{PrBu}}$:

$$c_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{12} + \frac{5-\mathrm{Pr}}{360\mathrm{Pr}}\lambda^2} + O(\lambda^4).$$

Отсюда получаем, что при $\mu = 0$ и малых λ и k одно из СЗ задачи имеет $\mathrm{Im}(c) \approx \frac{\sqrt{3}}{6}$ и исследуемое течение является неустойчивым.

В случае $\mu > 0$, как следует из (2.20), неустойчивость для малых k и λ будет возникать при $\frac{\mu^2\mathrm{Pr}^2}{4\lambda^4} < \frac{1}{12}$. Учитывая определение λ в (2.15), это приводит (при $\mathrm{Pr} \sim 1$) к условию

$$\mu < \frac{\pi^2 n^2 \mathrm{Bu}}{\sqrt{3}}. \quad (2.21)$$

Проведенные многочисленные расчеты СЗ исходной задачи показали справедливость оценки (2.21) для границы устойчивости течения при малых k и λ.

Если же величина λ не является малой, то из (2.19) получаем, что неустойчивость течения для малых k будет возникать при $Q_1^2 < 4Q_0Q_2$, т.е. при выполнении условия

$$\begin{gathered}\mu^2\mathrm{Pr}^2\left\{\left[\cosh\frac{\lambda}{2} + (\mathrm{Pr}-2)\frac{\sinh\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right]^2 - \left[\cosh\frac{\lambda}{2} + (\mathrm{Pr}-1)2\frac{\sinh\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right]\left(\cosh\frac{\lambda}{2} - \frac{2\sinh\frac{\lambda}{2}}{\lambda}\right)\right\} < \\ < 4\lambda\left[\frac{\lambda\cosh\frac{\lambda}{2}}{2} + (\mathrm{Pr}-1)\sinh\frac{\lambda}{2}\right]\left[\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\lambda}{4}\right) - \mathrm{cth}\frac{\lambda}{2}\right]\left[(\mathrm{Pr}+1)\sinh\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda\cosh\frac{\lambda}{2}}{2}\right],\end{gathered} \quad (2.22)$$

где $\lambda = \pi n\sqrt{\mathrm{PrBu}}$. Отметим здесь, что из неравенства (2.22) оценка (2.21) для малых λ следует при разложении в ряд всех слагаемых.

Таким образом, для случая $k \to 0$ здесь получена связь величины μ с другими параметрами течения, показывающая его неустойчивость.

2.2. Неограниченные СЗ

Построение асимптотического разложения при $k \to 0$ для СФ и неограниченно растущих СЗ задачи (0.2)–(0.4) проводится так же, как это было сделано в [6].

Домножая обе части уравнения (0.2) и краевого условия (0.3) на величину $ik\mathrm{R}$ и обозначая произведение $ik\left(c-\frac{1}{2}\right)$ через $\widetilde{C}$, а $z-\frac{1}{2}$ через w, получаем для $F(w)$ и параметра $\widetilde{C}$ следующую задачу:

$$F^{(4)}(w) - \mathrm{PrBu}(\pi^2n^2 + k^2)F''(w) = \mathrm{R}(ikw - \widetilde{C})[F''(w) - \mathrm{Bu}(\pi^2n^2 + k^2)F(w)] + ik\mathrm{R}\mu F(w), \tag{2.23}$$

$$F'''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\mathrm{R}\widetilde{C}F'\left(-\frac{1}{2}\right) + ik\mathrm{R}\left[-\frac{1}{2}F'\left(-\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)\right], \qquad F''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$F'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\mathrm{R}\widetilde{C}F'\left(\frac{1}{2}\right) + ik\mathrm{R}\left[\frac{1}{2}F'\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right], \quad F''\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

$$\widetilde{C} = ik\left(c - \frac{1}{2}\right), \quad w = z - \frac{1}{2}.$$

Теперь полагаем, что решение $F(k;w)$ и величина $\widetilde{C}(k)$ имеют асимптотические разложения

$$F(k;w) = \varphi_0(w) + k\varphi_1(w) + \ldots, \quad \widetilde{C}(k) = \chi_0 + k\chi_1 + \ldots, \quad \chi_0 \neq 0, \quad k \to 0. \tag{2.24}$$

Тогда для функций $\varphi_m(w)$ и искомых констант χ_m опять получаем цепочку краевых задач, как и в предыдущем случае; первая из них, для $\varphi_0(w)$ и χ_0, имеет вид

$$\varphi_0''''(w) + (\mathrm{R}\chi_0 - \mathrm{PrBu}\pi^2n^2)\varphi_0''(w) - \mathrm{R}\chi_0\mathrm{Bu}\pi^2n^2\varphi_0(w) = 0, \tag{2.25}$$

$$\varphi_0'''\left(\frac{1}{2}\right) = -\mathrm{R}\chi_0\varphi_0'\left(\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_0''\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_0'''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\mathrm{R}\chi_0\varphi_0'\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \varphi_0''\left(-\frac{1}{2}\right) = 0. \tag{2.26}$$

Представляя решение уравнения (2.25) в виде

$$\varphi_0(w) = A\cos(\lambda w) + B\sin(\lambda w), \tag{2.27}$$

получаем для λ характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - (\mathrm{R}\chi_0 - \mathrm{PrBu}\pi^2n^2)\lambda^2 - \mathrm{R}\chi_0\mathrm{Bu}\pi^2n^2 = 0. \tag{2.28}$$

Некратные корни λ_1^2 и λ_2^2 ($\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2$) этого уравнения возникают при условии неравенства нулю его дискриминанта, т.е.

$$(\mathrm{R}\chi_0 - \mathrm{PrBu}\pi^2n^2)^2 + 4\mathrm{R}\chi_0\mathrm{Bu}\pi^2n^2 \neq 0; \tag{2.29}$$

в дальнейшем рассмотрении ограничимся только этим условием.

Решение уравнения (2.28) запишем относительно величин $q_1 = \lambda_1^2$ и $q_2 = \lambda_2^2$:

$$q_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{R}\chi_0 - \mathrm{PrBu}\pi^2n^2 \pm \sqrt{(\mathrm{R}\chi_0 - \mathrm{PrBu}\pi^2n^2)^2 + 4\mathrm{R}\chi_0\mathrm{Bu}\pi^2n^2}\right). \tag{2.30}$$

Дальнейший анализ задачи (2.25), (2.26) аналогичен решению задачи для $\mu = 0$ в работе [6], поэтому приведем здесь окончательные результаты для асимптотики СЗ и СФ.

2.2.1. Решения $\varphi_0(w)$ вида $\cos(\lambda w)$. Представляя решение $\varphi_0(w)$ уравнения (2.25) в виде

$$\varphi_0(w) = A_1\cos(\sqrt{q_1}w) + A_2\cos(\sqrt{q_2}w), \tag{2.31}$$

получаем для χ_0 трансцендентное уравнение

$$\sqrt{q_2}(q_1 - \mathrm{R}\chi_0)\sin\frac{\sqrt{q_1}}{2}\cos\frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1}(q_2 - \mathrm{R}\chi_0)\sin\frac{\sqrt{q_2}}{2}\cos\frac{\sqrt{q_1}}{2}, \tag{2.32}$$

где q_1 и q_2 определены в (2.30). Решая (2.32) численно и проверяя условие некратности корней (2.29), получаем счетное множество искомых коэффициентов χ_0 в представлении (2.24).

В частных случаях уравнение (2.32) имеет явные решения. Например, при $\mathrm{Pr} = 1$ получаем условие $\cos\frac{\sqrt{\mathrm{R}\chi_0}}{2} = 0$, решение которого есть

$$\chi_{0,m} = \frac{\pi^2}{\mathrm{R}}(1 + 2m)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.33}$$

Тогда счетное множество СЗ исходной задачи, неограниченно растущих при $k \to 0$ и $\mathrm{Pr} = 1$, имеют асимптотику

$$c_m = -i\frac{\pi^2}{k\mathrm{R}}(1 + 2m)^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \to 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots . \tag{2.34}$$

2.2.2. Решения $\varphi_0(w)$ вида $\sin(\lambda w)$. Представляя решение $\varphi_0(w)$ уравнения (2.25) в виде

$$\varphi_0(w) = B_1\sin(\sqrt{q_1}w) + B_2\sin(\sqrt{q_2}w), \tag{2.35}$$

получаем для χ_0 трансцендентное уравнение

$$\sqrt{q_2}(q_1 - \mathrm{R}\chi_0)\cos\frac{\sqrt{q_1}}{2}\sin\frac{\sqrt{q_2}}{2} = \sqrt{q_1}(q_2 - \mathrm{R}\chi_0)\cos\frac{\sqrt{q_2}}{2}\sin\frac{\sqrt{q_1}}{2}, \tag{2.36}$$

где q_1 и q_2 определены в (2.30). Решая (2.36) численно и проверяя условие некратности корней (2.29), получаем счетное множество искомых коэффициентов χ_0 в представлении (2.24).

В частных случаях уравнение (2.36) имеет явные решения. Например, при $\mathrm{Pr} = 1$, аналогично пп. 2.2.1, для χ_0 получаем уравнение $\sin\frac{\sqrt{\mathrm{R}\chi_0}}{2} = 0$. Множество его решений $\chi_{0,m}$ имеет вид

$$\chi_{0,m} = \frac{\pi^2}{\mathrm{R}}(2m)^2, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{2.37}$$

Таким образом, в исходной задаче для решений вида (2.35) возникает счетное множество СЗ, неограниченно растущих при $k \to 0$; при $\mathrm{Pr} = 1$ первые члены их асимптотики имеют вид

$$c_m = -i\frac{\pi^2}{k\mathrm{R}}(2m)^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad k \to 0, \quad m = 1, 2, \dots . \tag{2.38}$$

Объединяя вместе результаты (2.34) и (2.38), получаем, что в задаче при $\mathrm{Pr} = 1$ первые члены асимптотики множества неограниченно растущих СЗ имеют вид

$$c_m = -i\frac{\pi^2}{k\mathrm{R}}m^2 + \frac{1}{2} + O(1), \quad m = 1, 2, \dots, \quad k \to 0. \tag{2.39}$$

3. ТЕСТИРОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Для проверки результатов расчета СЗ и СФ исходной задачи (0.2)–(0.4) были проведены многочисленные расчеты в широком диапазоне физических параметров Pr, Bu, R, μ, n и волновых чисел k. При этом варьировалась длина обрываемых разложений (1.1) и (1.2) и их производных по z и по c, значительно увеличивалась мантисса Digits в используемой арифметике, изменялась точка сшивки $z_* \in (0,1)$ разложений в системе (1.9). Итерационный метод Ньютона (1.11) строился так, что начальное приближение $c^{(0)}$ при малых k бралось из асимптотических разложений, построенных в п. 2, а при увеличении k использовался метод продолжения по параметру. Дополнительным инструментом проверки наличия СЗ в некоторой области $\mathcal{D}$ на комплексной плоскости "c" служил обобщенный принцип аргумента (см. [19]) для аналитической в области $\mathcal{D}$ функции $W(c)$,

$$K = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}\frac{W'(\dots;c;z_*)}{W(\dots;c;z_*)}dc, \quad \sum_{p=1}^{K}c_p = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}c\frac{W'(\dots;c;z_*)}{W(\dots;c;z_*)}dc, \tag{3.1}$$

где $W(\ldots;c;z_*)$ – вронскиан (1.10) четырех независимых решений, вычисляемых в точке сшивки z_*, K – число комплексных нулей функции $W(\ldots;c;z_*)$ внутри области $\mathcal{D}$, $\sum_{p=1}^{K} c_p$ – сумма координат этих нулей. В качестве области $\mathcal{D}$ выбирался круг в комплексной плоскости спектрального параметра "c", а интегрирование по контуру $\partial\mathcal{D}$ проводилось с помощью квадратур Гаусса.

Для случая $\mu = 0$ и $n = 1$ результаты расчета СЗ полностью совпали с СЗ, найденными в работе [6]. Здесь же отметим, что в этом случае возникают двойные СЗ с вещественной частью $\mathrm{Re}(c) = \frac{1}{2}$ при определенных волновых числах k_*, которые также совпали с двойными СЗ в [6].

Аналогично предыдущему, при $\mu = 0$ и $n = 2,3,\ldots$, здесь также для определенных волновых чисел k_* возникают двойные СЗ c на этой же прямой $\mathrm{Re}(c) = \frac{1}{2}$. Такое поведение исследуемых СЗ имеет много схожего с траекториями СЗ в задаче Орра–Зоммерфельда для течения Куэтта, см. в [15], [16].

В окрестности этих значений k_* метод Ньютона (1.11) начинал сходиться очень медленно, что связано со стремлением к нулю не только вронскиана $W(c)$ (см. (1.10)), но и его производной $W'(c)$ в точке ветвления $c_m(k_*)$. Исключение этой неопределенности типа 0/0 приводит к необходимости использования модификации метода Ньютона с включением второй производной:

$$c^{(q+1)} = c^{(q)} - T \pm \sqrt{T^2 - \frac{2W(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}}, \quad T = \frac{W'(c^{(q)})}{W''(c^{(q)})}, \quad q = 0,1,\ldots, \tag{3.2}$$

причем знаки $\pm$ выбираются так, чтобы обеспечить непрерывность обеих ветвей двух функций $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$. Второй порядок ветвления функций $c_m(k)$ и $c_{m+1}(k)$ в окрестности точек k_* обеспечивает численную устойчивость итерационного процесса (3.2) и его быструю сходимость.

Совокупность описанных методов позволила гарантированно вычислять СЗ и СФ, а также двойные СЗ $c_m(k_*)$ с относительной точностью не менее 20–40 верных дес. знач. цифр.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем результаты расчетов спектра задачи (0.2)–(0.4) для различных параметров Pr, Bu, R, μ, n и волновых чисел k. Картина траекторий СЗ $c_m(k)$ при изменении k будет иметь как сходство, так и отличие от случая $\mu = 0$, $n = 1$, представленного в [6]. Здесь мы ограничимся описанием только нейтральных и неустойчивых возмущений, которым соответствует первое СЗ.

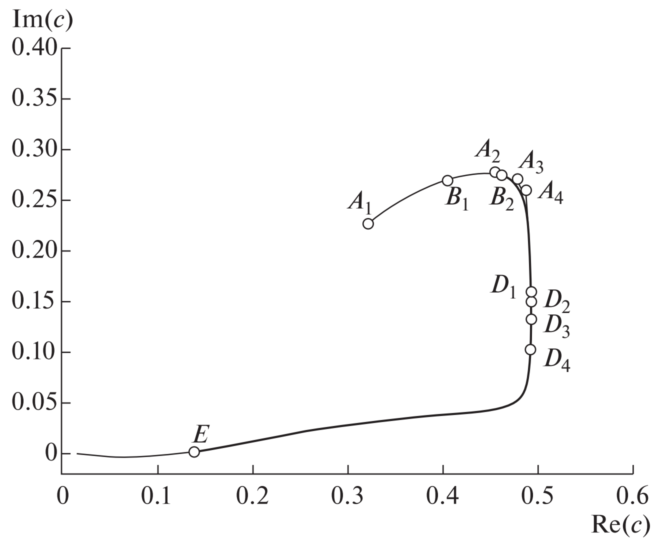
При малых $k \to 0$ первое СЗ $c_1(k)$, описываемое асимптотикой (2.6), лежит либо на вещественной оси $\mathrm{Im}(c) = 0$, либо в полуплоскости $\mathrm{Im}(c) > 0$ и свидетельствует о неустойчивости течения. (Напомним здесь, что второе СЗ и счетное множество остальных СЗ, описываемых разложением (2.24), соответствуют устойчивым возмущениям.)

На фиг. 1 в плоскости комплексного "c" приведены траектории первого СЗ $c_1(k)$ при возрастании числа k для значений физических параметров $\mathrm{R} = 10$, $\mathrm{Pr} = 1$, $\mathrm{Bu} = 0.01$, $\mu = 0.035$ и мод $n = \overline{1,4}$. Точкам A_n соответствуют значения $c_1(k)$ при $k = 0$ для моды n. Точкам B_n соответствуют значения $c_1(k)$ при $k = 3$ для тех же мод (точки B_3 и B_4 расположены очень близко к A_3 и A_4 и поэтому не отмечены). Точкам D_n соответствуют значения $c_1(k)$ при $k = 20$ для тех же мод n. Точка E соответствует значениям $c_1(k)$ при $k = 105$ для всех мод n, поскольку разность между всеми E_n по модулю не превосходила 10^{-4}.

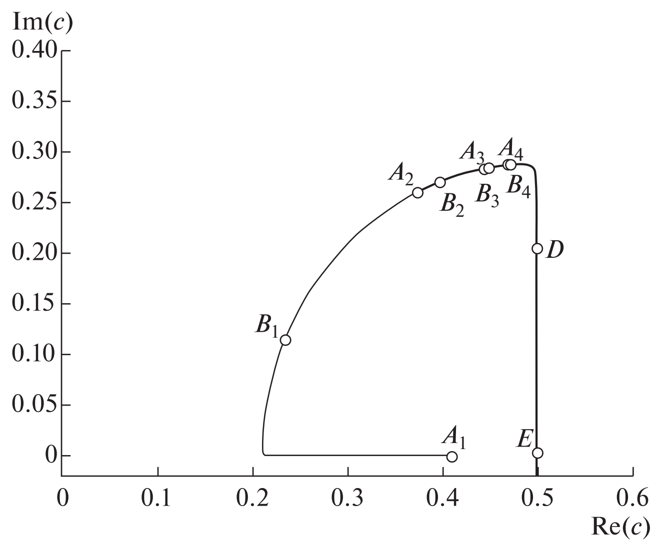
Сплошная линия соответствует непрерывному изменению $c_1(k)$ при росте волнового числа $k \in (0,110]$. При $k > 110$ эти СЗ $c_1(k)$ для всех мод $n = \overline{1,4}$ переходят в полуплоскость $\mathrm{Im}(c) < 0$, что соответствует устойчивым возмущениям течения.

Этот анализ показывает, что траектории СЗ $c_1(k)$ для мод $n = 2,3,4$ практически полностью "ложатся" на траекторию СЗ $c_1(k)$ для $n = 1$.

При других параметрах эти СЗ ведут себя не менее сложным образом.



Фиг. 1. Траектории $c_1(k)$ для Bu = 0.01, Pr = 1, R = 10, $\mu = 0.035$ и $n = 1, 2, 3, 4$ при увеличении $k \in (0,110]$.



Фиг. 2. Траектории $c_1(k)$ для Bu = 0.0001, Pr = 2, R = 1000, $\mu = 0.001$ и $n = 1, 2, 3, 4$ при увеличении $k \in (0, 242]$.

На фиг. 2 приведены траектории первого СЗ $c_1(k)$ в полуплоскости $\mathrm{Im}(c) > 0$ для набора параметров $\mathrm{R} = 1000$, $\mathrm{Pr} = 2$, $\mathrm{Bu} = 0.0001$, $\mu = 0.001$ и мод $n = \overline{1,4}$.

Точкам A_n соответствуют значения $c_1(k)$ при $k = 0$ для моды n. Точкам B_n соответствуют значения $c_1(k)$ при $k = 3$ для тех же мод. Точка D соответствует значениям $c_1(k)$ при $k = 150$ для всех мод n, а точка E – значениям $c_1(k)$ при $k = 242$ для всех мод n. Все точки D_n отличались от отмеченной D не более, чем на 10^{-4}; то же самое касается точек E_n и E.

При $k > 242$ эти СЗ переходят в полуплоскость $\mathrm{Im}(c) < 0$, что соответствует устойчивым возмущениям.

Отсюда видно, что, как и в предыдущем примере, траектории СЗ $c_1(k)$ для $n = 2, 3, 4$ практически полностью “ложатся” на траекторию СЗ $c_1(k)$ при $n = 1$.

Напомним также, что при $\mu \neq 0$ в наших расчетах не возникали двойные СЗ, в отличие от случая $\mu = 0$, когда на оси $\mathrm{Re}(c) = \frac{1}{2}$ при определенных волновых числах k_* возникали двойные СЗ (см. [6]). Таким образом, мерой близости СЗ задачи к образованию двойных СЗ являлась малость величины μ.

Отметим еще, что траектории СЗ в полуплоскости $\mathrm{Im}(c) < 0$ имели весьма сложную структуру по сравнению с задачей без учета бета-эффекта. Так, в частности, с увеличением числа k СЗ могли двигаться сильно немонотонно и для широкого диапазона изменения расчетных величин k эти СЗ оставались в нижней полуплоскости, т.е. соответствовали устойчивым возмущениям.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках уравнения потенциального вихря проводится исследование устойчивых и неустойчивых возмущений геострофического течения с линейным вертикальным профилем скорости с учетом вертикальной диффузии плавучести, трения, бета-эффекта и для различных значений волнового числа k и номера моды n. Анализ проводится с помощью метода малых возмущений.

Для возникающей спектральной несамосопряженной задачи реализован эффективный аналитико-численный метод решения для ОДУ 4-го порядка с малым параметром при старшей производной и с вхождением спектрального параметра как в уравнение, так и в краевые условия. Метод основан на построении степенных разложений для линейно-независимых решений ОДУ, удовлетворяющих части краевых условий, и на выборе подходящей комбинации этих решений.

Для анализа зависимости СФ и СЗ этих задач от физических параметров R, Pr, Bu, μ, $n \in \mathbb{N}$ построены асимптотики СФ и СЗ при малых значениях волнового числа k. Показано, что при $k \to +0$ в задаче существуют 2 ограниченных СЗ и счетное множество неограниченно растущих СЗ с предельной точкой $c = -i\infty$.

Высокоточный расчет СЗ задачи основан на итерационном методе Ньютона с выбором начального значения исходя из построенных асимптотик и с использованием метода продолжения по параметру k.

Проведенный численный анализ показал, что в случае параметра $\mu = 0$ при определенных значениях волнового числа k из пар простых СЗ образуются двойные СЗ, лежащие на прямой $\mathrm{Re}(c) = \frac{1}{2}$. При значениях параметра $\mu \neq 0$ двойных СЗ не образуется.

В окрестности двойных СЗ классический итерационный метод Ньютона теряет свою эффективность, поэтому здесь был использован модифицированный метод Ньютона с учетом второй производной. Это позволило с высокой точностью вычислить большое количество СЗ, двойных СЗ и построить траектории СЗ $c_m(k)$ при увеличении волнового числа k. Участки этих траекторий $c_m(k)$, попадающие в верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}(c) > 0$, описывают неустойчивые по времени возмущения. Диапазон изменения волнового числа k неустойчивых возмущений исследуемого течения весьма сложным образом зависит от значений физических параметров задачи.

Представленные результаты дают возможность также судить об интересном и отчасти парадоксальном эффекте. Использованное в работе приближение конечного фронта показывает, что благодаря бета-эффекту амплитуды длинноволновых неустойчивых возмущений более высоких мод ($n = 2, 3, \ldots$) могут расти быстрее, чем амплитуда первой моды ($n = 1$). Это дает основание для предположения, что длинноволновые возмущения могут иметь поперечный масштаб меньше масштаба течения или фронта.

Полученные результаты в некоторых случаях представляют интерес для интерпретации данных натурных наблюдений интрузий и вихрей в зонах океанских зональных течений, см. [20], [21].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмина Н.П.* Об одной гипотезе образования крупномасштабных интрузий в Арктическом бассейне // Фундаментальная и прикл. гидрофиз. 2016. Т. 9. № 2. С. 15–26.
2. *Kuzmina N.P.* Generation of large-scale intrusions at baroclinic fronts: An analytical consideration with a reference to the Arctic ocean // Ocean Science. 2016. V. 12. P. 1269–1277; https://doi.org/10.5194/os-12-1269-2016

3. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* О неустойчивости геострофического течения с линейным вертикальным сдвигом скорости на масштабах интрузионного расслоения // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 1. С. 54–63.
4. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* Описание возмущений океанских геострофических течений с линейным вертикальным сдвигом скорости с учетом трения и диффузии плавучести // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 2. С. 73–85.
5. *Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Аналитико-численный метод решения задачи типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в океане // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 6. С. 1022–1039.
6. *Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Спектральный анализ модельных течений типа Куэтта применительно к океану // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 5. С. 867–888.
7. *Скороходов С.Л., Кузьмина Н.П.* Эффективный метод решения модифицированной задачи Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // Таврический вестник информатики и матем. 2016. № 3 (2.16). С. 88–97.
8. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* Спектральная задача типа Орра–Зоммерфельда для анализа неустойчивости течений в Арктическом бассейне // Международная научно-техническая конференция “Современные проблемы термогидромеханики океана” (СПТО-2017), 28–30 ноября 2017, М.: ИО РАН, Сб. тезисов. С. 87–90.
9. *Charney J.G.* The Dynamics of Long Waves in a Baroclinic Westerly Current // J. of Meteorology. 1947. V. 4. № 5. P. 135–162.
10. *Green J.S.A.* A problem in baroclinic stability // Quart. Journal. of the Royal. Meteorol. Soc. 1960. V. 86. № 368. P. 237–251.
11. *Demuth M., Hansmann M., Katriel G.* Eigenvalues of non-selfajoint operators: a comparison of two approaches // Operator Theory: Advances and Applications. 2013. V. 232. P. 107–163.
12. *Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D.S.* Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld operator // SIAM J. Appl. Math. 1993. V. 53. № 1. P. 15–47.
13. *Trefethen L.N.* Pseudospectra of linear operators // SIAM Review. 1997. V. 39. № 3. P. 383–406.
14. *Бойко А.В., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. М.: Ин-т компьют. исследований, 2006.
15. *Скороходов С.Л.* Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 10. С. 1672–1691.
16. *Скороходов С.Л.* Точки ветвления собственных значений оператора Орра–Зоммерфельда // Докл. АН. 2007. Т. 416. № 5. С. 600–605.
17. *Найфэ А.* Методы возмущений. М.: Наука, 1976. 474 с.
18. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
19. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
20. *Kuzmina N.P.* On the parameterization of interleaving and turbulent mixing using CTD data from the Azores Frontal Zone // J. Mar. Syst. 2000. V. 23. P. 285–302.
21. *Кузьмина Н.П., Скороходов С.Л., Журбас Н.В., Лыжков Д.А.* О неустойчивости геострофического течения с постоянным вертикальным сдвигом скорости с учетом диффузии массы и импульса // Международный симпозиум “Мезомасштабные и субмезомасштабные процессы в гидросфере и атмосфере” (МСП-2018), 30 октября – 2 ноября 2018, М.: ИО РАН, Труды конф. С. 205–208. https://doi.org/10.29006/978-5-990149-4-1-2018-57