ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 11, с. 1933–1949

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.958

О РЕГУЛЯРНОСТИ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ФОЙГТА[1)]

© 2020 г. В. Г. Звягин[1,*], В. П. Орлов[1,]**

[1] *394018 Воронеж, Университетская площадь, 1, Воронежский государственный университет, Россия*

**e-mail: zvg_vsu@mail.ru*

***e-mail: orlov_vp@mail.ru*

Поступила в редакцию 12.10.2019 г.
Переработанный вариант 20.05.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2020 г.

В настоящей работе устанавливаются существование и единственность сильного решения начально-краевой задачи для системы уравнений движения жидкости, являющейся дробным аналогом модели вязкоупругости Фойгта, в плоском случае. Реологическое уравнение данной модели содержит производные дробного порядка. Библ. 30.

Ключевые слова: вязкоупругая среда, уравнения движения, начально-граничная задача, слабое решение, модель вязкоупругости Фойгта, дробная производная.

DOI: 10.31857/S0044466920110162

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, уравнение Коши движения несжимаемой жидкости с постоянной плотностью, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset R^N$, $N = 2, 3$, $\partial\Omega \in C^2$ (см. [1]), имеет вид

$$\rho\left(\partial v/\partial t + \sum_{i=1}^{N} v_i \partial v/\partial x_i\right) = -\nabla p + \operatorname{Div}\sigma + \rho f, \quad \operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T = [0,T]\times\Omega. \tag{1.1}$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x),\dots,v_N(t,x))$ – вектор скорости частицы в точке x области Ω в момент времени t, ρ – плотность жидкости, $p = p(t,x)$ – давление жидкости в точке x в момент времени t, $\sigma(t,x)$ – девиатор тензора напряжений, $f(t,x)$ – плотность внешних сил, действующих на жидкость; $\operatorname{Div}\sigma$ есть вектор, координатами которого являются дивергенции вектор-столбцов матрицы σ.

Без ограничения общности будем считать плотность ρ равной единице.

Тип сплошной среды (жидкости) определяется соответствующим уравнением состояния (реологическим соотношением). Широкий спектр моделей сплошных сред определяется в одномерном случае с помощью реологического соотношения вида (см., например, [2], [3])

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{s} b_{ki} D_{0t}^{\beta_{ki}} D^k \sigma = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{r} a_{ki} D_{0t}^{\beta_{ki}} D^k \epsilon, \tag{1.2}$$

где D_{0t}^{α} – дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$, σ – напряжение, а ϵ – деформации.

Частным случаем моделей (1.2) являются модели с целочисленными производными ($\beta_{ki} = 0$), такие как хорошо известные модели Ньютона, Максвелла, Фойгта (Кельвина–Фойгта), Джеффриса и др. (см., например, [4]–[6] и ссылки в них).

Переход к моделям с дробными производными вызван потребностью изучения большого класса полимеров, в которых необходимо учитывать эффекты ползучести и релаксации. Оказывается, что подходящими для этого являются модели с дробными производными в реологических соотношениях. Широко известными и используемыми являются модели Скотта-Блэра, Зе-

[1)] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 19-11-00146).

нера, Бюргерса, обобщенные модели Максвелла и Кельвина–Фойгта, описывающие специфические классы полимеров. В [3] дана механическая интерпретация этих моделей и приведен библиографический обзор.

Ниже мы ограничиваемся простейшим случаем дробной модели (1.2), являющейся аналогом модели Фойгта (см. [2]). Данная дробная модель имеет механическую интерпретацию в виде параллельного соединения $\mathcal{N}\|SB$ элементов Ньютона и Скотта-Блэра (см. [3]). Элемент Ньютона $\mathcal{N}$ определяется реологическим соотношением $\sigma_1 = \nu_1\dot{\varepsilon}_1$, а элемент Скотта-Блэра SB определяется реологическим соотношением $\sigma_2 = \nu_2 D_{0t}^{\alpha}\epsilon_2$, $0 < \alpha < 1$. Здесь

$$D_{0t}^{\alpha}y(t) = \Gamma(1-\alpha)\int_0^t (t-s)^{-\alpha}y'(s)ds$$

дробная производная Капуто порядка α ($\Gamma(1-\alpha)$ – гамма-функция Эйлера) (см. [7, с. 6–8]).

Соответствующая многомерная модель определяется реологическим соотношением (см. [8])

$$\sigma = \gamma_0\mathscr{E}(v) + \gamma_1 I_{0t}^{1-\alpha}\mathscr{E}(v), \quad 0 < \alpha < 1. \tag{1.3}$$

Здесь $\mathscr{E}(v)$ является тензором скоростей деформации, т.е. матрицей с компонентами

$$\mathscr{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i),$$

а матрица σ является девиатором тензора напряжений σ. Выражение

$$I_{0t}^{1-\alpha}z(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}z(s)ds$$

является дробным интегралом Римана–Лиувилля порядка $1-\alpha$ (см. [7, с. 6–8]).

Подстановка (1.3) в уравнение (1.1) приводит к начально-краевой задаче

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + \sum_{i=1}^{N} v_i\partial v/\partial x_i - \mu_0 \operatorname{Div}\mathscr{E}(v) - \mu_1 \operatorname{Div}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathscr{E}(v)(s,x)ds + \nabla p = f(t,x),\\ (t,x)\in Q_T; \quad \operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q_T;\end{gathered} \tag{1.4}$$

$$v(0,x) = v^0(x), \quad x\in Q, \quad v(t,x) = 0, \quad (t,x)\in[0,T]\times\partial\Omega \tag{1.5}$$

с некоторыми коэффициентами $\mu_0 > 0$ и $\mu_1 \geq 0$.

В работах [8], [9] было установлено существование слабого решения начально-краевой задачи (1.4), (1.5) и некоторого ее обобщения в случае $N = 2, 3$. В [10]–[13] для данной модели был изучен случай наличия памяти вдоль траекторий поля скоростей.

Вопрос о регулярности слабых решений уравнений вязкоупругости, и, в частности, существования сильных решений, является весьма актуальным с разных точек зрения. Отправляясь от классического случая системы Навье–Стокса, исследованию свойств регулярности слабых решений для более сложных моделей посвящено значительное количество работ (см., например, [14] и ссылки в ней). Что касается сильной разрешимости (см., например, [15, с. 127], используя различные варианты регуляризации, удалось установить сильную разрешимость для ряда моделей с реологическими уравнениями с целыми производными, приводящихся к интегродифференциальным уравнениям с гладкими ядрами (см., например, [4], [16]–[22] и ссылки в них). Сильная разрешимость для моделей гидродинамики с дробными производными в реологических соотношениях, насколько нам известно, не изучалась. Целью этой статьи является заполнить этот пробел для таких моделей, приводящих к интегродифференциальным уравнениям с сингулярными ядрами.

В настоящей работе рассматривается вопрос о регулярности слабых решений обобщенной модели Фойгта (1.4), (1.5) в плоском случае, что в результате дает сильную разрешимость этой модели.

Особенностью этой дробной модели является наличие в уравнении движения (1.4) интегродифференциального оператора старшего порядка с сингулярным ядром. Это не позволяет напрямую применить аппроксимационно-топологический метод, как в случае целочисленных моделей, и требует привлечения методов теории сингулярных операторов и в конечном счете использования галеркинских приближений основных задач.

Заметим, что методика, используемая для данной модели, предположительно применима и для других упомянутых выше дробных моделей.

Структура работы следующая. В разд. 2 приводятся вспомогательные утверждения. В разд. 3 формулируется основной результат. В разд. 4 устанавливаются свойства гладкости слабых решений, априорные оценки решений. В разд. 5 изучаются галеркинские приближения основных задач. Разд. 6 посвящен изучению сильной разрешимости регуляризации основной задачи. В разд. 7 доказывается основная теорема.

Константы в неравенствах и цепочках неравенств, не зависящие от существенных параметров, обозначаются одной буквой M.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Мы будем использовать следующие обозначения. Нам понадобятся функциональные пространства V и H (см. [24, с. 20]) соленоидальных функций. Пространство $V = \{v \in W_2^1(\Omega)^N : v|_\Gamma = 0, \operatorname{Div} v = 0\}$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(v,u)_V = \sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega \mathscr{E}_{ij}(u)\mathscr{E}_{ij}(v)dx$$

и соответствующей нормой. Эта норма в пространстве V эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^N$. Пространство H является замыканием V в норме пространства $L_2(\Omega)^N$, V^{-1} – пространство, сопряженное к V. Знак $\langle g,u\rangle$ означает действие функционала $g \in V^{-1}$ на элемент $u \in V$.

Нормы в пространствах H, $L_2(\Omega)^{\mathrm{N}}$ и $L_2(\Omega)^{N\times N}$ будем обозначать через $|\cdot|_0$, в V как $|\cdot|_1$, в пространстве $W_2^\beta(\Omega)$ для $\beta \in R^1$ как $|\cdot|_\beta$. Нормы в $L_2(0, T; H)$ и $L_2(0, T; L_2(\Omega))$, обозначаются $\|\cdot\|_0$, нормы в $L_2(0, T; V)$ и $L_2(0,T;W_2^1(\Omega))$ как $\|\cdot\|_{0,1}$, а норма в пространстве $L_2(0, T; V^{-1})$ как $\|\cdot\|_{0,-1}$. Норма в пространстве $L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2)$ обозначается через $\|\cdot\|_{0,2}$.

Через $(\cdot, \cdot)$ обозначается скалярное произведение в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)$, H, $L_2(\Omega)^N$, $L_2(\Omega)^{N\times N}$, в каких именно – ясно из контекста.

Пусть $\mathscr{P}$ – оператор ортогонального проектирования на H в пространстве $L_2(\Omega)^2$ (см. [24, I.1.4]). Обозначим через A действующий в H оператор с областью определения $D(A) = W_2^2(\Omega)^2 \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)^2 \cap H$, определенный дифференциальным выражением $Av = -\mathscr{P}\operatorname{Div}\mathscr{E}(v)$. Заметим, что для соленоидальной v справедливо равенство $2\operatorname{Div}\mathscr{E}(v) = \Delta v$.

Оператор A является в H самосопряженным положительно-определенным оператором (см., например, [25, гл. IV, § 1]). Определена его дробная степень $A^{1/2}$. Для $v \in D(A^{1/2}) = V$ справедливы неравенства

$$m_1|v|_1 \le |A^{1/2}v|_0 \le m_2|v|_1, \tag{2.1}$$

а для $v \in D(A)$ неравенства

$$m_1|v|_2 \le |Av|_0 \le m_2|v|_2. \tag{2.2}$$

Здесь $m_i > 0$.

Кроме того, для $v,u \in D(A^{1/2}) = V$ справедливы соотношение $(\mathscr{E}(v),\mathscr{E}(u)) = (A^{1/2}v, A^{1/2}u)$ и неравенства

$$|\mathscr{E}(v)|_0 = |A^{1/2}v|_0, \quad m_1|v|_1 \le |\mathscr{E}(v)|_0 \le m_2|v|_1, \quad |\operatorname{Div}\mathscr{E}(v)|_{-1} \le M|v|_1. \tag{2.3}$$

3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем функциональные пространства

$$W_1(a,b) \equiv \{v : v \in L_2(a,b;V) \cap L^\infty(a,b;H), v' \in L_2(a,b;V^{-1})\};$$

$$W(a,b) \equiv \{v : v \in L_2(a,b;W_2^2(\Omega)^N) \cap L^\infty(a,b;H),\ v' \in L_2(a,b;H)\}.$$

Определение 3.1. Слабым решением задачи (1.4), (1.5) для $N = 2$ называется функция $v \in W_1(0,T)$, удовлетворяющая тождеству

$$d(v,\varphi)/dt - \sum_{i=1}^{2}(v_i v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathscr{E}(v),\mathscr{E}(\varphi)) + \mu_1\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathscr{E}(v)(s,x)ds, \mathscr{E}(\varphi)\right) = \langle f,\varphi\rangle \tag{3.1}$$

при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0, T]$ и начальному условию (1.5).

Замечание. Так как слабое решение v принадлежит пространству $W_1(0, T)$, то известно (см. [24, Теорема III.3.1]), что в плоском случае $W_1(0,T) \subset C([0,T],H)$. Поэтому начальное условие из (1.5) имеет смысл.

В [8] установлена

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v^0 \in H$ *и* $N = 2$. *Тогда задача* (1.4), (1.5) *имеет единственное слабое решение, удовлетворяющее неравенствам*

$$\sup_t |v(t,\cdot)|_0 + \|v\|_{0,1} \le M_0\left(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0\right), \tag{3.2}$$

$$\|\partial v/\partial t\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \le \Phi_0\left(\|f\|_{0,-1}, |v^0|_0\right). \tag{3.3}$$

Здесь константа M_0 *не зависит от* f *и* v^0, *а* $\Phi_0(t,s)$ – *некоторая положительная возрастающая по* $t \ge 0$ *и* $s \ge 0$ *функция.*

Сформулируем основные результаты.

Пусть $f \in L_2(0,T;H)$, $v^0 \in V$ и $N = 2$. Из условия теоремы 3.1 имеем, что задача (1.4), (1.5) имеет единственное слабое решение из $W_1(0, T)$. Однако оно обладает лучшими свойствами, а именно, это единственное слабое решение является сильным.

Запишем задачу (1.4), (1.5) в операторной форме. Нам будет удобно трактовать v как функцию переменной t со значениями в H и записывать как $v(t)$, обозначая через $v'(t)$ ее производную.

Положим

$$K_\varepsilon(v) = \sum_{i=1}^{2} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}((1+\varepsilon|v|^2)^{-1}v), \quad \varepsilon \ge 0, \quad \text{для} \quad v \in V. \tag{3.4}$$

Здесь $|v| = (v_1^2 + v_2^2)^{-1/2}$ означает норму вектора $v = (v_1, v_2)$.

Проектируя в $L_2(\Omega)^2$ уравнение (1.4) на H, получаем операторную форму задачи (1.4), (1.5)

$$v' + \mathscr{P}K_0(v) + \mu_0 Av + \mu_1\int_0^t (t-s)^{-\alpha}Av(s,\cdot)ds = f, \quad t \in [0,T], \quad v(0) = v^0. \tag{3.5}$$

Определение 3.2. Сильным решением задачи (3.5) называется функция $v \in W(0,T)$, удовлетворяющая при п.в. $t \in [0, T]$ уравнению (3.5) и начальному условию (3.5).

Следующий результат является основным.

Теорема 3.2. *Пусть* $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$ *и* $N = 2$. *Тогда задача* (3.5) *имеет единственное сильное решение* v.

Доказательство теоремы 3.2 основывается на свойствах решений регуляризованных задач

$$\begin{gathered}\partial v/\partial t + K_\varepsilon(v) - \mu_0\Delta v - \mu_1 \operatorname{Div}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathscr{E}(v)(s,x)ds + \nabla p = f(t,x),\\ (t,x) \in Q_T; \quad \operatorname{div} v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T;\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$v(0,x) = v^0(x), \quad x \in Q, \quad v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in [0,T] \times \partial\Omega. \tag{3.7}$$

Операторная форма задачи (3.6), (3.7) имеет вид

$$v' + \mathcal{P} K_\varepsilon(v) + \mu_0 A v + \mu_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} A v(s,\cdot) ds = f, \quad t \in [0,T], \quad v(0) = v^0. \tag{3.8}$$

Определение слабого и сильного решения регуляризованных ($\varepsilon > 0$) задач дается аналогично нерегуляризованному случаю ($\varepsilon = 0$). А именно, слабым решением задачи (3.6), (3.7) (или, что то же (3.8)) называется функция $v \in W_1(0,T)$, удовлетворяющая тождеству

$$d(v,\varphi)/dt - \sum_{i=1}^{2} (v_i(1+\varepsilon|v|^2)^{-1} v, \partial\varphi/\partial x_i) + \mu_0(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + \mu_1 \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi \rangle \tag{3.9}$$

при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0, T]$ и начальному условию (1.5).

Сильным решением задачи (3.8) называется функция $v \in W(0,T)$, удовлетворяющая при п.в. $t \in [0, T]$ уравнению и начальному условию из (3.8).

Справедлива

Теорема 3.3. *Пусть* $\varepsilon > 0$, $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$ *и* $N = 2$. *Тогда задача* (3.6), (3.7) *имеет единственное сильное решение* v. *Кроме того, справедливо равномерное по* $\varepsilon > 0$ *неравенство*

$$\|v\|_{0,2} + \|v\|_{W_2^1(0,T;H)} + \sup_{0 \le t \le T} |v(t,\cdot)|_1 \le \Phi\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right). \tag{3.10}$$

Здесь $\Phi(t, s)$ — *некоторая положительная возрастающая по* $t \ge 0$ *и* $s \ge 0$ *функция.*

4. СВОЙСТВА СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

4.1. Регулярность слабых решений

При $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v^0 \in H$ и $N = 2$ из теоремы 3.1 вытекает существование единственного слабого решения задачи (1.4), (1.5). Аналогичное утверждение справедливо и для более простой регуляризованной задачи (3.6), (3.7).

Установим следующее свойство слабых решений задачи (3.6), (3.7) (или, что то же, задачи (3.8)).

Теорема 4.1. *Пусть* $\varepsilon \ge 0$, $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$ *и* $N = 2$. *Пусть слабое решение* v *задачи* (3.8) *принадлежит* $W(0, T)$. *Тогда* v *является сильным решением.*

Доказательство теоремы 4.1. Так как $v \in W(0,T)$ является слабым решением задачи (3.6), (3.7), то при любом $\varphi \in V$ функция v удовлетворяет тождеству (3.9). Воспользовавшись тем, что $v \in W(0,T)$, в частности, при п.в. t $v(t,x) \in W_2^2(\Omega)^2 \cap \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)^2$, и тем, что $\operatorname{div} v = 0$, проинтегрируем в слагаемых в (3.9) по частям:

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{i=1}^{2} \left(v_i \left(1+\varepsilon|v|^2\right)^{-1} v, \partial\varphi/\partial x_i \right) = \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega v_i \left(1+\varepsilon|v|^2\right)^{-1} v \partial\varphi/\partial x_i dx = \\ &= -\sum_{i=1}^{2} \int_\Omega \partial v_i/\partial x_i \left(1+\varepsilon|v|^2\right)^{-1} v\varphi dx - \sum_{i=1}^{2} \int_\Omega v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(1+\varepsilon|v|^2\right)^{-1} v\right) \varphi dx = \\ &= -\sum_{i=1}^{2} \left(v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(1+\varepsilon|v|^2\right)^{-1} v\right), \varphi \right) = -(K_\varepsilon(v), \varphi); \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$J_3 = (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) = -(\operatorname{Div} \mathcal{E}(v), \varphi); \tag{4.2}$$

$$J_4 = \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s) ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = -\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \operatorname{Div} \mathcal{E}(v)(s) ds, \varphi \right), \quad \langle f, v \rangle = (f, v). \tag{4.3}$$

Пользуясь тем, что $\varphi = \mathcal{P}\varphi$, $v = \mathcal{P}v$ для $\varphi, v \in H$ и самосопряженностью $\mathcal{P}$ в пространстве $L_2(\Omega)^2$, получаем из (4.1), (4.3)

$$J_2 = -(K_\varepsilon(v), \varphi) = -(K_\varepsilon(v), \mathcal{P}\varphi) = -(\mathcal{P}K_\varepsilon(v), \varphi);$$
$$J_3 = -(\operatorname{Div}\mathscr{E}(v), \varphi) = -(\operatorname{Div}\mathscr{E}(v), \mathcal{P}\varphi) = (-\mathcal{P}\operatorname{Div}\mathscr{E}(v), \varphi);$$
$$J_4 = -\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\operatorname{Div}\mathscr{E}(v)(s)ds, \varphi\right) = -\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\operatorname{Div}\mathscr{E}(v)(s)ds, \mathcal{P}\varphi\right) = \tag{4.4}$$
$$= -\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{P}\operatorname{Div}\mathscr{E}(v)(s)ds, \varphi\right).$$

Так как $v \in W_2^1(0,T;H)$, то при п.в. t справедливо равенство

$$d(v(t), \varphi)/dt = (v'(t), \varphi). \tag{4.5}$$

Используя соотношения (3.5), (4.4) и (4.5), перепишем (3.9) в виде

$$\left(v' + \mathcal{P}K_\varepsilon(v) + \mu_0 Av + \mu_1\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{P}\operatorname{Div}\mathscr{E}(v)(s)ds, \varphi\right) = (f, \varphi). \tag{4.6}$$

Так как (4.6) справедливо при любой $\varphi \in V$, а V плотно в H, то из (4.6) вытекает соотношение

$$v' + \mathcal{P}K_\varepsilon(v) + \mu_0 Av + \mu_1\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{P}\operatorname{Div}\mathscr{E}(v)(s,\cdot)ds = f$$

при п.в. $t \in [0, T]$. Очевидно и выполнение начального условия $v(0) = v^0$.

Таким образом, v является сильным решением задачи (3.8).

Теорема 4.1 доказана.

4.2. Априорные оценки решений задачи (3.8) *с параметром*

Ниже мы установим априорные оценки сильных решений задачи (3.8). Но сначала нам будет удобно рассматривать более общую, чем (3.8) задачу с параметром $k > 0$.

Введем функцию $R(t)$:

$$R(t) = \exp(-kt)t^{-\alpha} \quad \text{при} \quad t \in [0,T], \quad R(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \notin [0,T]. \tag{4.7}$$

Умножая формально уравнение (3.8) на $\exp(-kt)$, где $k > 0$, с помощью простых преобразований получаем задачу

$$\bar{v}' + \exp(kt)\mathcal{P}K_\varepsilon(\bar{v}) + k\bar{v} + \mu_0 A\bar{v} + \mu_1\int_0^t R(t-s)A\bar{v}(s)ds = \bar{f}, \quad t \in [0,T], \quad v(0) = v^0. \tag{4.8}$$

Здесь $\bar{v} = \exp(-kt)v$, $\bar{f} = \exp(-kt)f$. Для простоты, опуская черту в обозначениях функций в (4.8), мы вместо задачи (4.8) будем рассматривать задачу

$$v' + \exp(kt)\mathcal{P}K_\varepsilon(v) + kv + \mu_0 Av + \mu_1\int_0^t R(t-s)Av(s)ds = f, \quad t \in [0,T], \quad v(0) = v^0. \tag{4.9}$$

Теорема 4.2. *Пусть* $\varepsilon \geq 0$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$ *и* $N = 2$. *Пусть k достаточно велико. Тогда для сильных решений v задач* (4.9) *справедливы оценки*

$$\sup_{0 \leq t \leq T}|v(t)|_0 + \|v\|_{0,1} \leq M_0\left(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0\right). \tag{4.10}$$

Доказательство. Докажем оценку (4.10).

Применим обе части уравнения (4.9) как функционал из V^{-1} к v. Учитывая, что $\langle K_\varepsilon(v), v\rangle = (K_\varepsilon(v), v) = 0$, $\langle f, v\rangle = (f, v)$ и проводя несложные выкладки, получаем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v(t)|_0^2 + k|v(t)|_0^2 + \mu_0(\mathscr{E}(v), \mathscr{E}(v)) + \mu_1\left(\int_0^t R(t-s)(\mathscr{E}(v)(s)ds, \mathscr{E}(v)(t)\right) = (f(t), v(t)). \tag{4.11}$$

Здесь мы учли, что $K_\varepsilon(v)$ ортогонально v в H.

Учитывая (2.1)–(2.3) и проводя простые преобразования, получаем отсюда

$$\frac{d}{dt}|v(t)|_0^2 + |v(t)|_0^2 + |v|_1^2 \le M\left(|f(t)|_{-1}|v(t)|_1 + \int_0^t R(t-s)|v(s)|_1\,ds\,|v(t)|_1\right). \tag{4.12}$$

Из (4.12) имеем при произвольном $\delta > 0$

$$\frac{d}{dt}|v(t)|_0^2 + |v(t)|_0^2 + |v(t)|_1^2 \le \delta|v(t)|_1^2 + C_1(\delta)|f(t)|_{-1}^2 + C_1(\delta)\left(\int_0^t R(t-s)|v(s)|_1\,ds\right)^2. \tag{4.13}$$

Выбирая δ достаточно малым и перенося первое слагаемое справа в левую часть (4.13), получаем отсюда

$$\frac{d}{dt}|v(t)|_0^2 + |v(t)|_1^2 \le M_1\left(|f(t)|_{-1}^2 + \left(\int_0^t R(t-s)|v(s)|_1\,ds\right)^2\right). \tag{4.14}$$

Интегрируя (4.14) на $[0, t]$, $0 \le t \le T$, получаем

$$|v(t)|_0^2 + \int_0^t |v(s)|_1^2\,ds \le M_2\left(\|f\|_{0,-1}^2 + \left|v^0\right|_0^2 + \int_0^t\left(\int_0^t R(\xi-s)|v(s)|_1\,d\xi\right)^2 ds\right). \tag{4.15}$$

Пусть

$$I(t) = \int_0^t R(t-s)|v(s)|_1\,ds.$$

Считая v равной нулю вне интервала $[0, T]$, пользуясь (4.7) и делая замену переменной $\xi = t - s$, перепишем правую часть $I(t)$ в виде

$$I(t) = \int_0^t R(t-s)|v(s)|_1\,ds = \int_0^t R(\xi)|v(t-\xi)|_1\,d\xi = \int_0^{+\infty} R(\xi)|v(t-\xi)|_1\,d\xi. \tag{4.16}$$

Учитывая, что

$$\int_0^{+\infty} R(\xi)d\xi \le k^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha), \tag{4.17}$$

с помощью интегрального неравенства Минковского, использования инвариантности L_2 нормы относительно сдвига и (4.17), получаем, что при любом $0 \le \bar{T} \le T$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\|I(t)\|_{L_2(0,\bar{T})} &\le \int_0^{+\infty} R(\xi)\left\||v(t-\xi)|_1\right\|_{L_2(0,\bar{T})}d\xi \le \int_0^{+\infty} R(\xi)d\xi\left\||v(t)|_1\right\|_{L_2(0,\bar{T})} \le \\ &\le \int_0^T R(\xi)d\xi\|v\|_{L_2(0,\bar{T};V)} \le M_3k^{\alpha-1}\|v\|_{L_2(0,\bar{T};V)}.\end{aligned} \tag{4.18}$$

Из оценок (4.15) и (4.18) следует, что

$$\sup_{0\le t\le T}|v(t)|_0^2 + \|v\|_{0,1}^2\,ds \le M_4\left(\|f\|_{0,-1}^2 + \left|v^0\right|_0^2\right) + M_4k^{2(\alpha-1)}\|v\|_{0,1}^2. \tag{4.19}$$

Выбирая k достаточно большим, так, чтобы $M_4k^{2(\alpha-1)} \le q < 1$, и перенося последнее слагаемое в (4.19) в левую часть, получаем отсюда оценку (4.10).

Теорема 4.2 доказана.

Теорема 4.3. *Пусть* $\varepsilon \geq 0$, $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$ *и* $N = 2$. *Пусть* v *является сильным решением задачи* (4.9). *Пусть* k *достаточно велико. Тогда справедливы оценки*

$$\sup_t |v(t,\cdot)|_1 + \|v\|_{0,2} \leq \Phi_1\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right), \tag{4.20}$$

$$\|v'\|_0 \leq \Phi_1\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right). \tag{4.21}$$

Здесь $\Phi_1(t, s)$ — *некоторая положительная возрастающая по* $t \geq 0$ *и* $s \geq 0$ *функция.*

Доказательство. Докажем оценки (4.20) и (4.21).

Умножая скалярно в H уравнение (4.9) на $v' + \mu_0 Av$, учитывая (2.1)–(2.3) и проводя несложные выкладки, получаем при произвольном $\delta > 0$

$$\begin{gathered} |v'(t)|_0^2 + |Av(t)|_0^2 + \frac{d}{dt}|A^{1/2}v(t)|_0^2 \leq \delta(|v'(t)|_0 + |Av(t)|_0^2) + \\ + C_1(\delta)\left(|f(t)|_0^2 + \left(\int_0^t R(t-s)|v(s)|_2\,ds\right)^2 + \exp(2kt)|K_\varepsilon(v)|_0^2\right). \end{gathered} \tag{4.22}$$

Оценим $|K_\varepsilon(v)|_0^2$. Напомним, что

$$K_\varepsilon(v) = \sum_{i=1}^2 v_i \frac{\partial}{\partial x_i}((1+\varepsilon|v|^2)^{-1}v). \tag{4.23}$$

Непосредственным дифференцированием получаем, что справедливо равенство

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial x_i}((1+\varepsilon|v|^2)^{-1}v) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(1+\varepsilon\sum_{i=1}^2|v_k|^2\right)^{-1} v\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(1+\varepsilon\sum_{i=1}^2|v_k|^2\right)^{-1}\right)v + \left(1+\varepsilon\sum_{i=1}^2|v_k|^2\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}v = \\ = -2\varepsilon\left(1+\varepsilon\sum_{i=1}^2|v_k|^2\right)^{-2}\left(\sum_{i=1}^2 v_k\frac{\partial}{\partial x_i}v_k\right)v + \left(1+\varepsilon\sum_{i=1}^2|v_k|^2\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}v = \\ = -2\varepsilon(1+\varepsilon|v|^2)^{-2}\left(\sum_{i=1}^2 v_k\frac{\partial}{\partial x_i}v_k\right)v + (1+\varepsilon|v|^2)^{-1}\frac{\partial}{\partial x_i}v. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Воспользовавшись элементарными оценками, получаем из соотношения (4.24) неравенство

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}((1+\varepsilon|v|^2)^{-1}v)\right| \leq M(\varepsilon(1+\varepsilon|v|^2)^{-2}|v||\partial v/\partial x_i| + (1+\varepsilon|v|^2)^{-1}|\partial v/\partial x_i|). \tag{4.25}$$

Из (4.23), (4.24) вытекает, что

$$|K_\varepsilon(v)| \leq M\left(\frac{\varepsilon|v|^2}{(1+\varepsilon|v|^2)^2}|v_x| + \frac{|v|}{1+\varepsilon|v|^2}|v_x|\right) \leq M|v||v_x|.$$

Здесь $|v_x|$ — норма матрицы Якоби v_x — вектор функции v.

Из (4.23) и (4.25) с помощью неравенства Гёльдера получаем, что

$$|K_\varepsilon(v)|_0 \leq M\|v\|_{L_4(\Omega)^2}\|v\|_{W_4^1(\Omega)^2}.$$

Отсюда следует (см. [24, раздел III.3.3])

$$|K_\varepsilon(v)|_0^2 \leq M|v(t)|_1^2|v(t)|_0|v(t)|_2. \tag{4.26}$$

Пользуясь неравенством (4.26) и оценкой (4.10), имеем при произвольном $\delta > 0$

$$\begin{gathered} \exp(kt)|K_\varepsilon(v)|_0^2 \leq M\exp(kt)|v(t)|_1^2|v(t)|_0|v(t)|_2 \leq \delta|v(t)|_2^2 + C_2(\delta)\exp(2kt)(\sup_t|v(t)|_2^2)^2|v|_1^4 \leq \\ \leq \delta|v(t)|_2^2 + C_2(\delta)\exp(2kt)M_4\left(\|f\|_0^2 + |v^0|_1^2\right)^2|v(t)|_1^4. \end{gathered} \tag{4.27}$$

Вернемся к неравенству (4.22). Подставляя (4.27) в (4.22), имеем

$$\begin{gathered}|v'(t)|_0^2 + |Av(t)|_0^2 + \frac{d}{dt}\left|A^{1/2}v(t)\right|_0^2 \le 2\delta(|v'(t)|_0^2 + |Av(t)|_0^2) + \\ + C_3(\delta)\left(|f(t)|_0^2 + \left(\int_0^t R(t-s)|v(s)|_2\,ds\right)^2 + \exp(2kt)\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right)^2 \left|v(t)_1^4\right|\right).\end{gathered} \tag{4.28}$$

Выбирая δ достаточно малым, получаем отсюда

$$|v'(t)|_0^2 + |Av(t)|_0^2 + \frac{d}{dt}\left|A^{1/2}v(t)\right|_0^2 \le M\left(|f(t)|_0^2 + \left(\int_0^t R(t-s)|v(s)|_2\,ds\right)^2 + \exp(2kT)\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right)^2 \left|v(t)_1^4\right|\right) \tag{4.29}$$

с некоторой константой M.

Оценим интеграл в правой части (4.29).

В силу (4.18) при $\overline{T} = t$ имеем

$$\int_0^t \left(\int_0^\tau R(\tau - s)|v(s)|_2\,ds\right)^2 d\tau = \int_0^t I^2(\tau)d\tau \le Mk^{\alpha-1}\int_0^t |v(s)|_2^2\,ds. \tag{4.30}$$

Пользуясь (4.29) и (4.30), получаем

$$|v'(t)|_0^2 + \frac{d}{dt}\left|A^{1/2}v(t)\right|_0^2 + |Av(t)|_0^2 \le M\left(|f(t)|_0^2 + k^{\alpha-1}\int_0^t |v(s)|_2^2\,ds + \exp(2kt)\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right)^2 \left|v(t)_1^4\right|\right). \tag{4.31}$$

Интегрируя (4.31) на $[0, t]$, $0 \le t \le T$, имеем

$$\begin{gathered}\int_0^t |v'(s)|_0^2\,ds + \left|A^{1/2}v(t)\right|_0^2 + \int_0^t |Av(s)|_0^2\,ds \le M_5\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right) + \\ + M_5k^{2(\alpha-1)}\int_0^T |v(s)|_2^2\,ds + M_5\exp(kt)\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right)\int_0^t \left|v(s)_1^4\right|ds.\end{gathered} \tag{4.32}$$

Выбирая k достаточно большим так, что $M_5k^{2(\alpha-1)} \le q < 1$ и перенося второе слагаемое справа в левую часть (4.32), получаем

$$\int_0^t |v'(s)|_0^2\,ds + \left|A^{1/2}v(t)\right|_0^2 + \int_0^t |Av(s)|_0^2\,ds \le M_5\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right) + M\exp(kt)\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right)\int_0^t \left|v(s)_1^4\right|ds. \tag{4.33}$$

Пользуясь соотношениями (2.1)–(2.3), перепишем (4.33) в виде

$$\int_0^t |v'(s)|_0^2\,ds + |v(t)|_1^2 + \int_0^t |v(s)|_2^2\,ds \le M_6\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right) + M_6\exp(kt)\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right)\int_0^t \left|v(s)_1^4\right|ds. \tag{4.34}$$

Из последней оценки (4.33) следует, что для функции $g(t) = |v(t)|_1^2$ справедливо неравенство типа Гронуолла

$$g(t) \le C_4 + C_4\int_0^t |v(s)|_1^2\,g(s)ds. \tag{4.35}$$

Здесь

$$C_4 = M_7\exp(kT)\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right). \tag{4.36}$$

Из (4.10), (4.35) и (4.36) следует, что

$$g(t) \le C_4\exp\left(C_4\int_0^T |v(s)|_1^2\,ds\right) \le C_4\exp\left(C_4M_0\left(\|f\|_{0,-1}^2 + \left|v^0\right|_0^2\right)^2\right) \le C_4\exp\left(C_4M_8\left(\|f\|_0^2 + \left|v^0\right|_1^2\right)^2\right). \tag{4.37}$$

Из (4.37) вытекает, что

$$|v(t,\cdot)|_1^2 \le \Psi_1\left(\|f\|_0 + \left|v^0\right|_1\right). \tag{4.38}$$

Здесь $\Psi_1(t, s)$ – некоторая положительная возрастающая по $t \ge 0$ и $s \ge 0$ функция.

Из (4.34) и (4.38) вытекает, что справедливо неравенство
$$\|v'\|_0^2 + \sup_{t\in[0,T]}|v(t)|_1^2 + \|v\|_{0,2}^2 \le \Psi_2\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right). \tag{4.39}$$
Здесь величина Ψ_2 зависит от $\|f\|_0$ и $|v^0|_1$.

Оценки (4.20), (4.21) доказаны.

Теорема 4.3 доказана.

4.3. Априорные оценки решений задачи (4.9)

Установим априорные оценки сильных решений задачи (4.9)

Пусть $\bar{v}$ является решением задачи (4.8) с правой частью $\bar{f} = \exp(-kt)f$. Нетрудно видеть, что функция $v = \exp(kt)\bar{v}$ является решением задачи (4.9) с правой частью f.

Очевидно, что для любой $u \in L_2(0, T)$ справедливы неравенства
$$\|\bar{u}\|_0 \le \|u\|_0 \le \exp(kT)\|\bar{u}\|_0. \tag{4.40}$$
В силу (4.40) из теорем 4.2 и 4.3 вытекает

Теорема 4.4. *Пусть* $\varepsilon \ge 0$, $f \in L_2(0, T; V^{-1})$, $v^0 \in H$ *и* $N = 2$. *Тогда для слабых решений задачи* (4.9) *справедливы оценки*
$$\sup_t|v(t)|_0 + \|v\|_{0,1} \le M_0\left(\|f\|_{0,-1}, |v^0|_0\right). \tag{4.41}$$
Пусть $\varepsilon \ge 0$, $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$. *Пусть* $v \in W(0, T)$ *является сильным решением задачи* (4.9). *Тогда справедливы оценки*
$$\sup_t|v(t)|_1 + \|v\|_{0,2} \le \Phi_1\left(\|f\|_{0,}, |v^0|_1\right), \tag{4.42}$$
$$\|v'\|_0 \le \Phi_1\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right). \tag{4.43}$$
Здесь $\Phi_1(t, s)$ — *некоторая положительная возрастающая по* $t \ge 0$ *и* $s \ge 0$ *функция.*

Отметим, что в частном случае $\varepsilon = 0$ утверждение теоремы 4.4 означает справедливость ее утверждения для решений задач (3.5) и (3.8).

Приведенные выше результаты установлены в предположении существования сильных решений соответствующих задач. В то время как существование слабых решений соответствующих задач установлено в теореме 3.1, существование сильных решений еще не доказано.

Для доказательства их существования мы воспользуемся методом Фаэдо—Галеркина.

5. ГАЛЕРКИНСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАДАЧ

5.1. Галеркинские приближения задачи (4.9)

Рассмотрим галеркинские приближения задачи (4.9). Пусть e_k, $k = 1, 2, \ldots$, являются ортонормированными собственными функциями, а λ_k собственными значениями самосопряженного в H оператора A, так что $Ae_k = \lambda_k e_k$. Зафиксируем натуральное число n. Обозначим через $\mathcal{P}_n$ оператор ортогонального проектирования в H на подпространство H_n, порожденное элементами e_1, e_2, ..., e_n.

Спроектируем задачу (4.9) на H_n:
$$v' + \exp(kt)\mathcal{P}_n K_\varepsilon(v) + kv + \mu_0 Anv + \mu_1\int_0^t R(t-s)Anv(s)ds = \mathcal{P}_n f, \quad t \in [0,T], \quad v(0) = \mathcal{P}_n v^0. \tag{5.1}$$

Определение 5.1. Сильным решением задачи (5.1) называется H_n-значная функция $v \in W(0, T)$, удовлетворяющая при п.в. $t \in [0, T]$ уравнению и начальному условию (5.1).

Здесь действующий в H_n оператор A_n определяется как $A_n = \mathcal{P}_n A$.

Для галеркинских приближений v задачи (5.1) справедлива

Теорема 5.1. *Пусть* $k > 0$, $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$ *и* $N = 2$. *Пусть* k *достаточно велико. Тогда существует сильное решение задачи* (5.1) *и справедливы оценки*

$$\sup_{0\le t\le T}\left|v(t,\cdot)\right|_0 + \|v\|_{0,1} \le M_0\left(\|f\|_{0,-1} + \left|v^0\right|_0\right), \tag{5.2}$$

$$\sup_{0\le t\le T}\left|v(t,\cdot)\right|_1 + \|v\|_{0,2} \le \Phi_2\left(\|f\|_0, \left|v^0\right|_1\right), \tag{5.3}$$

$$\|v'\|_0 \le \Phi_2\left(\|f\|_0, \left|v^0\right|_1\right). \tag{5.4}$$

Здесь $\Phi_2(t, s)$ — *некоторая положительная возрастающая по* $t \ge 0$ *и* $s \ge 0$ *функция.*

Доказательство. Будем искать решение задачи (5.1) в виде

$$v(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)e_k. \tag{5.5}$$

Умножим скалярно в H (5.1) на e_i. Тогда функции $g_i(t)$ являются решением интегродифференциальной системы уравнений

$$g_i'(t) + D_i(g) + kg_i(t) + \mu_0\lambda_i g_i(t) + \mu_1\lambda_i\int_0^t R(t-s)g_i(s)ds = f_i, \quad t \in [0,T], \quad g_i(0) = v_i^0, \quad 1 \le i \le n. \tag{5.6}$$

Здесь $g = (g_1, \ldots, g_n)$, $f_i = (f, e_i)$, $v_i^0 = (v^0, e_i)$, а выражение $D_i(g)$ определяется следующим образом.

Запишем собственные функции e_k и v в координатной форме: $e_k = (e_{k1}, e_{k2})$, $v = (v_1, v_2)$. Тогда из (5.5) следует, что

$$v_j(t) = \sum_{k=1}^{n} g_k(t)e_{kj}, \quad \partial v/\partial x_j = \sum_{r=1}^{n} g_r(t)\partial e_{kj}/\partial x_j, \quad j = 1,2. \tag{5.7}$$

При умножении (5.1) на e_i второе слагаемое дает выражение $\exp(kt)(\mathcal{P}_n K_\varepsilon(v), e_i)$.

Пользуясь самосопряженностью $\mathcal{P}_n$, (5.5) и (5.7), получаем, что

$$\begin{gathered}(\mathcal{P}_n K_\varepsilon(v), e_i) = (K_\varepsilon(v), \mathcal{P}_n e_i) = (K_\varepsilon(v), e_i) = \\ = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} g_k g_r(t)(t)e_{kj}(\partial e/\partial x_j, e_i) = \sum_{k,r=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} d_{kri}g_k g_r(t)(t).\end{gathered} \tag{5.8}$$

Здесь

$$d_{kri} = \sum_{j=1}^{2} e_{kj}(\partial e/\partial x_j, e_i).$$

Заметим, что

$$(1 + \varepsilon\left|v(t)\right|^2)^{-1} = (1 + \varepsilon\left|g(t)\right|^2)^{-1} = \left(1 + \varepsilon\sum_{k=1}^{n} g_k(t)^2\right)^{-1}. \tag{5.9}$$

Из (5.8), (5.9) следует, что

$$D_i(g) = \exp(kt)(1 + \varepsilon\left|g(t)\right|^2)^{-1}\sum_{k,r=1}^{n} d_{kri}g_k(t)g_r(t). \tag{5.10}$$

Проинтегрируем теперь (5.6) по t. Заметим сначала, что

$$\int_0^t\int_0^s R(s-\xi)g_i(\xi)d\xi ds = \int_0^t\int_s^t R(s-\xi)ds g_i(\xi)d\xi \equiv \int_0^t \bar{R}(t,\xi)g_i(\xi)d\xi. \tag{5.11}$$

Используя (5.10) и (5.11), имеем

$$\begin{gathered}g_i(t) + k\int_0^t g_i(s)ds + \int_0^t\left(\exp(ks)(1 + \varepsilon\left|g(s)\right|^2)^{-1}\sum_{k,r=1}^{n} d_{kri}g_k(s)g_r(s)\right)ds + \\ + \mu_0\lambda_i\int_0^t g_i(s)ds + \mu_1\int_0^t \bar{R}(t,s)\lambda_i g_i(s)ds = g_i(0) + \int_0^t f_i(s)ds, \quad t \in [0,T], \quad g_i(0) = v_i^0.\end{gathered} \tag{5.12}$$

Система (5.12) является системой вида

$$g_i(t) + k\int_0^t g_i(s)ds + \int_0^t Z_1(s, g(s))ds + \int_0^t Z_2(t, s)g(s)ds = \hat{f}(t). \tag{5.13}$$

Здесь

$$\hat{f}(t) = \mathcal{P}_n v^0 + \int_0^t \mathcal{P}_n f(s)ds, \quad Z_1(s, g) = (Z_{11}(s, g), Z_{12}(s, g)),$$

$$Z_{1,i}(s, g) = \exp(ks)(1 + \varepsilon|g(s)|^2)^{-1}\sum_{k,r=1}^n d_{kri}g_k(s)g_r(s) + \mu_0\lambda_i, \quad i = 1, 2, \quad Z_{2,i} = \mu_1\lambda_i\bar{R}(t, s).$$

Ядро $Z_1(s, g)$ непрерывно дифференцируемо по переменным s и g_i, а ядро $Z_2(t, s)$ непрерывно дифференцируемо по t, s.

Из [26, гл. X, § 2] вытекает, что при достаточно большом k_0 и $k > k_0$ система (5.13) однозначно разрешима, при этом $g(t)$ является дифференцируемой по t. Отсюда, из принадлежности $e_k \in \in D(A) \cap H_n$ при $1 \le k \le n$ и (5.5) следует, что H_n-значная функция $v \in W(0, T)$. Нетрудно показать, что v удовлетворяет при п.в. $t \in [0, T]$ уравнению и начальному условию (5.1).

Доказательство оценок теоремы 5.1 проводится так же, как и доказательство соответствующих оценок из теоремы 4.3.

Теорема 5.1 доказана.

5.2. Априорные оценки галеркинских приближений задачи (3.8)

Пусть $\bar{v}$ является решением задачи (5.1) с правой частью $\bar{f} = \exp(-kt)f$. Нетрудно видеть, что тогда функция $v = \exp(kt)\bar{v}$ является решением задачи

$$v' + \mathcal{P}_n K_\varepsilon(v) + \mu_0 A_n v + \mu_1\int_0^t (t - s)^{-\alpha} A_n v(s, \cdot)ds = \mathcal{P}_n f, \quad t \in [0, T], \quad v(0) = \mathcal{P}_n v^0. \tag{5.14}$$

Задача (5.14) определяет галеркинские приближения задачи (3.8).

В силу (4.40) из теоремы 5.1 вытекает

Теорема 5.2. *Пусть* $f \in L_2(0, T; H)$, $v^0 \in V$ *и* $N = 2$. *Тогда существует сильное решение задачи* (5.14) *и справедливы оценки*

$$\sup_{0\le t\le T}|v(t)|_0 + \|v\|_{0,1} \le M_0\left(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0\right), \tag{5.15}$$

$$\sup_{0\le t\le T}|v(t)|_1 + \|v\|_{0,2} \le \Phi_3\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right), \tag{5.16}$$

$$\|v'\|_0 \le \Phi_3\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right). \tag{5.17}$$

Здесь $\Phi_3(t, s)$ — *некоторая положительная возрастающая по* $t \ge 0$ *и* $s \ge 0$ *функция*.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.3

6.1. Аппроксимирующие задачи

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через v^n решение задачи (5.14). Тогда,

$$(v^n)' + \mathcal{P}_n K_\varepsilon(v^n) + \mu_0 A_n v^n + \mu_1 \operatorname{Div}\int_0^t (t - s)^{-\alpha} A_n v^n(s, x)ds = \mathcal{P}_n f, \quad t \in [0, T], \quad v(0) = \mathcal{P}_n v^0. \tag{6.1}$$

Задача (6.1) определяет галеркинское приближение v^n задачи (3.8). В силу теоремы 5.2 задача (6.1) имеет сильное решение v^n при фиксированном n, и справедливы неравенства

$$\sup_t|v^n(t, \cdot)|_0 + \|v^n\|_{0,1} \le M_0\left(\|f\|_{0,-1} + |v^0|_0\right), \tag{6.2}$$

$$\sup_t|v^n(t, \cdot)|_1 + \|v^n\|_{0,2} \le \Phi_4\left(\|f\|_0, |v^0|_1\right), \tag{6.3}$$

$$\left\|(v^n)'\right\|_{L_2(0,T;H)} \le M_1\left(\|f\|_0, \left|v^0\right|_1\right) \le \Phi_4\left(\|f\|_0, \left|v^0\right|_1\right). \tag{6.4}$$

6.2. Предельный переход

Так как, очевидно, сильное решение является слабым, то из определения слабого решения задачи (6.1) следует, что функция v^n удовлетворяет тождеству

$$\begin{gathered} d(v^n,\varphi)/dt - \sum_{i=1}^{2}\left(v_i^n\left(1+\varepsilon\left|v^n\right|^2\right)^{-1} v, \partial\varphi/\partial x_i\right) + \mu_0(\mathcal{E}(v^n),\mathcal{E}(\varphi)) + \\ + \mu_1\int_0^T\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^n)(s), \mathcal{E}(\varphi)\right) = (f,\varphi) \end{gathered} \tag{6.5}$$

для любой $j \in H_n$. Здесь учтено, что $(\mathcal{P}_n f,\varphi) = (f,\varphi)$ для $\varphi \in H_n$.

Зафиксируем n_0. Рассмотрим (6.1) при $n > n_0$ и $\varphi \in H_{n_0}$. Из оценок (6.2)–(6.4) следует, что последовательность v^n ограничена в гильбертовых пространствах $L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2)$ и $W_2^1(0,T;H)$ и поэтому слабо компактна. Будем считать, что v^n слабо в $L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2)$ и $W_2^1(0,T;H)$ сходится к некоторой v. Кроме того, v^n *-слабо сходится к v в $L_\infty(0,T;H))$ и сильно в $L_2(Q_T)^2$ (с точностью до подпоследовательности) (см. [27]).

Покажем, что v является слабым решением задачи (3.8).

Интегрируя (6.5) по t, получаем

$$\begin{gathered} (v^n(T),\varphi) - \sum_{i=1}^{2}\int_0^T\left(v_i^n\left(1+\varepsilon\left|v^n\right|^2\right)^{-1} v^n, \partial\varphi/\partial x_i\right)ds + \mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v^n)(s),\mathcal{E}(\varphi))ds + \\ + \mu_1\int_0^T\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^n)(s)ds, \mathcal{E}(\varphi)\right)dt = \int_0^T(f,\varphi)ds + (v^0,\varphi), \quad \varphi \in H_{n_0}. \end{gathered} \tag{6.6}$$

Пусть

$$I_1(n) = (v^n(T),\varphi), \quad I_2(n) = \sum_{i=1}^{2}\int_0^T\left(v_i^n\left(1+\varepsilon\left|v^n\right|^2\right)^{-1} v^n, \partial\varphi/\partial x_i\right)ds,$$

$$I_3(n) = \mu_0\int_0^T(\mathcal{E}(v^n)(s),\mathcal{E}(\varphi))ds,$$

$$I_4(n) = \int_0^T\left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^n)(s)ds, \mathcal{E}(\varphi)\right)dt.$$

Запишем тождество (6.6) в виде

$$I_1(n) - I_2(n) + \mu_0 I_3(n) + \mu_1 I_4(n) = \int_0^T(f,\varphi)ds + (v^0,\varphi) \tag{6.7}$$

и перейдем в (6.7) или, что то же в (6.6), к пределу при $n \to +\infty$.

Из оценки (6.2) вытекает ограниченность v^n в $L_2(0, T; V)$ и ограниченность значений $v^n(T, x)$ в H непрерывных H-значных функций $v^n(t, \cdot)$. Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T, V)$, а $v^n(T, x)$ слабо сходится к $v(T, x)$ в H. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} I_1(n) = (v(T),\varphi), \quad \lim_{n\to\infty} I_3(n) = \int_0^T(\mathcal{E}(v)(s),\mathcal{E}(\varphi))dt. \tag{6.8}$$

Слабая сходимость v^n к v в $L_2(0, T; V)$ и сильная в $L_2(0, T; H)$ позволяет утверждать (см. [28, с. 87]), что

$$\lim_{n\to\infty} I_2(n) = \sum_{i=1}^{2}\int_0^T \left(v_i \left(1 + \varepsilon\left|v^n\right|^2\right)^{-1} v, \partial\varphi/\partial x_i \right) ds. \tag{6.9}$$

Рассмотрим $I_4(n)$. Меняя порядок интегрирования в $I_4(n)$, имеем

$$I_4(n) = \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} \mathscr{E}(v^n)(s) ds, \mathscr{E}(\varphi) \right) dydt = \int_0^T \int_\Omega \mathscr{E}(v^n)(s,y) : \int_s^T (t-s)^{-\alpha} \mathscr{E}(\varphi)(y) dtdyds =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega \mathscr{E}(v^n)(s,y) : \psi(s,y) dyds, \quad \psi(s,y) = \int_s^T (t-s)^{-\alpha} \mathscr{E}(\varphi)(y) dt.$$

Здесь $A : B$ означает $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$, где a_{ij}, b_{ij} суть коэффициенты 2×2-матриц A и B.

Таким образом,

$$I_4(n) = \int_0^T \int_\Omega \mathscr{E}((v^n)(s,y)) : \psi(s,y) dyds. \tag{6.10}$$

В подынтегральном выражении члена $I_4(n)$ первый сомножитель сходится слабо в $L_2(Q_T)^{2\times 2}$. Отсюда вытекает, что в (6.10) допустим предельный переход при $n \to +\infty$ и

$$I_4(n) = \lim_{n\to+\infty} I_4(n) = \int_0^T \left(\mathscr{E}(v)(s), \int_s^T (t-s)^{-\alpha} \mathscr{E}(\varphi) ds \right) dt. \tag{6.11}$$

Меняя порядок интегрирования в (6.11), получаем

$$I_4(n) = \int_0^T \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\mathscr{E}(v)(s), \mathscr{E}(\varphi)) dsdt. \tag{6.12}$$

Из установленной сходимости слагаемых $I_i(n)$ вытекает справедливость соотношения

$$\begin{gathered}(v(T),\varphi) - \sum_{i=1}^{2}\int_0^T \left(v_i(t)\left(1+\varepsilon\left|v(t)\right|^2\right)^{-1} v(t), \partial\varphi/\partial x_i \right) dt + \mu_0 \int_0^T (\mathscr{E}(v)(t), \mathscr{E}(\varphi)) dt + \\ + \mu_1 \int_0^T \int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\mathscr{E}(v)(s)), \mathscr{E}(\varphi) dsdt = \int_0^T (f(t), \varphi) dt\end{gathered} \tag{6.13}$$

при любой гладкой $\varphi \in V_{n_0}$.

Используя плотность множества гладких функций из $\bigcup_{n=1}^{+\infty} V_n$ в V нетрудно показать, что (6.13) справедливо при любой $\varphi \in V$ и любом $t \in (0, T)$ вместо T.

Меняя в (6.13) T на t и дифференцируя по t при почти всех t, получаем, что v удовлетворяет тождеству

$$\begin{gathered}d(v(t),\varphi)/dt - \sum_{i=1}^{2} \left(v_i(t)\left(1+\varepsilon\left|v(t)\right|^2\right)^{-1} v(t), \partial\varphi/\partial x_i \right) + \mu_0(\mathscr{E}(v)(t), \mathscr{E}(\varphi)) + \\ + \mu_1 \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} (\mathscr{E}(v)(s)) ds, \mathscr{E}(\varphi) \right) = (f(t), \varphi).\end{gathered} \tag{6.14}$$

Таким образом, v является слабым решением задачи (3.6), (3.7).

Покажем, что найденное $v \in W(0, T)$. Поскольку v является слабым пределом последовательности v^n в $L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2)$ и $W_2^1(0,T;H)$, то (см. [29, с. 173, 179]) $v \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2) \cap W_2^1(0,T;H)$ и

$$\|v\|_{0,2} \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \|v^n\|_{0,2}, \quad \|v\|_{W_2^1(0,T;H)} \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \|v^n\|_{W_2^1(0,T;H)}. \tag{6.15}$$

Из (6.15) следует, что $v \in L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2) \cap W_2^1(0,T;H)$. Следовательно, $L(v) = v' + \Delta v$ принадлежит $L_2(Q_T)^2$. Из общих свойств решений параболических уравнений вытекает, что $v \in L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)^2)$ (см. [30, гл. III, § 6]). Кроме того,

$$\|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(\Omega)^2)} \le M\left(\|L(v)\|_0 + |v_0|_1\right) \le M\left(\|v\|_{0,2} + \|v\|_{W_2^1(0,T;H)} + |v_0|_1\right). \tag{6.16}$$

Из оценок (6.3), (6.4) и (6.15), (6.16) следует справедливость неравенства

$$\|v\|_{0,2} + \|v\|_{W_2^1(0,T;H)} + \sup_{0\le t\le T}|v(t,\cdot)|_1 \le \Psi_3 \tag{6.17}$$

с некоторой величиной Ψ_3, зависящей от $\|f\|_0$ и $\left|v^0\right|_1$.

Таким образом, слабое решение v принадлежит пространству $W(0, T)$.

Из теоремы 4.1 вытекает, что v является сильным решением задачи (3.6), (3.7), или, что то же, задачи (3.8).

Теорема 3.3 доказана.

7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2

7.1. Регуляризованные задачи

Установим сильную разрешимость задачи (3.5). Построим последовательность регуляризованных задач (1.4), (1.5). Рассмотрим последовательность задачи (3.6), (3.7) при $\varepsilon = 1/n$, зависящих от $n = 1, 2, \ldots$:

$$\partial v^n/\partial t + K_{1/n}(v) - \mu_0\Delta v^n + \nabla p^n - \mu_1 \operatorname{Div}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\mathscr{E}(v^n)(s,x)ds = f; \tag{7.1}$$

$$\operatorname{div} v^n = 0; \tag{7.2}$$

$$v^n(0,x) = v^0(x), \quad x \in \Omega; \quad v^n\Big|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{7.3}$$

В силу теоремы 3.3 задача (7.1)–(7.3) имеет сильное решение v^n при фиксированном n и справедливы неравенства

$$\sup_t\left|v^n(t,\cdot)\right|_1 + \left\|v^n\right\|_{0,2} \le \Phi\left(\|f\|_0, \left|v^0\right|_1\right), \tag{7.4}$$

$$\left\|(v^n)'\right\|_{L_2(0,T;H)} \le M_1\left(\|f\|_0, \left|v^0\right|_1\right) \le \Phi\left(\|f\|_0, \left|v^0\right|_1\right). \tag{7.5}$$

Здесь $\Phi(t, s)$ – некоторая положительная возрастающая по $t \ge 0$ и $s \ge 0$ функция.

Из оценок (7.4) и (7.5) следует, что последовательность v^n ограничена в гильбертовых пространствах $L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2)$ и $W_2^1(0,T;H)$ и поэтому слабо компактна. Будем считать, что v^n слабо в $L_2(0,T;W_2^2(\Omega)^2)$ и $W_2^1(0,T;H)$. Кроме того, v^n *-слабо сходится к v в $L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega)^2)$ и сильно в $L_2(Q_T)^2$ (с точностью до подпоследовательности (см. [27]).

Покажем, что v является слабым решением задачи (3.5).

7.2. Предельный переход

Так как, очевидно, сильное решение является слабым, то из определения слабого решения задачи (7.1)–(7.3) следует, что функция v^n удовлетворяет тождеству

$$\begin{gathered} d(v^n,\varphi)/dt - \sum_{i=1}^2\left(v_i^n\left(1 + n^{-1}\left|v^n\right|^2\right)^{-1} v^n, \partial\varphi/\partial x_i\right) + \mu_0(\mathscr{E}(v^n), \mathscr{E}(\varphi)) + \\ + \mu_1\left(\int_0^T\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\mathscr{E}(v^n)(s))ds, \mathscr{E}(\varphi)\right) = (f,\varphi) \end{gathered} \tag{7.6}$$

при любой $\varphi \in V$ и п.в. $t \in [0, T]$ и начальному условию (7.3).

Интегрируя (7.6) по t, получаем

$$(v^n(T),\varphi)-\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\left(v_i^n\left(1+n^{-1}\left|v^n\right|^2\right)^{-1}v^n,\partial\varphi/\partial x_i\right)ds+\mu_0\int_0^T(\mathscr{E}(v^n)(s),\mathscr{E}(\varphi))ds+ \\ +\mu_1\int_0^T\left(\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathscr{E}(v^n)(s)ds,\mathscr{E}(\varphi)\right)dt=\int_0^T(f,\varphi)ds+(v^0,\varphi),\quad \varphi\in V. \tag{7.7}$$

Пусть

$$I_1(n)=(v^n(T),\varphi),\quad I_2(n)=\sum_{i=1}^{2}\int_0^T\left(v_i^n\left(1+n^{-1}\left|v^n\right|^2\right)^{-1}v^n,\partial\varphi/\partial x_i\right)ds,$$

$$I_3(n)=\mu_0\int_0^T(\mathscr{E}(v^n)(s),\mathscr{E}(\varphi))ds,$$

$$I_4(n)=\int_0^T\left(\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathscr{E}(v^n)(s)ds,\mathscr{E}(\varphi)\right)dt.$$

Запишем тождество (7.7) в виде

$$I_1(n)-I_2(n)+\mu_0I_3(n)+\mu_1I_4(n)=\int_0^T(f,\varphi)ds+(v^0,\varphi) \tag{7.8}$$

и перейдем в (7.8) или, что то же, в (7.7), к пределу при $n\to+\infty$.

Из оценки (7.4) вытекает ограниченность v^n в $L_2(0, T; V)$ и ограниченность значений $v^n(T)$ в H непрерывных H-значных функций $v^n(t)$. Без ограничения общности будем считать, что v^n слабо сходится к v в $L_2(0, T; V)$, а $v^n(T,x)$ слабо сходится к $v(T,x)$ в H. Далее, доказательство соотношений

$$\lim_{n\to\infty}I_1(n)=(v(T),\varphi),\quad \lim_{n\to\infty}I_3(n)=\int_0^T(\mathscr{E}(v)(s),\mathscr{E}(\varphi))dt, \tag{7.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}I_2(n)=\sum_{i=1}^{N}\int_0^T(v_iv,\partial\varphi/\partial x_i)ds, \tag{7.10}$$

$$\lim_{n\to+\infty}I_4(n)=\int_0^T\left(\int_0^t\mathscr{E}(v)(s),\mathscr{E}(\varphi)\right)dsdt \tag{7.11}$$

проводится по той же схеме, что и доказательство соотношений (6.8), (6.9) и (6.12). Из установленной сходимости слагаемых $I_i(n)$ вытекает справедливость

$$(v(T),\varphi)-\int_0^T(v_iv,\partial\varphi/\partial x_i)\,dt+\mu_0\int_0^T(\mathscr{E}(v)(t),\mathscr{E}(\varphi))dt+\mu_1\int_0^T\left(\int_0^t(t-s)^{-\alpha}\mathscr{E}(v)(s)\right)ds,\mathscr{E}(\varphi)dt=\int_0^T(f(t),\varphi)dt \tag{7.12}$$

при любой гладкой φ.

Используя плотность множества гладких функций в V, нетрудно показать, что (7.12) справедливо при любой $\varphi\in V$ и любом $t\in(0, T)$ вместо T.

Меняя в (7.12) T на t и дифференцируя по t при почти всех t, получаем, что v удовлетворяет (3.1), т.е. v является слабым решением задачи (1.4), (1.5).

Для завершения доказательства теоремы 3.2 осталось показать, что найденное $v\in W(0, T)$.

Доказательство этого факта проводится по той же схеме, что и приведенное в конце доказательства теоремы 3.3 доказательство того, что слабое решение задачи (1.4), (1.5) принадлежит $v\in W(0, T)$.

Из теоремы 4.1 для $\varepsilon=0$ тогда вытекает, что v является сильным решением задачи (3.5), или, что то же, задачи (1.4), (1.5).

Далее, очевидно, что всякое сильное решение задачи (3.5) является слабым решением задачи (1.4), (1.5).

Единственность сильного решения вытекает из единственности слабого.

Теорема 3.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дьярмати И.* Неравновесная гидродинамика. Теория поля и вариационные принципы. М.: Изд-во иностр. лит., 1974.
2. *Огородников Е.Н., Радченко В.П., Яшагин Н.С.* Реологические модели вязкоупругого тела с памятью и дифференциальные уравнения дробных осцилляторов // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. 2011. Т. 22. № 1. С. 255–268.
3. *Mairandi F., Spada G.* Creep, Relaxation and Viscosity Properties fir Basic Fractional Models in Rheology // The European Physical Journal. Special Topics. 2011. V. 193. P. 133–160.
4. *Звягин В.Г.* О разрешимости некоторых начально-краевых задач для математических моделей движения нелинейно-вязких и вязкоупругих жидкостей // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. С. 57–69.
5. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: Крассанд, 2012.
6. *Zvyagin V.G., Orlov V.P.* Some mathematical models in thermomechanics of continua // J. of Fixed Point Theory and Appl. 2014. V. 15. № 1. P. 3–47.
7. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техн., 1987.
8. *Орлов В.П., Роде Д.А., Плиев М.А.* О слабой разрешимости обобщенной модели вязкоупругости Фойгта // Сиб. матем. журнал. 2017. Т. 5. № 5. С. 1110–1127.
9. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О разрешимости начально-краевой задачи для одной модели вязкоупругости с дробными производными // Сиб. матем. журнал. 2018. Т. 59. № 6. С. 1351–1369.
10. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A. 2018. V. 38. № 12. P. 6327–6350.
11. *Zvyagin V., Orlov V.* On one problem of viscoelastic fluid dynamics with memory on an infinite time interval // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B. 2018. V. 23. № 9. P. 3855–3877.
12. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О слабой разрешимости одной дробной модели вязкоупругости // Докл. АН. 2018. Т. 483. № 2. С. 136–139.
13. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* О слабой раз решимости дробной модели вязкоупругости Фойгта // Докл. АН. 2017. Т. 476. № 5. С. 492–494.
14. *Seregin G.* Lecture notes on regularity theory for the Navier–Stokes equations. Singapore: World scientific, 2015.
15. *Robinson J.C., Rodrigo J.L., Sadowski W.* The three-dimensional Navier–Stokes equations. Cambridge: University Press, 2016.
16. *Орлов В.П., Соболевский П.Е.* О гладкости обобщенных решений уравнений движения почти ньютоновских жидкостей // Числ. методы механ. сплошной среды. 1985. Т. 16. № 1. С. 107–119.
17. *Orlov V.P., Sobolevskii P.E.* On mathematical modes of a viscoelasticity with a memory // Diff. Integral Equations. 1991. V. 4. № 1. P. 103–115.
18. *Орлов В.П.* О сильных решениях регуляризованной модели нелинейно-вязкоупругой среды // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 2. С. 238–253.
19. *Орлов В.П., Паршин М.И.* Об одной задаче динамики термовязкоупругой среды с памятью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 4. С. 653–668.
20. *Звягин В.Г., Орлов В.П.* Об одной модели термовязкоупругости Джеффриса–Олдройда // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 10. С. 131–141.
21. *Звягин А.В., Звягин В.Г., Поляков Д.М.* О диссипативной разрешимости альфа-модели движения жидкости с памятью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1243–1257.
22. *Дмитриенко В.Т., Звягин В.Г.* О сильных решениях начально-краевой задачи для регуляризованной модели несжимаемой вязкоупругой среды // Изв. вузов. Матем. 2004. № 9. С. 24–40.
23. *Звягин В.Г., Воротников Д.А.* Обзор результатов и открытых проблем по математическим моделям движения вязкоупругих сред типа Джеффриса // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. 2009. № 2. С. 30–50.
24. *Темам Р.* Уравнение Навье–Стокса. М.: Мир, 1981.
25. *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
26. *Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А., Михлин С.Г., Раковщик А.С., Стеценко В.Я.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
27. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифференц. ур-ния. 2002. Т. 38. № 12. С. 1633–1645.
28. *Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию задач гидродинамики. Система Навье–Стокса. М.: Едиториал УРСС, 2004.
29. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
30. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.