ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 12, с. 2073–2084

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.928.4

Статья посвящается профессору В.Ф. Бутузову по случаю его 80-летия

ПРОЕКТОРНЫЙ ПОДХОД К АЛГОРИТМУ БУТУЗОВА–НЕФЕДОВА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ[1)]

© 2020 г.
Г. А. Курина[1,*], Н. Т. Хоай[2,]**

*[1] 394018 Воронеж, Университетская пл., 1, Воронежский гос. ун-т, Россия;
394042 Воронеж, Ленинский пр-т, 119А, Воронежский экономико-правовой ин-т, Россия;
119333 Москва, ул. Вавилова, 44/2, Федеральный научный центр "Информатика и управление" РАН, Россия*

[2] Нгуен Трай, Тхань Сюань, Ун-т науки, Вьетнамский национальный ун-т, Ханой, Вьетнам

**e-mail: kurina@math.vsu.ru*

***e-mail: nguyenthihoai@hus.edu.vn*

Поступила в редакцию 03.10.2019 г.
Переработанный вариант 12.05.2020 г.
Принята к публикации 04.08.2020 г.

Асимптотическое решение начальной задачи, содержащее пограничные функции двух типов, было построено при некоторых условиях В.Ф. Бутузовым и Н.Н. Нефедовым для дифференциального уравнения со второй степенью малого параметра перед производной и первой степенью этого параметра перед нелинейной функцией в правой части уравнения в случае вырожденной матрицы $A(t)$, стоящей в линейной части уравнения перед неизвестной функцией. В данной работе приведен алгоритм построения асимптотики с использованием ортогональных проекторов на $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$ (штрих обозначает транспонирование). Такой подход может быть полезен для понимания алгоритма построения асимптотики. Он позволяет представить формулы для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде. Библ. 19. Фиг. 2.

Ключевые слова: сингулярные возмущения, начальные задачи, асимптотика, критический случай, проекторный подход.

DOI: 10.31857/S0044466920120078

1. ВВЕДЕНИЕ

В большинстве публикаций, посвященных сингулярно возмущенным дифференциальным уравнениям, вырожденное уравнение, получающееся из уравнения для быстрой переменной при нулевом значении малого параметра, разрешимо относительно быстрой переменной. Если это не так, то этот более сложный случай называется критическим [1], сингулярным [2], нестандартным [3] или случаем, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре [4]. Многочисленные применения сингулярно возмущенных систем в критическом случае перечислены в [5].

Начальные задачи для сингулярно возмущенных дифференциальных и разностных систем в критическом случае впервые исследовали А.Б. Васильева и В.Ф. Бутузов [4]. Асимптотические решения краевых задач для таких систем получены в [1], [2] и [6]. Численные методы для сингулярно возмущенных систем в критическом случае рассматривались в [7] для начальных задач и в [8] для краевых задач.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ Г.А. Куриной (грант 17-11-01220) и Вьетнамским национальным фондом развития науки и технологий (НАФОСТЕД) Н.Т. Хоай (грант 101.02-2017.314).

В [9] построено асимптотическое решение, содержащее пограничные функции двух типов, для начальной задачи в вещественном m-мерном пространстве X для слабонелинейного дифференциального уравнения вида

$$\varepsilon^2 \frac{dx}{dt} = A(t)x + \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \quad x = x(t,\varepsilon) \in X, \quad t \in [0,T], \tag{1.1}$$

$$x(0,\varepsilon) = x^0, \tag{1.2}$$

где матрица $A(t)$ вырождена. Изучался и дискретный аналог задачи. В этой статье объясняется актуальность изучения уравнений вида (1.1). Рассматриваемая задача также кратко обсуждается в [1] и [10]. Здесь и далее $\varepsilon \geq 0$ означает малый параметр, а $m \times m$ матрица $A(t)$ и m-мерная вектор-функция $f(x,t,\varepsilon)$ предполагаются достаточно гладкими относительно своих аргументов.

В настоящей статье будет использоваться проекторный подход к построению асимптотического решения задачи (1.1), (1.2). Этот подход позволяет представить соотношения метода пограничных функций для нахождения членов асимптотики любого порядка в явном виде. Мы надеемся, что проекторный подход будет полезен для понимания алгоритма построения асимптотики для исследователей, занимающихся применением асимптотических методов при решении конкретных сингулярно возмущенных задач в критическом случае.

Отметим, что в классическом критическом случае, когда левая часть уравнения имеет вид $\varepsilon dx/dt$, проекторный подход использовался в [11] для асимптотического решения начальных задач и в [12] для построения асимптотического решения нулевого порядка сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач управления. Асимптотическое решение нулевого порядка сингулярно возмущенных линейно-квадратичных задач оптимального управления, в которых уравнение состояния принадлежит рассматриваемому в данной статье типу критического случая, представлено в [13].

Будем предполагать основные условия как в [9], а именно, для каждого $t \in [0,T]$ матрица $A(t)$ имеет m собственных значений $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_m(t)$ таких, что

Условие 1. $\lambda_j(t) = 0$, $j = 1, \ldots, k$, $k < m$.

Условие 2. Все k собственных векторов $v_1(t), \ldots, v_k(t)$ матрицы $A(t)$, соответствующих $\lambda_j(t) = 0$, $j = 1, \ldots, k$, линейно независимы.

Следуя [9], будем использовать собственные векторы, имеющие такую же гладкость, как и матрица $A(t)$. Существование таких собственных векторов доказано в [14].

К условиям 1, 2 дальше будут добавлены еще некоторые предположения.

Транспонирование будет обозначаться штрихом. Как обычно, I будет означать тождественный оператор. Для разложения функции $w(t,\varepsilon)$ в ряд по целым неотрицательным степеням ε: $w(t,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j w_j(t)$ будет использоваться обозначение $[w(t,\varepsilon)]_j = w_j(t)$.

Далее в разд. 2 приводится стандартное разложение рассматриваемой в пространстве X системы (1.1) на три системы относительно функций из асимптотического решения, зависящих от t, и относительно так называемых пограничных функций, зависящих от аргументов t/ε^i, $i = 1, 2$. В следующем разделе вводятся ортогональные проекторы пространства X на $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$. Эти проекторы используются в разд. 4 в алгоритме построения асимптотического приближения решения задачи (1.1), (1.2) нулевого порядка, а в разд. 5 в алгоритме построения асимптотического приближения n-го порядка, $n \geq 1$. Таблицы 1, 2 в этих двух разделах показывают последовательность действий для нахождения членов асимптотики. В разд. 6 на конкретном примере иллюстрируется проекторный подход к построению асимптотического приближения решения первого порядка. Последний раздел представляет собой заключение.

2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧИ

Следуя [9], будем искать асимптотическое решение задачи (1.1), (1.2) в виде

$$x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{2} \Pi_i x(\tau_i,\varepsilon), \tag{2.1}$$

где

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \bar{x}_j(t), \quad \Pi_i x(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \Pi_{ij}x(\tau_i), \quad \tau_i = t/\varepsilon^i, \quad i = 1, 2.$$

Функции $\Pi_{ij}x(\tau_i)$ будут найдены как в [9] с помощью дополнительных условий

$$\Pi_{ij}x(\tau_i) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau_i \to +\infty.$$

По традиции (см., например, [1, с. 8]), ряд $\sum_{j\ge 0}\varepsilon^j\bar{x}_j(t)$ с членами, зависящими от исходного аргумента t, называется регулярным рядом в отличие от пограничных рядов $\sum_{j\ge 0}\varepsilon^j\Pi_{ij}x(\tau_i)$, $i = 1, 2$, состоящих из так называемых пограничных функций, которые существенны только для аргументов вблизи точек, где заданы дополнительные условия (в окрестности нуля в рассматриваемом случае).

Будет использоваться следующее представление:

$$f(\bar{x}(t,\varepsilon) + \sum_{i=1}^{2}\Pi_i x(\tau_i,\varepsilon), t, \varepsilon) \equiv \bar{f} + \sum_{i=1}^{2}\Pi_i f,$$

где

$$\bar{f} = f(\bar{x}(t,\varepsilon), t, \varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \bar{f}_j(t),$$

$$\Pi_1 f = f(\bar{x}(\varepsilon\tau_1,\varepsilon) + \Pi_1 x(\tau_1,\varepsilon), \varepsilon\tau_1, \varepsilon) - f(\bar{x}(\varepsilon\tau_1,\varepsilon), \varepsilon\tau_1, \varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \Pi_{1j} f(\tau_1),$$

$$\Pi_2 f = f(\bar{x}(\varepsilon^2\tau_2,\varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon\tau_2,\varepsilon) + \Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon), \varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) -$$
$$- f(\bar{x}(\varepsilon^2\tau_2,\varepsilon) + \Pi_1 x(\varepsilon\tau_2,\varepsilon), \varepsilon^2\tau_2, \varepsilon) = \sum_{j\ge 0}\varepsilon^j \Pi_{2j} f(\tau_2).$$

Подставляя разложение (2.1) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t и τ_i, $i = 1, 2$, получаем следующие уравнения для членов ряда (2.1):

$$\frac{d\bar{x}_{j-2}(t)}{dt} = A(t)\bar{x}_j(t) + \bar{f}_{j-1}(t), \tag{2.2}$$

$$\frac{d\Pi_{1(j-1)}x(\tau_1)}{d\tau_1} = A(0)\Pi_{1j}x(\tau_1) + \Pi_{1(j-1)}f(\tau_1) + [(A(\varepsilon\tau_1) - A(0))\Pi_1 x(\tau_1,\varepsilon)]_j, \tag{2.3}$$

$$\frac{d\Pi_{2j}x(\tau_2)}{d\tau_2} = A(0)\Pi_{2j}x(\tau_2) + \Pi_{2(j-1)}f(\tau_2) + [(A(\varepsilon^2\tau_2) - A(0))\Pi_2 x(\tau_2,\varepsilon)]_j, \quad j \ge 0. \tag{2.4}$$

Чтобы записать уравнения (2.2)–(2.4) в одинаковом виде для любого $j \ge 0$, будем считать, что члены разложений с отрицательными индексами равны нулю.

Подставляя разложение (2.1) в (1.2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем равенства

$$\bar{x}_0(0) + \Pi_{10}x(0) + \Pi_{20}x(0) = x^0, \tag{2.5}$$

$$\bar{x}_j(0) + \Pi_{1j}x(0) + \Pi_{2j}x(0) = 0, \quad j > 0. \tag{2.6}$$

3. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ПРОСТРАНСТВА

Далее мы будем использовать разложения пространства X в ортогональные суммы (см., например, [15, с. 38])

$$X = \ker A(t) \oplus \operatorname{im} A(t)' = \ker A(t)' \oplus \operatorname{im} A(t).$$

Обозначим ортогональные проекторы пространства X на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$, соответствующие разложениям пространства X в две последние ортогональные суммы, через $P(t)$ и $Q(t)$. Можно записать эти проекторы в явном виде. А именно, пусть $V(t) = (v_1(t), \ldots, v_k(t))$ и $S(t) = (s_1(t), \ldots, s_k(t))$, где $s_1(t), \ldots, s_k(t)$ являются собственными векторами матрицы $A(t)'$, соответствующими собственным значениям $\lambda_j(t) = 0,\ j = 1, \ldots, k$. Следуя [10, с. 32], будем считать, что собственные векторы $s_i(t)$ выбраны таким образом, что $V(t)'S(t)$ является $k \times k$ единичной матрицей. Объяснение возможности такого выбора $s_i(t)$ дано, например, в [11].

Из условия 2 легко следует, что $k \times k$ матрицы $V(t)'V(t)$ и $S(t)'S(t)$ обратимы. Нетрудно проверить, что $P(t) = V(t)(V(t)'V(t))^{-1}V(t)'$ и $Q(t) = S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'$ являются ортогональными проекторами пространства X на подпространства $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$, соответствующими разложению пространства X в ортогональные суммы (см. также [16], с. 241).

Оператор $\mathcal{A}(t) = (I - Q(t))A(t)(I - P(t)) : \operatorname{im} A(t)' \to \operatorname{im} A(t)$ имеет обратный оператор, который будет обозначаться через $A(t)^+ = (I - P(t))\mathcal{A}(t)^+(I - Q(t))$.

Нетрудно доказать, что оператор $Q(t)P(t) : \ker A(t) \to \ker A(t)'$ обратим. Действительно, возьмем вектор x из $\ker A(t)$, тогда $x = V(t)c(t)$, где $c(t) = (c_1(t), \ldots, c_k(t))'$, а $c_i(t),\ i = 1, \ldots, k$, некоторые скалярные функции. Рассмотрим уравнение $Q(t)P(t)x = 0$. Отсюда следует, что $V(t)'S(t)(S(t)'S(t))^{-1}S(t)'V(t)c(t) = 0$. Поскольку $V(t)'S(t)$ является $k \times k$ единичной матрицей, то $c(t) = 0$, что означает доказываемую обратимость.

Дифференцируя тождество $A(t)P(t) = 0$, получаем

$$\frac{dA}{dt}(t)P(t) + A(t)\frac{dP}{dt}(t) = 0.$$

Следовательно,

$$Q(t)\frac{dA}{dt}(t)P(t) = 0. \tag{3.1}$$

В дополнение к условиям 1 и 2 предположим, что выполняются следующие условия.

Условие 3. Для каждого $t \in [0, T]$ оператор $(I - P(t))A(t)(I - P(t)) : \operatorname{im} A(t)' \to \operatorname{im} A(t)'$ устойчив, т.е. все собственные значения этого оператора имеют отрицательные вещественные части.

Условие 4. Уравнение $Q(t)f(y(t), t, 0) = 0$ имеет единственное достаточно гладкое изолированное решение $y(t) \in \ker A(t)$.

Условие 5. Для каждого $t \in [0, T]$ оператор

$$(Q(t)P(t))^{-1}Q(t)\overline{f}_x(t)P(t) : \ker A(t) \to \ker A(t), \tag{3.2}$$

где $\overline{f}_x(t) = f_x(\overline{x}_0(t), t, 0)$, устойчив.

4. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА

Из (2.2) следует уравнение для $\overline{x}_0(t)$:

$$A(t)\overline{x}_0(t) = 0.$$

Следовательно,

$$(I - P(t))\overline{x}_0(t) = 0. \tag{4.1}$$

Из (2.3) получаем уравнение для $\Pi_{10}x(\tau_1)$:

$$A(0)\Pi_{10}x(\tau_1) = 0.$$

Отсюда имеем

$$(I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1) = 0. \tag{4.2}$$

Ввиду (4.1) и (4.2) мы находим из (2.5) начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_{20}x(0) = (I - P(0))x^0. \tag{4.3}$$

Из (2.4) получаем уравнение для $\Pi_{20}x(\tau_2)$:

$$\frac{d\Pi_{20}x(\tau_2)}{d\tau_2} = A(0)\Pi_{20}x(\tau_2).$$

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{d(I-P(0))\Pi_{20}x(\tau_2)}{d\tau_2} = (I-P(0))A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(\tau_2), \tag{4.4}$$

$$\frac{d(P(0)\Pi_{20}x(\tau_2))}{d\tau_2} = P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(\tau_2). \tag{4.5}$$

В силу условия 3 получаем единственное решение начальной задачи (4.4), (4.3), удовлетворяющее неравенству

$$\|(I-P(0))\Pi_{20}x(\tau_2)\| \le c\exp(-\alpha\tau_2), \quad \tau_2 \ge 0,$$

с некоторыми положительными постоянными c и α, не зависящими от τ_2 (см., например, [17, с. 106]). В этой оценке может быть использована любая норма, поскольку все нормы в конечномерном пространстве эквивалентны. Функции, удовлетворяющие последнему неравенству, называются пограничными функциями экспоненциального типа.

Применим рассуждения из [18, с. 53]. Из (4.5) следует равенство

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) = P(0)\Pi_{20}x(0) + \int_0^{\tau_2} P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(s)ds.$$

Поскольку $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) \to 0$ при $\tau_2 \to +\infty$, то

$$P(0)\Pi_{20}x(0) = -\int_0^{+\infty} P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(s)ds.$$

Используя экспоненциальную оценку для $(I-P(0))\Pi_{20}x(s)$, мы однозначно определяем пограничную функцию экспоненциального типа $P(0)\Pi_{20}x(\tau_2)$:

$$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2) = -\int_{\tau_2}^{+\infty} P(0)A(0)(I-P(0))\Pi_{20}x(s)ds. \tag{4.6}$$

Следовательно, пограничная функция экспоненциального типа $\Pi_{20}x(\tau_2)$ найдена.

Из (2.2) при $j = 1$ получаем следующее равенство:

$$0 = A(t)\bar{x}_1(t) + \bar{f}_0(t).$$

Принимая во внимание (4.1), отсюда имеем

$$Q(t)f(P(t)\bar{x}_0(t), t, 0) = 0. \tag{4.7}$$

С учетом условия 4 из последнего равенства получаем функцию $P(t)\bar{x}_0(t)$. Таким образом, функция $\bar{x}_0(t)$ найдена.

Поскольку $\bar{x}_0(t)$ и $\Pi_{20}x(\tau_2)$ уже найдены, то мы можем получить из (2.5) начальное значение

$$P(0)\Pi_{10}x(0) = P(0)(x^0 - \bar{x}_0(0) - \Pi_{20}x(0)). \tag{4.8}$$

Из (2.3) при $j = 1$ следует уравнение

$$\frac{d\Pi_{10}x(\tau_1)}{d\tau_1} = A(0)\Pi_{11}x(\tau_1) + \tau_1\frac{dA}{dt}(0)\Pi_{10}x(\tau_1) + \Pi_{10}f(\tau_1).$$

Принимая во внимание (4.2), (3.1), (4.1) и (4.7), отсюда имеем

$$Q(0)\frac{d(P(0)\Pi_{10}x(\tau_1))}{d\tau_1} = Q(0)f(P(0)\bar{x}_0(0) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0).$$

Значит,

$$\frac{d(P(0)\Pi_{10}x(\tau_1))}{d\tau_1} = (Q(0)P(0))^{-1}Q(0)f(P(0)\bar{x}_0(0) + P(0)\Pi_{10}x(\tau_1), 0, 0). \tag{4.9}$$

Таблица 1. Алгоритм нахождения членов асимптотики нулевого порядка

Члены асимптотики	Формулы
$(I - P(t))\bar{x}_0(t) = 0$	(4.1)
$(I - P(0))\Pi_{10}x(\tau_1) = 0$	(4.2)
$(I - P(0))\Pi_{20}x(\tau_2)$	(4.4), (4.3)
$P(0)\Pi_{20}x(\tau_2)$	(4.6)
$P(t)\bar{x}_0(t)$	(4.7)
$P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$	(4.9), (4.8)

Ввиду (4.7) функция $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) \equiv 0$ является точкой покоя системы (4.9). Предположим, что выполнено следующее

Условие 6. Начальное значение (4.8) для $P(0)\Pi_{10}x(0)$ принадлежит области влияния точки покоя $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1) \equiv 0$.

В силу условия 6 решение $P(0)\Pi_{10}x(\tau_1)$ начальной задачи (4.9), (4.8) является пограничной функцией экспоненциального типа (см. [18, Лемму 3.1]).

Таким образом, функция $\Pi_{10}x(\tau_1)$ определена и, следовательно, найдена асимптотика нулевого порядка для решения задачи (1.1), (1.2).

В табл. 1 показана последовательность нахождения членов асимптотики нулевого порядка.

Замечание 1. Условия 3–6 в этой статье аналогичны соответствующим предположениям в [9].

Докажем здесь справедливость этого утверждения для условия 5.

Предположение из [9], соответствующее условию 5 в этой статье, означает в наших обозначениях, что для каждого $t \in [0, T]$ оператор

$$(S(t)'V(t))^{-1}S(t)'\bar{f}_x(t)V(t) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k \tag{4.10}$$

является устойчивым.

Докажем, что для каждого $t \in [0, T]$ спектры операторов (3.2) и (4.10) совпадают. Из этого результата будет следовать доказываемое утверждение. Аргумент t в формулах для краткости будем опускать.

Итак, пусть λ – собственное значение оператора (3.2). Тогда существует ненулевой собственный вектор $x \in \ker A$, соответствующий λ. Поскольку $x = Va$ для некоторого ненулевого элемента $a \in \mathbb{R}^k$, то

$$(QP)^{-1}Q\bar{f}_xPVa = \lambda Va.$$

Отсюда, учитывая выражения для проекторов P и Q, получаем равенство

$$S(S'S)^{-1}S'\bar{f}_xVa = \lambda S(S'S)^{-1}S'V(V'V)^{-1}V'Va.$$

Следовательно,

$$S'\bar{f}_xVa = \lambda S'Va,$$

т.е.

$$(S'V)^{-1}S'\bar{f}_xVa = \lambda a.$$

Таким образом, λ является собственным значением оператора (4.10).

Далее, пусть μ – собственное значение оператора (4.10). Тогда существует ненулевой собственный вектор $b \in \mathbb{R}^k$ такой, что

$$(S'V)^{-1}S'\bar{f}_xVb = \mu b.$$

Отсюда получаем равенства

$$S'\bar{f}_xPVb = \mu S'Vb$$

и

$$S(S'S)^{-1}S'\bar{f}_xPVb = \mu S(S'S)^{-1}S'PVb,$$

т.е.

$$Q\bar{f}_xPVb = \mu QPVb.$$

В силу условия 2 вектор Vb отличен от нуля. Следовательно, μ является собственным значением оператора (3.2) с соответствующим собственным вектором Vb.

Таким образом, мы получили доказываемое утверждение.

Аналогичность других условий доказывается подобным образом.

Для доказательства утверждения из замечания 1, касающегося условия 6, мы используем представление $\Pi_{10}x(\tau_1)$ в виде равенства $\Pi_{10}x(\tau_1) = V(0)b_0(\tau_1)$, где функция $b_0(\tau_1)$ участвует в формулировке предположения из [9], соответствующего условию 6 в этой статье.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Предположим, что члены ряда (2.1): $\bar{x}_j(t)$ и $\Pi_{ij}x(\tau_i)$, $i = 1, 2$, $j = 0, \ldots, n-1$, $n \geq 1$, уже найдены.

Из уравнения (2.2) при $j = n$ получаем равенство

$$A(t)\bar{x}_n(t) = \frac{d\bar{x}_{n-2}(t)}{dt} - \bar{f}_{n-1}(t),$$

где правая часть известна. Применяя к этому уравнению оператор $I - Q(t)$, имеем

$$(I - Q(t))A(t)(I - P(t))\bar{x}_n(t) = (I - Q(t))\left(\frac{d\bar{x}_{n-2}(t)}{dt} - \bar{f}_{n-1}(t)\right).$$

Отсюда находим

$$(I - P(t))\bar{x}_n(t) = A(t)^+(I - Q(t))\left(\frac{d\bar{x}_{n-2}(t)}{dt} - \bar{f}_{n-1}(t)\right). \tag{5.1}$$

Уравнение (2.3) при $j = n$ имеет вид

$$\frac{d\Pi_{1(n-1)}x(\tau_1)}{d\tau_1} = A(0)\Pi_{1n}x(\tau_1) + \Pi_{1(n-1)}f(\tau_1) + \left[(A(\varepsilon\tau_1) - A(0))\Pi_1x(\tau_1, \varepsilon)\right]_n,$$

откуда получаем пограничную функцию экспоненциального типа:

$$(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1) = A(0)^+(I - Q(0))\left(\frac{d\Pi_{1(n-1)}x(\tau_1)}{d\tau_1} - \Pi_{1(n-1)}f(\tau_1) - \left[(A(\varepsilon\tau_1) - A(0))\Pi_1x(\tau_1, \varepsilon)\right]_n\right). \tag{5.2}$$

Используя (5.1), (5.2), можно найти из (2.6) при $j = n$ начальное значение

$$(I - P(0))\Pi_{2n}x(0) = -(I - P(0))\bar{x}_n(0) - (I - P(0))\Pi_{1n}x(0). \tag{5.3}$$

Из (2.4) при $j = n$ получаем уравнение для $\Pi_{2n}x(\tau_2)$:

$$\frac{d\Pi_{2n}x(\tau_2)}{d\tau_2} = A(0)\Pi_{2n}x(\tau_2) + \Pi_{2(n-1)}f(\tau_2) + [(A(\varepsilon^2\tau_2) - A(0))\Pi_2x(\tau_2, \varepsilon)]_n.$$

Это уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{d(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2)}{d\tau_2} &= (I - P(0))A(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) + \\ &+ (I - P(0))\Pi_{2(n-1)}f(\tau_2) + (I - P(0))[(A(\varepsilon^2\tau_2) - A(0))\Pi_2x(\tau_2, \varepsilon)]_n,\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{d(P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2))}{d\tau_2} &= P(0)A(0)(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2) + \\ &+ P(0)\Pi_{2(n-1)}f(\tau_2) + P(0)[(A(\varepsilon^2\tau_2) - A(0))\Pi_2x(\tau_2, \varepsilon)]_n.\end{aligned} \tag{5.5}$$

Сумма двух последних слагаемых в правой части в (5.4) является известной пограничной функцией экспоненциального типа. Поэтому с учетом условия 3 из (5.4), (5.3) можно найти пограничную функцию экспоненциального типа $(I-P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2)$. Отметим, что подробное доказательство экспоненциальных оценок для пограничных функций приведено в монографии [18].

Поскольку выражение в правой части в (5.5) теперь является известной пограничной функцией экспоненциального типа, то можно аналогично [18, с. 53], получить из (5.5) пограничную функцию экспоненциального типа $P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2)$:

$$P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2)=-\int\limits_{\tau_2}^{+\infty}P(0)(A(0)(I-P(0))\Pi_{2n}x(s)+\Pi_{2(n-1)}f(s)+[(A(\varepsilon^2 s)-A(0))\Pi_2x(s,\varepsilon)]_n)\,ds. \qquad (5.6)$$

Следовательно, пограничная функция экспоненциального типа $\Pi_{2n}x(\tau_2)$ определена.

Запишем уравнение (2.2) при $j=n+1$:

$$\frac{d\bar{x}_{n-1}(t)}{dt}=A(t)\bar{x}_{n+1}(t)+\bar{f}_n(t).$$

Из этого уравнения получаем следующее соотношение:

$$Q(t)\left(\bar{f}_n(t)-\frac{d\bar{x}_{n-1}(t)}{dt}\right)=0. \qquad (5.7)$$

В силу (5.1) функция $\bar{f}_n(t)$ имеет вид

$$\bar{f}_n(t)=\bar{f}_x(t)P(t)\bar{x}_n(t)+\zeta(t),$$

где $\zeta(t)$ — известная функция, зависящая от $\bar{x}_j(t)$, $j<n$. Учитывая условие 5, из (5.7) можно однозначно определить функцию $P(t)\bar{x}_n(t)$. Таким образом, функция $\bar{x}_n(t)$ найдена.

Затем можно найти из (2.6) при $j=n$ начальное значение

$$P(0)\Pi_{1n}x(0)=-P(0)(\bar{x}_n(0)+\Pi_{2n}x(0)). \qquad (5.8)$$

Из (2.3) при $j=n+1$ получаем

$$\frac{d\Pi_{1n}x(\tau_1)}{d\tau_1}=A(0)\Pi_{1(n+1)}x(\tau_1)+\Pi_{1n}f(\tau_1)+\left[\left(A(\varepsilon\tau_1)-A(0)\right)\Pi_1x(\tau_1,\varepsilon)\right]_{n+1},$$

откуда следует уравнение

$$\begin{gathered}\frac{d(P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1))}{d\tau_1}=(Q(0)P(0))^{-1}Q(0)\times\\ \times\left(\Pi_{1n}f(\tau_1)-\frac{d((I-P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1))}{d\tau_1}+\left[\left(A(\varepsilon\tau_1)-A(0)\right)\Pi_1x(\tau_1,\varepsilon)\right]_{n+1}\right).\end{gathered} \qquad (5.9)$$

Ввиду (3.1) и (5.2) функция

$$\begin{gathered}Q(0)\left[\left(A(\varepsilon\tau_1)-A(0)\right)\Pi_1x(\tau_1,\varepsilon)\right]_{n+1}=Q(0)\left(\tau_1\frac{dA}{dt}(0)(I-P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1)+\right.\\ \left.+\left[(A(\varepsilon\tau_1)-A(0)-\varepsilon\tau_1\frac{dA}{dt}(0)(I-P(0)))\Pi_1x(\tau_1,\varepsilon)\right]_{n+1}\right)\end{gathered}$$

является известной пограничной функцией экспоненциального типа.

В силу (5.2) функция $\Pi_{1n}f(\tau_1)$ имеет вид

$$\Pi_{1n}f(\tau_1)=f_x(\bar{x}_0(0)+\Pi_{10}x(\tau_1),0,0)P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1)+\Pi_1\zeta(\tau_1),$$

где $\Pi_1\zeta(\tau_1)$ является известной пограничной функцией экспоненциального типа, зависящей от $\Pi_{1j}x(\tau_1)$, $j<n$.

Следовательно, уравнение (5.9) является линейным относительно $P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1)$. В [18, Лемма 3.1] установлено, что решение задачи вида (5.9), (5.8) при условии 5 является пограничной функцией экспоненциального типа.

Таким образом, мы нашли члены n-го порядка в разложении (2.1).

Таблица 2. Алгоритм нахождения членов асимптотики n-го порядка, $n \ge 1$

Члены асимптотики	Формулы
$(I - P(t))\bar{x}_n(t)$	(5.1)
$(I - P(0))\Pi_{1n}x(\tau_1)$	(5.2)
$(I - P(0))\Pi_{2n}x(\tau_2)$	(5.4), (5.3)
$P(0)\Pi_{2n}x(\tau_2)$	(5.6)
$P(t)\bar{x}_n(t)$	(5.7)
$P(0)\Pi_{1n}x(\tau_1)$	(5.9), (5.8)

В табл. 2 показана последовательность нахождения членов n-го порядка в разложении (2.1).

Из предыдущих рассуждений вытекает

Теорема 1. *При предположениях* 1–6 *с помощью ортогональных проекторов* $P(t)$ *на* $\ker A(t)$ *и* $Q(t)$ *на* $\ker A(t)'$ *можно построить асимптотическое решение задачи* (1.1), (1.2) *в виде* (2.1). *Порядок определения членов асимптотики* j*-го порядка,* $j \ge 0$*, следующий*:

$$(I - P(t))\bar{x}_j(t), \quad (I - P(0))\Pi_{1j}x(\tau_1), \quad (I - P(0))\Pi_{2j}x(\tau_2),$$
$$P(0)\Pi_{2j}x(\tau_2), \quad P(t)\bar{x}_j(t), \quad P(0)\Pi_{1j}x(\tau_1).$$

6. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Для полноты изложения рассмотрим подробно алгоритм нахождения асимптотического решения первого порядка для следующей начальной задачи вида (1.1), (1.2) на отрезке [0, 0.3]:

$$\varepsilon^2 \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ t+1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} -z + 2t \\ -3t + 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

$$y(0,\varepsilon) = 1, \quad z(0,\varepsilon) = 1. \tag{6.2}$$

Здесь

$$x(t,\varepsilon) = (y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon))', \quad y(t,\varepsilon), z(t,\varepsilon) \in \mathbb{R},$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ t+1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(x,t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 2t \\ -3t+1 \end{pmatrix}, \quad x^0 = (1,1)'.$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом примере имеем

$$\lambda_1(t) = 0, \quad \lambda_2(t) = -1, \quad \ker A(t) = \{(0,a)'\}, \quad V(t) = (0,1)', \quad \ker A(t)' = \{((t+1)a, a)'\},$$

$$S(t) = (t+1,1)', \quad \operatorname{im} A(t) = \{(-a,(t+1)a)'\}, \quad \operatorname{im} A(t)' = \{(a,0)'\},$$

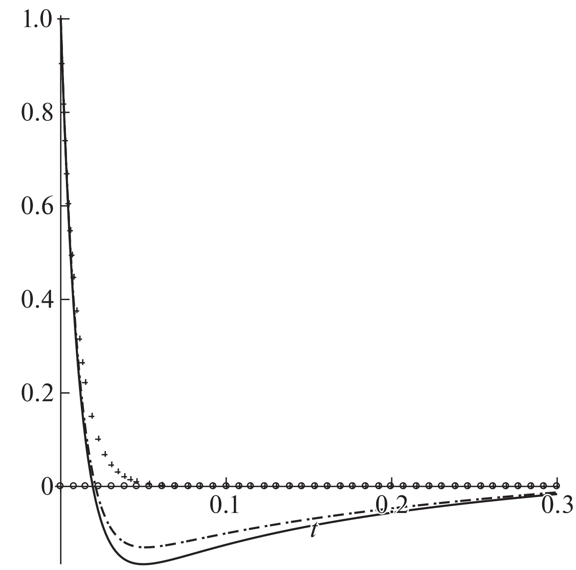
$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I - P(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(t) = \frac{1}{(t+1)^2+1}\begin{pmatrix} (t+1)^2 & t+1 \\ t+1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(I - P(t))A(t)(I - P(t)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \operatorname{im} A(t)' \to \operatorname{im} A(t)',$$

$$(Q(t)P(t))^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (t+1)^2+1 \end{pmatrix} : \ker A(t)' \to \ker A(t),$$

$$A(t)^+ = \frac{1}{(t+1)^2+1}\begin{pmatrix} -1 & t+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \operatorname{im} A(t) \to \operatorname{im} A(t)'.$$

Используя проекторы $P(t)$ и $Q(t)$, построим асимптотическое решение первого порядка для задачи (6.1), (6.2).



Фиг. 1. Траектория $y(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.1$ и ее приближения.

Равенство (4.1) в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{y}_0(t) \\ \bar{z}_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{y}_0(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\bar{y}_0(t) = 0$. Аналогичным образом из (4.2) получаем $\Pi_{10}y(\tau_1) = 0$.

Из (4.4) и (4.3) имеем начальную задачу

$$\frac{d\Pi_{20}y(\tau_2)}{d\tau_2} = -\Pi_{20}y(\tau_2), \quad \Pi_{20}y(0) = 1$$

с единственным решением $\Pi_{20}y(\tau_2) = e^{-\tau_2}$.

Пограничная функция $\Pi_{20}z(\tau_2) = -\int_{\tau_2}^{+\infty} e^{-s}ds = -e^{-\tau_2}$ находится из (4.6).

Решая уравнение (4.7), получаем $\bar{z}_0(t) = (2t^2 - t + 1)/(t + 1)$.

Начальная задача (4.9), (4.8) для этого примера имеет вид

$$\frac{d\Pi_{10}z(\tau_1)}{d\tau_1} = -\Pi_{10}z(\tau_1), \quad \Pi_{10}z(0) = 1.$$

Отсюда имеем $\Pi_{10}z(\tau_1) = e^{-\tau_1}$.

Из (5.1) и (5.2) при $n = 1$ получаем соответственно $\bar{y}_1(t) = (3t - 1)/(t + 1)$ и $\Pi_{11}y(\tau_1) = -e^{-\tau_1}$.

Из (5.4) и (5.3) получаем следующую начальную задачу для $\Pi_{21}y(\tau_2)$:

$$\frac{d\Pi_{21}y(\tau_2)}{d\tau_2} = -\Pi_{21}y(\tau_2) + e^{-\tau_2}, \quad \Pi_{21}y(0) = 2.$$

Решением последней задачи является $\Pi_{21}y(\tau_2) = (\tau_2 + 2)e^{-\tau_2}$.

Из (5.6) находим $\Pi_{21}z(\tau_2) = -(\tau_2 + 3)e^{-\tau_2}$.

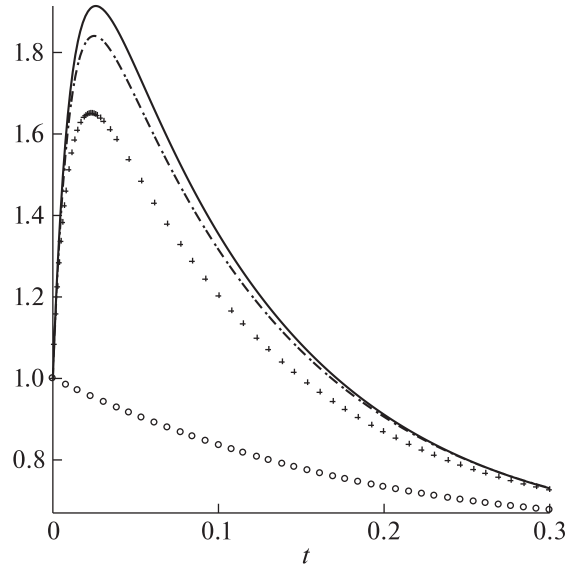
Из (5.7) следует, что $\bar{z}_1(t) = -2(t^2 + 2t - 1)/(t + 1)^3$.

Из (5.9) и (5.8) получаем начальную задачу

$$\frac{d\Pi_{11}z(\tau_1)}{d\tau_1} = -\Pi_{11}z(\tau_1) - (\tau_1 + 1)e^{-\tau_1}, \quad \Pi_{11}z(0) = 1,$$

решением которой является $\Pi_{11}z(\tau_1) = (-\tau_1^2/2 - \tau_1 + 1)e^{-\tau_1}$.

Таким образом, мы нашли асимптотическое решение первого порядка вида (2.1) для задачи (6.1), (6.2).



Фиг. 2. Траектория $z(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0.1$ и ее приближения.

Результаты вычислений при $\varepsilon = 0.1$, полученные с помощью Maple 17, приведены на фиг. 1, 2. Сплошная линия представляет точное решение, линия, состоящая из кружочков, – решение вырожденной задачи, линия, состоящая из крестиков, – приближение нулевого порядка и штрихпунктирная линия – приближение первого порядка. На фигурах видно, что асимптотическое решение ближе к точному, если мы используем асимптотику более высокого порядка. Если будем использовать меньшее значение ε, то получим лучшие приближения асимптотических решений к точному.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье рассматривается новый подход к алгоритму метода пограничных функций из [9] для асимптотического решения начальных задач вида (1.1), (1.2) в критическом случае. А именно, алгоритм формулируется с помощью ортогональных проекторов пространства X на $\ker A(t)$ и $\ker A(t)'$. Такой подход наглядно показывает структуру алгоритма для нахождения частей членов асимптотики любого порядка в дополнительных подпространствах (см. табл. 1, 2). Отметим, что приведение к жордановой форме является более сложной процедурой, чем нахождение ортогональных проекторов, которые используются в этой статье, поскольку для последнего достаточно знать только собственные векторы, соответствующие нулевым собственным значениям. На основе табл. 1, 2 может быть написана вычислительная программа для нахождения асимптотики решения любого порядка с помощью компьютера.

Некоторые результаты этой статьи были анонсированы в [19].

Авторы выражают глубокую признательность В.Ф. Бутузову за полезное обсуждение данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильева А.В., Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: МГУ, 1978.
2. *O'Malley R.E., Jr.* A Singular Singularly-Perturbed Linear Boundary Value Problem // SIAM J. Math. Anal. 1979. V. 10. № 4. P. 695–708.
3. *Khalil H.K.* Feedback Control of Nonstandard Singularly Perturbed Systems // IEEE Trans. on Automat. Control. 1989. V. 34. № 10. P. 1052–1060.
4. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б.* Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре // Дифференц. ур-ния. 1970. Т. 6. № 4. С. 650–664.

5. *Gu Z.M., Nefedov N.N., O'Malley R.E., Jr.* On Singular Singularly Perturbed Initial Value Problems // SIAM J. Appl. Math. 1989. V. 49. № 1. P. 1–25.
6. *Schmeiser C., Weiss R.* Asymptotic Analysis of Singular Singularly Perturbed Boundary Value Problems // SIAM J. Math. Anal. 1986. V. 17. № 3. P. 560–579.
7. *O'Malley R.E., Jr., Flaherty J.E.* Analytical and Numerical Methods for Nonlinear Singular Singularly-Perturbed Initial Value Problems // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. № 2. P. 225–248.
8. *Ascher U.* On Some Difference Schemes for Singular Singularly-Perturbed Boundary Value Problems // Numer. Math. 1985. V. 46. P. 1–30.
9. *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференц. ур-ния. 1976. Т. 12. № 10. С. 1736–1747.
10. *Vasil'eva A.B., Butuzov V.F., Kalachev L.V.* The Boundary Function Method for Singular Perturbation Problems. SIAM. Philadelphia, 1995.
11. *Kurina G.A.* Projector Approach to Constructing Asymptotic Solution of Initial Value Problems for Singularly Perturbed Systems in Critical Case // Axioms. 2019. V. 8. № 2. P. 56. https://doi.org/10.3390/axioms8020056.
12. *Kurina G.A., Hoai N.T.* Projector Approach for Constructing the Zero Order Asymptotic Solution for the Singularly Perturbed Linear-Quadratic Control Problem in a Critical Case // AIP Conference Proceedings. Int Conf. Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018). 2018. V. 1997. 020073-1–020073-7.
13. *Kurina G., Hoai N.T.* Zero order asymptotic solution of a class of singularly perturbed linear-quadratic problems with weak controls in a critical case // Optim. Control Appl. Meth. 2019. V. 40. № 5. P. 859–879.
14. *Sibuya Y.* Some global properties of matrices of functions of one variable // Math. Ann. 1965. V. 161. P. 67–77.
15. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
16. *Bretscher O.* Linear Algebra with Applications. Pearson 5th Ed., 2012.
17. *Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
18. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
19. *Курина Г.А., Хоай Н.Т.* Проекторный подход к построению асимптотического решения начальных задач для одного класса сингулярно возмущенных уравнений в критическом случае // Управление развитием крупномасштабных систем (MLSD'2019). [Электронный Ресурс]: Материалы Двенадцатой междунар. конфер. 1–3 окт. 2019, Москва. С. 981–984.