

**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 519.63

**РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА¹⁾**

© 2020 г. В. В. Марков¹, В. Н. Утесинов^{2,*}

¹ 119991 Москва, ул. Губкина, 8, Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Россия

² 127550 Москва, ул. Большая Академическая, 44, кор. 2, ФГБНУ, Всероссийский НИИ гидротехники и мелиорации им. А.Н. Костякова, Россия

*e-mail: sluts1@rambler.ru

Поступила в редакцию 25.02.2020 г.
Переработанный вариант 25.02.2020 г.
Принята к публикации 04.08.2020 г.

Представлена конечно-разностная схема второго порядка аппроксимации для численного решения одномерного уравнения Бюргерса, разработанная на основе существующих методов. Приведено условие устойчивости, при котором шаг интегрирования по времени не зависит от величины вязкостного члена. Выполнено сравнение результатов численного расчета с точным решением уравнения Бюргерса. Библ. 5. Фиг. 2. Табл. 2.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, разностная схема, условие устойчивости разностной схемы.

DOI: 10.31857/S0044466920120108

Одномерное уравнение Бюргерса представлено в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где u – вычисляемый параметр, изменяющийся по времени t и в направлении x , Re – критерий Рейнольдса.

Наличие точных решений и схожесть по виду с уравнением Навье–Стокса делают уравнение (1) средством для проверки предлагаемых схем численного решения уравнения Навье–Стокса. Существующие интегральные вариационные численные методы обладают недостатками, ограничивающими их применение на практике, например, для расчетов в областях со сложной геометрией границ.

Разностные методы первого порядка аппроксимации по временному Δt и пространственному Δx шагам интегрирования испытывают сильное влияние схемной вязкости, но обладают свойством монотонности, сохраняющим знак первой производной [1].

Для численного решения некоторых задач бывает достаточно получить результат со вторым порядком аппроксимации (Δt^2 , Δx^2). Например, при использовании схемы Лакса–Вендроффа необходимо определять параметры течения в полуцелых пространственных и временных узлах разностной сетки, а для учета второй производной в (1) надо брать значения параметра не в трех, а четырех соседних пространственных узлах сетки.

В предлагаемой схеме на первом этапе, предикторе, для разностной схемы Мак-Кормака вводится параметр θ , как и в схеме Кранка–Никольсона. Для j -го узла сетки по координате x с n -го временного слоя значение скорости \bar{u}_j определяется из уравнения

$$\bar{u}_j - u_j^n + \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_j^n)^2}{2\Delta x} \Delta t = \theta \gamma (\bar{u}_{j+1} - 2\bar{u}_j + \bar{u}_{j-1}) + (1 - \theta) \gamma (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (2)$$

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 19-71-30012) в Матем. ин-те РАН.

где введено обозначение $\gamma = \frac{\Delta t}{\text{Re} \Delta x}$. Вид члена с первой производной в (2) периодически меняется с представленного в (2) на $\frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{2\Delta x} \Delta t$. Одна из причин состоит в устранении влияния направления, в котором она вычисляется. При решении трехмерной задачи в [2] дана таблица с возможными периодическими изменениями в определении первых пространственных производных. Целесообразно нелинейный член в (1) представлять в (2) в дивергентной форме.

Второй этап, корректор, основан на процедуре перешагивания (“чехарда”, “leap-frog”) [3]. Уравнение (1) решается для j -го пространственного узла между n -м и $n + 1$ -м временными слоями. Нелинейный член определен как среднее значение, взятое на n -м временном слое и на этапе предиктор, но с противоположным направлением в дифференцировании, как и в методе Мак-Кормака. При вычислении члена со второй производной в (1) значение скорости в j -м узле берется на $n + 1$ -м временном слое, а остальные на n -м слое [4]. В результате получаем

$$u_j^{n+1} - u_j^n + \frac{(u_j^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{4\Delta x} \Delta t + \frac{\bar{u}_j^2 - \bar{u}_{j-1}^2}{4\Delta x} \Delta t = \gamma(u_{j+1}^n - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^n). \tag{3}$$

Данная схема, как будет показано, имеет второй порядок аппроксимации и, как следствие, не обладает свойством монотонности. Поэтому, если модуль величины $\frac{\partial u}{\partial x}$ в (1) имеет большое значение, то знак производной может отличаться от того, который есть на самом деле. Для предотвращения этого явления рекомендуется после каждого этапа корректора проводить “градиентное” сглаживание, решая уравнение

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} = \varepsilon(x_j) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Для каждой узловой точки с координатой x_j величина

$$\varepsilon(x_j) = \alpha \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j} \right)^2 / \left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j} \right)_{\max}^2,$$

где $\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j} \right)_{\max}^2$ – максимальное среди всех значений $\left(\frac{\partial u^{n+1}}{\partial x_j} \right)^2$. Значение коэффициента сглаживания α принимается чуть больше нуля. Обычно $0 < \alpha \leq 0.2$. Начальные и граничные значения u_s берутся равными соответствующим величинам u_j^{n+1} .

Полученные при решении (4) значения u_s принимаются равными u_j^{n+1} на $n + 1$ временном слое.

Порядок аппроксимации первой производной по времени после этапа корректора равен Δt^2 из-за центральной разности. Периодическое чередование направления численного дифференцирования при $n \rightarrow \infty$ приведет в среднем к центральной разности второго порядка (Δx^2). Правый член в (1) имеет второй порядок аппроксимации по пространственной координате и такой же порядок по времени. Это можно получить, проведя в правой части уравнения (3) разложение в ряд Тейлора в j -м узле после этапа коррекции.

Анализ устойчивости проводится для линеаризованного уравнения (1) заменой нелинейного члена на $u_0 \frac{\partial u}{\partial x}$, где $u_0 = \text{const}$. Вводится число Куранта $c = \frac{|u_0| \Delta t}{\Delta x}$. Для комплексного фурье-разложения пространственных возмущений с частотой ω вводится угол $\varphi = \omega \Delta x$. Модуль коэффициента перехода $q = \left| \frac{\delta u_j^{n+1}}{\delta u_j^n} \right|$ равен модулю отношения ошибки δu_j^{n+1} на $n + 1$ -м временном слое к ошибке δu_j^n . Чередование направления численного дифференцирования дает право заменить $1 - e^{-i\varphi}$ на $\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2} = i \sin \varphi$. Анализ проведен без учета влияния сглаживания.

Таблица 1

k	10				20			
α	0.025	0.05	0.1	0.2	0.025	0.05	0.1	0.2
σ	0.124	0.115	0.108	0.112	0.22	0.219	0.218	0.216
k	40				80			
α	0.025	0.05	0.1	0.2	0.025	0.05	0.1	0.2
σ	0.304	0.304	0.303	0.301	0.369	0.368	0.367	0.366

Таблица 2

k	18				36			
α	0.025	0.05	0.1	0.2	0.025	0.05	0.1	0.2
σ	0.115	0.077	0.022	0.042	0.073	0.013	0.027	0.026
k	72				144			
α	0.025	0.05	0.1	0.2	0.025	0.05	0.1	0.2
σ	0.021	0.021	0.012	0.045	0.021	0.023	0.013	0.040

Тогда из (2) и (3) получим $Z\delta u_j^{n+1} = (A - iB)\delta u_j^n$, где

$$Z = (1 + 2\gamma) \left(1 + 4\gamma\theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right),$$

$$A = \left(1 + 4\gamma\theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) (1 + 2\gamma \cos \varphi) - 2c^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$B = c \sin \varphi \left[1 + 2(2\theta - 1)\gamma \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right].$$

Имеем

$$q^2 = \frac{A^2 + B^2}{Z^2} \leq \frac{D^2 + B^2}{Z^2}, \quad D = \left(1 + 4\gamma\theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) (1 + 2\gamma).$$

После преобразований получим

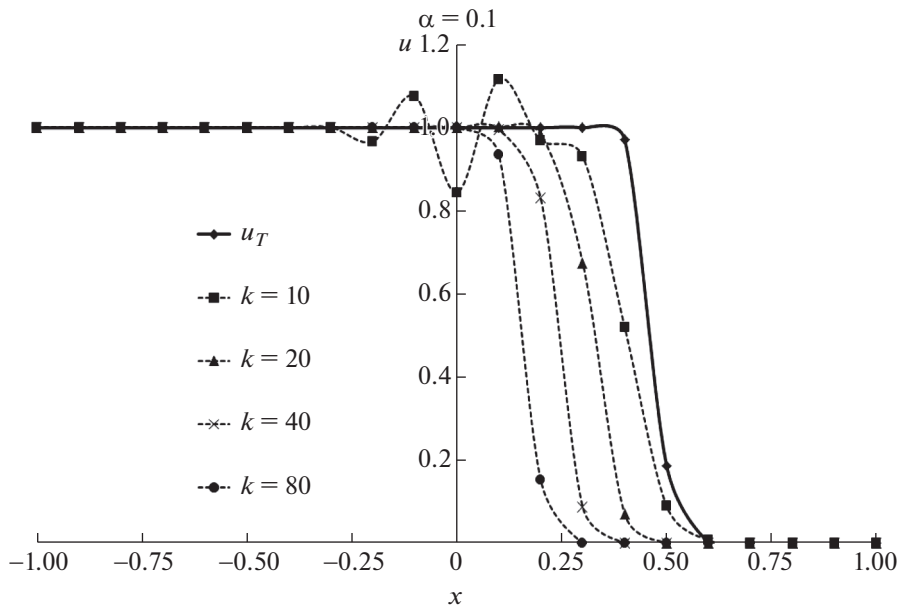
$$D^2 + B^2 = Z^2 - 8\gamma c^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left(2\theta \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \gamma + 4\theta\gamma \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) + 4c^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left[c^2 - \left(1 + 2(2\theta - 1)\gamma \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^2 \right]. \quad (4)$$

Из (4) следует, что достаточно выполнения условий $\theta \geq 0.5$ и $c^2 \leq 1$, чтобы $q^2 \leq 1$, и предложенная схема будет устойчива для любых значений Re в уравнении (1). Тогда шаг интегрирования по времени получается из условия $\Delta t^2 \leq \left(\frac{\Delta x}{u_{\max}} \right)^2$. Чтобы учесть сглаживание, необходимо умножить полученное значение q^2 на квадрат коэффициента перехода уравнения (5), который ввиду малости значения α не превысит единицу.

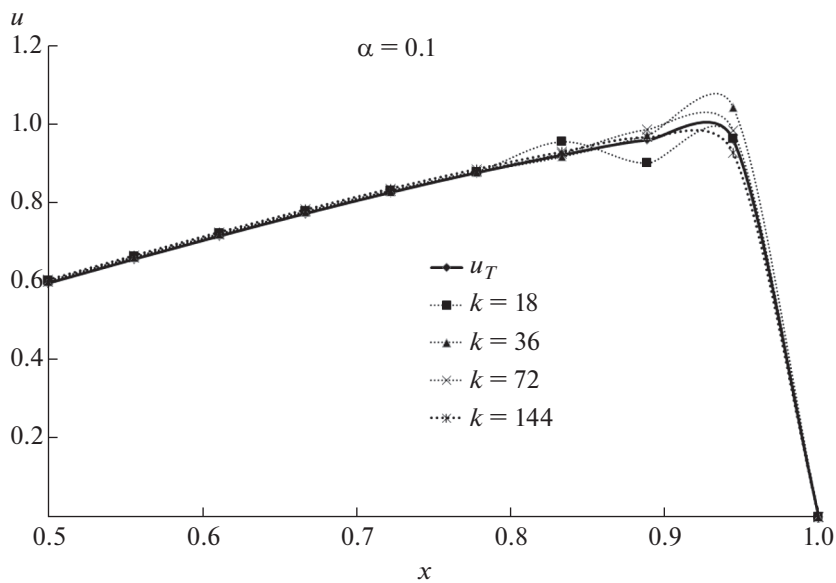
Во всех приводимых примерах расчета $\theta = 0.55$ значение числа Куранта не превышало 0.95 для всех узлов сетки. Расчет заканчивался, когда $t \leq t_k$, после чего вычислялась среднеквадратичная ошибка

$$\sigma = \frac{\sqrt{\sum_{j=0}^N (u_p - u_T)^2}}{N},$$

относительно N значений точного решения задачи u_T (см. [5]). Во всех примерах рассматривается процесс распространения возмущений в положительном направлении.



Фиг. 1. Фронт волны для различного количества отрезков разбиения.



Фиг. 2. Профиль функции для различного количества отрезков разбиения.

Первый пример расчета для уравнения (1) взят для $-1 \leq x \leq 1$, $Re = 10^3$, $t_k = 0.92$ при начальном условии для $t = 0$

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leq 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

На границе расчетной области $u(x = -1) = 1$, $u(x = 1) = 0$. Для уташения сетки [5] вблизи $x = 0$ введена замена $\xi = \arctg(x)$. Значения σ по результатам расчета приведены в табл. 1 для различных значений α и количества отрезков интегрирования k при $x \geq 0$. Наилучшее совпадение с точным решением, как следует из табл. 2, наблюдается при $k = 10$ и $\alpha = 0.1$. В этом случае при резком, скачкообразном, изменении параметра течения, наблюдается наибольшая длина отрез-

ка, где $c \approx 1$ и получены наиболее точные результаты счета. Но при этом сильнее выражены осцилляции на фронте волны (фиг. 1).

Для второго примера $0 \leq x \leq 1$, $Re = 10^4$, $t_k = 0.5$, начальные условия $u = \sin(\pi x)$ при $t = 0$. На границе $u(x = 0) = u(x = 1) = 0$. Разбиение сетки было равномерным. Резкое изменение значения u наблюдалось вблизи $x = 1$. При увеличении k точность повышается до определенного значения k , так как в дальнейшем наступает неустойчивость дифференцирования. На фиг. 2 показаны результаты расчета.

ВЫВОДЫ

1. Предложенная разностная схема на основе схемы Мак-Кормака не требует определения величины параметра в полужелтых узлах сетки. Для описания вязкостного члена достаточно знания параметров в трех соседних узлах разностной сетки.

2. Определен порядок аппроксимации схемы.

3. Дано достаточное условие устойчивости схемы, при котором шаг интегрирования по времени не зависит от величины вязкостного члена уравнения.

4. Данная схема, как и многие другие, не дает возможности вычисления параметров течения в узлах, примыкающих к границе, где расстояние до этой границы меньше пространственного шага интегрирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидромеханики // Матем. сб. 1959. Т. 47. Вып. 3. С. 271–306.
2. MacCormack R.W. Viscosity effects in hypervelocity impact cratering // Frontiers of Comput. Fluid Dynamics. London: World Scientific Publishing Co. 2002. P. 1–26.
3. Пирумов У.Г., Росляков Г.С. Численные методы газовой динамики / Уч. пособие для студентов втузов. М.: Высш. школа, 1987. 232 с.
4. Allen J.S., Cheng S.I. Numerical solution of the compressible Navier–Stokes equations for laminar near wake // Phys. Fluids. 1970. V. 13. P. 37–52.
5. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина / Пер. с англ. М.: Мир, 1988. 352 с.