ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 12, с. 2085–2097

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.9

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ[1)]

О. В. Солонуха

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН;
117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, Российский университет дружбы народов, Россия

e-mail: solonukha@yandex.ru

Поступила в редакцию 06.07.2020 г.
Переработанный вариант 06.07.2020 г.
Принята к публикации 04.08.2020 г.

Рассмотрена задача Дирихле для функционально-дифференциального уравнения, оператор которого представлен произведением квазилинейного дифференциального оператора и линейного оператора сдвигов. При этом нелинейный оператор имеет дифференцируемые коэффициенты. Предложено достаточное условие сильной эллиптичности дифференциально-разностного оператора. Для задачи Дирихле с оператором, удовлетворяющим условию сильной эллиптичности, доказаны существование и единственность обобщенного решения. Рассмотрена ситуация, когда дифференциально-разностный оператор принадлежит классу псевдомонотонных $(S)_+$ операторов, в этом случае обобщенное решение задачи Дирихле существует. В качестве примера рассмотрена нелокальная задача с краевым условием типа Бицадзе–Самарского. Библ. 12.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое дифференциально-разностное уравнение, псевдомонотонный оператор, сильная эллиптичность, свойство $(S)_+$.

DOI: 10.31857/S0044466920120145

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные эллиптические дифференциальные уравнения рассматривались начиная с середины прошлого века многими математиками, см., например, библиографию в работе [1]. К середине 60-х годов прошлого века признаным стал операторный подход с использованием операторов монотонного (псевдомонотонного) типа. В 1966 г. эта методика была применена к абстрактным дифференциально-разностным уравнениям [2], но конкретные задачи рассмотрены не были. В то же время достаточно широко рассматривались более конкретные линейные дифференциально-разностные уравнения, подробную библиографию см. [3]. В 80-х–90-х годах была создана теория линейных дифференциально-разностных уравнений эллиптического типа [4], [5]. В работах [6], [7] было начато исследование нелинейных дифференциально-разностных уравнений эллиптического типа с использованием методов линейной теории дифференциально-разностных уравнений и теории операторов псевдомонотонного типа. В [6] было показано, что даже “хороший” (в смысле линейной теории) разностный оператор может нарушить сильную эллиптичность дифференциально-разностного оператора. В [8] приведен пример неоднозначной разрешимости уравнения с сильно-эллиптичным дифференциальным и положительно-определенным разностным операторами.

В данной работе рассматриваются нелинейные эллиптические дифференциальные операторы с дифференцируемыми коэффициентами. Это позволяет использовать методы [9].

Предложено достаточное условие сильной эллиптичности дифференциально-разностного оператора. Как известно, задача Дирихле с сильно эллиптичным оператором имеет единственное обобщенное решение. При наличии зависимости оператора от младших членов переходим к классу псевдомонотонных $(S)_+$-операторов; в этом случае доказано существование обобщенного решения. Заметим, что данное условие не является единственным. В зависимости от способа

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

разложения матриц, характеризующих оператор сдвигов, на сумму произведений матриц для конкретных операторов можно предложить другие достаточные условия сильной эллиптичности или свойства $(S)_+$. В частности, для симметричных операторов сдвига другое достаточное условие предложено в [7].

В качестве примера рассмотрена нелокальная задача с краевым условием типа Бицадзе–Самарского. Взаимооднозначное соответствие нелокальной задачи и задачи Дирихле с соответствующим дифференциально-разностным оператором для $p = 2$ доказано в [5].

В дальнейшем через c_j будут обозначены положительные постоянные, не зависящие от функций или переменных, входящих в неравенство.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим функционально–дифференциальное уравнение вида

$$ARu(x) = f(x) \quad (x \in Q) \tag{1.1}$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \backslash Q). \tag{1.2}$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d) \times G$, $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ – ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geq 3$). В случае $n = 1$ мы полагаем $Q = (0,d)$. Полагаем также, что $2 \leq p < \infty$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in W_q^{-1}(Q)$, а оператор A задан формулой

$$Au(x) = -\sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i \left(A_i(x,u,\nabla u)\right) + A_0(x,u,\nabla u). \tag{1.3}$$

Функции будем полагать вещественнозначными. Ограниченный разностный оператор $R\colon L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ определяется по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h), \tag{1.4}$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ – конечное множество векторов с целочисленными (или соизмеримыми) координатами, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что разностный оператор R является нелокальным. Сдвиги на векторы $h \in \mathcal{M}$ могут отображать точки $x \in Q$ в точки $x + h \in \mathbb{R}^n \backslash Q$. Поэтому краевые условия должны задавать значения неизвестной функции не только на границе ∂Q, но и на некотором множестве вне Q. Для простоты в дальнейшем мы можем считать, что это множество совпадает с $\mathbb{R}^n \backslash Q$.

2. РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ И СВОЙСТВА РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

Доказательства результатов данного раздела приведены в § 3 [6], см. также [3]–[5].

Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, а через Q_r – открытые связные компоненты множества $Q \backslash \left(\bigcup_{h \in M} (\partial Q + h)\right)$.

Определение 2.1. Множество Q_r называется *подобластью*. Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r $(r = 1, 2, \ldots)$ называется *разбиением* области Q.

Легко видеть, что множество $\mathcal{R}$ не более чем счетно, при этом

$$\bigcup_r \partial Q_r = \left(\bigcup_{h \in M} (\partial Q + h)\right) \cap \bar{Q} \quad \text{и} \quad \bigcup_r \bar{Q}_r = \bar{Q}.$$

Известно, что для любой подобласти Q_{r_1} и произвольного вектора $h \in M$ либо найдется подобласть Q_{r_2} такая, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \backslash \bar{Q}$, см. Лемму 7.1 из [5]. Таким образом, семейство $\mathcal{R}$ можно разбить на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ для некоторого $h \in M$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl}, где s — номер класса, а l — номер подобласти в s-м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и $N(s) \le ([\operatorname{diam} Q]+1)^n$. Множество классов может быть конечным или счетным, см. примеры в § 7 гл. II из [5].

Введем оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$, где $I_Q : L_p(Q) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функций из $L_p(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(Q)$ — оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n)$ на Q. Это связано с тем, что оператор R нелокальный. Сдвиги на вектор h могут отображать точки $x \in Q$ в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Поэтому краевые условия (1.2) для дифференциально-разностного уравнения (1.1) задаются не только на множестве Q, но и на всем множестве $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Для учета краевых условий (1.2) в разностном операторе R вводится оператор I_Q. Таким образом, функция $u(x)$, определенная на Q, отображается в функцию $(I_Q u)(x)$, определенную на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. После действия оператора R на $I_Q u$ мы вновь получаем функцию, определенную на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Оператор P_Q вводится для того, чтобы получить сужение функции $(R I_Q u)(x)$ на область Q.

Лемма 2.1. *Операторы $I_Q : L_p(Q) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ и $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(Q)$, а также $R : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ и $R_Q : L_p(Q) \to L_p(Q)$ ограничены*, $1 < p < \infty$.

Обозначим через $L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций из $L_p(Q)$, обращающихся в нуль вне $\bigcup_l Q_{sl}$ $(l = 1,\dots,N(s))$. Введем ограниченный оператор $P_s : L_p(Q) \to L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ по формуле $P_s u(x) = u(x)$ $\left(x \in \bigcup_l Q_{sl}\right)$, $P_s u(x) = 0$ $\left(x \in Q \setminus \bigcup_l Q_{sl}\right)$. Очевидно, что P_s является оператором проектирования на $L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$. Поскольку $\operatorname{mes}_n(\partial Q_{sl}) = 0$, имеем

$$L_p(Q) = \dot{+}_s L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right). \tag{2.1}$$

Изоморфизм рефлексивных банаховых пространств имеет вид

$$U_s : L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \to L_p^N(Q_{s1})$$

и определяется по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{2.2}$$

где $l = 1,\dots,N = N(s)$, а вектор h_{sl} таков, что

$$Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl} \quad (h_{s1} = 0), \qquad L_p^N(Q_{s1}) = \prod_l L_p(Q_{s1}).$$

Введем матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}). \end{cases} \tag{2.3}$$

Оператор $R_{Qs} : L_p^N(Q_{s1}) \to L_p^N(Q_{s1})$, заданный соотношением

$$R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{2.4}$$

является оператором умножения на матрицу R_s, см. Лемму 3 [6] и Лемму 8.9 [5].

Из ограниченности области Q и формул (2.3) следует, что в случае постоянных коэффициентов a_h число различных матриц R_s конечно. Обозначим это число n_1, и пусть R_{s_ν} обозначают все различные матрицы R_s $(\nu = 1,\dots,n_1)$.

Множество всех распределений $u \in \mathcal{D}'(Q)$, являющихся вместе со всеми своими частными производными 1-го порядка функциями из $L_p(Q)$, обозначим через $W_p^1(Q)$. При $p \in (1, \infty)$ соболевские пространства $W_p^1(Q)$ рефлексивны и банаховы относительно нормы

$$\|u\|_{W_p^1(Q)} = \left\{ \sum_{1 \le i \le n} \int_Q |\partial_i u|^p dx + \int_Q |u|^p dx \right\}^{1/p}. \tag{2.5}$$

Через $\mathring{W}_p^1(Q)$ обозначается замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых в Q функций $\dot{C}^\infty(Q)$ в пространстве $W_p^1(Q)$. Как известно, эквивалентной нормой в пространстве $\mathring{W}_p^1(Q)$ является норма

$$\|y\|_{\mathring{W}_p^1(Q)} = \left\{ \sum_{1 \le i \le n} \int_Q |\partial_i y|^p dx \right\}^{1/p}.$$

Лемма 2.2. (см. Леммы 5 и 6 из [6]). *Пусть коэффициенты a_h постоянны. Тогда*

1) *оператор R_Q непрерывно отображает $\mathring{W}_p^1(Q)$ в $W_p^1(Q)$, причем*

$$\partial_i(R_Q u) = R_Q \partial_i u; \tag{2.6}$$

2) *для всех $u \in W_p^1(Q)$ имеем $R_Q u \in W_p^1(Q_{sl})$ и*

$$\|R_Q u\|_{W_p^1(Q_{sl})} \le c_1 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W_p^1(Q_{sj})} \quad (s = 1, 2, \ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)); \tag{2.7}$$

3) *если $\det R_{s_\nu} \ne 0$ $(\nu = 1, \ldots, n_1)$, то существует обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$ и $R_Q^{-1} w \in W_p^1(Q_{sl})$ для всех $w \in W_p^1(Q)$, при этом обратный оператор определен формулой*

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_{Qs}^{-1} U_s P_s, \tag{2.8}$$

где через R_{Qs}^{-1} обозначен оператор умножения на матрицу R_s^{-1}, и справедлива оценка

$$\left\|R_Q^{-1} w\right\|_{W_p^1(Q_{sl})} \le c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{W_p^1(Q_{sj})} \quad (s = 1, 2, \ldots;\ l = 1, \ldots, N(s)). \tag{2.9}$$

Здесь константы $c_1, c_2 > 0$ не зависят от s, u и w.

3. УСЛОВИЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Определение 1. Оператор $A : X \to Y$ называется *деминепрерывным*, если из того, что $u_m \to u$ в X следует слабая сходимость $Au_m \rightharpoonup Au$ в Y.

Лемма 3.1. *Пусть разностный оператор $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_p^1(Q)$ имеет постоянные коэффициенты a_h, коэффициенты оператора $A : W_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$, заданного в* (1.3), *являются функциями типа Каратеодори* (*т.е. измеримы по $x \in Q$ и непрерывны по остальным переменным*), *а также удовлетворяют оценке*

$$|A_i(x, \xi)| \le g(x) + c_3 \sum_{0 \le i \le n} |\xi_i|^{p-1}, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{3.1}$$

где $g \in L_q(Q)$. Тогда оператор $AR_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ деминепрерывен.

Доказательство. В силу леммы 2.2 линейный оператор $R_Q : \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q) \to W^1_p(Q)$ ограничен. Деми-непрерывеность оператора $\mathcal{A} : W^1_p(Q) \to (W^1_p(Q))^*$ в силу условия (3.1) известна, см., например, [10, Гл. 1, § 2]. Следовательно, их композиция является деминепрерывным оператором.

Через $\langle \cdot,\cdot \rangle$ обозначим спаривание в соответствующих банаховых пространствах. В частном случае, для оператора $A : W^1_p(Q) \to W^{-1}_q(Q)$, заданного формулой

$$Au(x) = -\sum_{1\le i\le n} \partial_i A_i\left(x, \partial_1 u, \dots, \partial_n u\right), \tag{3.2}$$

имеем

$$\langle Au, \xi\rangle := \sum_{1\le i\le n} \int_Q A_i\left(x, \partial_1 u, \dots, \partial_n u\right)\partial_i \xi dx \quad \forall \xi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q). \tag{3.3}$$

Определение 3.2. Оператор $\mathcal{A} : \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q) \to W^{-1}_q(Q)$ называется *сильно эллиптичным*, если существуют константы $c_4 > 0$ и $\alpha > 0$ такие, что

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(y), u - y\rangle \ge c_4 \|u - y\|^{1+\alpha}_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)}$$

для любых $u, y \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$.

Напомним, что в случае линейности дифференциального M-периодического оператора A положительная определенность симметризации разностного оператора R_Q гарантирует сильную эллиптичность дифференциально-разностного оператора, см. [5]. Для квазилинейных дифференциальных операторов существует алгебраическое условие сильной эллиптичности, см. [9, Гл. 2, § 2]. Рассмотрим достаточное условие сильной эллиптичности для квазилинейного дифференциально-разностного оператора.

Теорема 3.1. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, $\{R_s\}$ *— невырожденные матрицы, соответствующие оператору* R_Q. *Мы предполагаем, что оператор* $A : W^1_p(Q) \to W^{-1}_q(Q)$, *заданный формулой* (3.2), *имеет измеримые по* $x \in Q$ *и дифференцируемые по* $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \dots, n)$ *коэффициенты* $A_i(x, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, *причем производные* $A_{ij}(x,\xi) = \dfrac{\partial A_i(x,\xi)}{\partial \xi_j}$ *удовлетворяют оценкам*

$$\sum_{1\le m,l\le N(s)} \sum_{1\le i,j\le n} r^s_{ml} A_{ij}(x + h_{sm}, \zeta_{m\cdot})\eta_{lj}\eta_{mi} \ge c_5 \sum_{1\le m\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} |\zeta_{mi}|^{p-2}|\eta_{mi}|^2, \tag{3.4}$$

$$|A_{ij}(x,\xi)| \le g_1(x) + c_6 \sum_{1\le i\le n} |\xi_i|^{p-2} \quad (i, j = 1, \dots, n) \tag{3.5}$$

для почти всех $x \in Q_{s1}$ *и любых* $s = 1, 2, \dots$, $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times n}$ *и* $\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times n}$; *здесь* $g_1 \in L_{p/(p-2)}(Q)$, $c_5, c_6 > 0$ *не зависят от* x, ζ *и* η, $\zeta_{m\cdot} = (\zeta_{m1}, \dots, \zeta_{mn})$.

Тогда оператор $\mathcal{A}_R := AR_Q : \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q) \to W^{-1}_q(Q)$, *заданный формулой*

$$\mathcal{A}_R u(x) = -\sum_{1\le i\le n} \partial_i A_i\left(x, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u\right), \tag{3.6}$$

сильно эллиптичен.

Доказательство. Пусть $w = R_Q(u - y)$ и $v = R_Q y$, где $u, y \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$. Согласно Лемме 2.2.3 существует ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1} : L_p(Q) \to L_p(Q)$. Из равенства (3.3) и леммы 2.2 получим

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_R u - \mathcal{A}_R y, u - y\rangle &= \sum_i \int_Q \left(A_i(x, \nabla R_Q u) - A_i(x, \nabla R_Q y)\right)(\partial_i u - \partial_i y)dx = \\ &= \sum_i \int_Q \left(A_i(x, \nabla v + \nabla w) - A_i(x, \nabla v)\right) R_Q^{-1}\partial_i w dx = I_1.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Тогда, используя формулу (2.8), имеем

$$I_1 = \sum_i \sum_s \int\limits_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s(A_i(x, \nabla(v+w)) - A_i(x, \nabla v)) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w dx =$$
$$= \sum_i \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} (U_s P_s \left(A_i(x, \nabla(v+w)) - A_i(x, \nabla v)\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w) dx.$$

Используем дифференцируемость коэффициентов A_i и формулу Тейлора:

$$I_1 = \sum_{i,j} \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s P_s \left(\int\limits_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w \right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx. \tag{3.8}$$

Заметим, что интегралы по Q_{s1} существуют в силу (3.5).

Из равенства (2.2) следует, что

$$\left(U_s P_s \left(\int\limits_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w \right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) =$$
$$= \left(\operatorname{diag}\left\{ U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\} R_s R_s^{-1} \left(U_s P_s \partial_j w\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) =$$
$$= \left(\operatorname{diag}\left\{ U_s P_s \int\limits_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\} R_s \left(U_s P_s \partial_j (u-y)\right), U_s P_s \partial_i (u-y) \right) =$$
$$= \sum_{l,m} r_{ml}^s \left(\int\limits_0^1 A_{ij}(x, (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sm})) d\tau \right) \partial_j (u-y)(x+h_{sl}) \partial_i (u-y)(x+h_{sm}),$$

где $\operatorname{diag}\left\{U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau\right\}$ – диагональная матрица порядка $N(s) \times N(s)$ с диагональными элементами $\int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sm})) d\tau$, $m = 1, \ldots, N(s)$.

Используя неравенство (3.4), получаем

$$I_1 = \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1 \le l, m \le N(s)} \sum_{1 \le i, j \le n} r_{ml}^s \int\limits_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sm})) d\tau$$
$$\partial_j (u-y)(x+h_{sl}) \partial_i (u-y)(x+h_{sm}) dx \ge$$
$$\ge c_5 \sum_s \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1 \le m \le N(s)} \sum_{1 \le i \le n} \int\limits_0^1 \left|(\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm})\right|^{p-2} d\tau \left|\partial_i (u-y)(x+h_{sm})\right|^2 dx.$$

Согласно известной оценке $\int\limits_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau \ge c_7 |b|^{p-2}$ имеем

$$\int\limits_0^1 \left|(\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm})\right|^{p-2} d\tau \ge c_7 \left|\partial_i w(x + h_{sm})\right|^{p-2}.$$

По построению $w = R_Q(u - y)$. Следовательно, в силу невырожденности матрицы R_s и условия $p \ge 2$ получаем

$$I_1 \ge c_5 c_7 \sum_i \sum_{s,m} \int\limits_{Q_{s1}} \left|\partial_i w(x + h_{sm})\right|^{p-2} \left|\partial_i (u-y)(x+h_{sm})\right|^2 dx =$$
$$= c_5 c_7 \sum_i \sum_{s,lm} \int\limits_{Q_{s1}} \left| \sum_k r_{mk} \partial_i (u-y)(x+h_{sk}) \right|^{p-2} \left|\partial_i (u-y)(x+h_{sm})\right|^2 dx \ge \tag{3.9}$$
$$\ge c_8 \sum_{s,m,i} \left\| \partial_i (u-y)(\cdot + h_{sm}) \right\|_{L_p(Q_{s1})}^p = c_8 \left\| u - y \right\|_{\mathring{W}_p^1(Q)}^p .$$

Сильная эллиптичность оператора $\mathcal{A}_R$ доказана.

Замечание 3.1. Достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностного оператора $\mathcal{A}_R$ с симметричным разностным оператором R_Q, отличающиеся от (3.4), рассматривались в [7]. В настоящей работе разностный оператор не предполагается симметричным. Аналогично теореме 3.1 можно получить достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностного оператора порядка $2m$, который, вообще говоря, не является симметричным. При отсутствии сдвигов оценка (3.4) точно соответствует оценке, рассматривавшейся в [9, Гл. 2, § 2].

Определение 3.3. Пусть $f \in W_q^{-1}(Q)$. Функция $u \in \mathring{W}_p^1 Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) с дифференциальным оператором $\mathcal{A}$, заданным формулой (3.2), если для любого $\xi \in \mathring{W}_p^1(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{1\le i\le n}\int_Q A_i(x,\nabla R_Q u)\partial_i\xi dx = \int_Q f\xi dx. \tag{3.10}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство. Оператор $\mathcal{A}_R$ деминепрерывный, см. лемму 3.1, поскольку условие (3.5) сильнее условия (3.1). Деминепрерывный, сильно эллиптичный оператор $\mathcal{A}_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ является гомеоморфизмом, см. следствие 1.1.1 из [9].

Теорема 3.3. *Пусть* $p \in [2,\infty)$, $\{R_s\}$ *— невырожденные матрицы, соответствующие оператору* R_Q. *Мы предполагаем, что оператор* A, *заданный формулой*

$$Au(x) = -\sum_{1\le i\le n}\partial_i A_i\left(x,u,\partial_1 u,\dots,\partial_n u\right) + A_0\left(x,u,\partial_1 u,\dots,\partial_n u\right), \tag{3.11}$$

имеет измеримые по $x \in Q$ *и дифференцируемые по* $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0,1,\dots,n)$ *коэффициенты* $A_i(x,\xi)$, $\xi = (\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *удовлетворяющие оценкам*:

$$\sum_{1\le m,l\le N(s)}\sum_{0\le i,j\le n} r_{ml}^s A_{ij}(x+h_{sm},\zeta_{m\cdot})\eta_{lj}\eta_{mi} \ge c_9\sum_{1\le m\le N(s)}\sum_{1\le i\le n}\left|\zeta_{mi}\right|^{p-2}\left|\eta_{mi}\right|^2, \tag{3.12}$$

$$\left|A_{ij}(x,\xi)\right| \le g_1(x) + c_{10}\sum_{0\le i\le n}\left|\xi_i\right|^{p-2} \qquad (i,j = 0,1,\dots,n) \tag{3.13}$$

для всех s *и почти всех* $x \in Q_{s1}$, $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ *и* $\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times n}$, *где* $c_9, c_{10} > 0$ *не зависят от* x, ζ *и* η, $\zeta_{m\cdot} = (\zeta_{m0},\zeta_{m1},\dots,\zeta_{mn})$, $g_1 \in L_{p/(p-2)}(Q)$.

Тогда оператор $\mathcal{A}_R : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ *сильно эллиптичен*.

Определение 3.4. Пусть $f \in W_q^{-1}(Q)$. Функция $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2) с дифференциальным оператором $\mathcal{A}$, заданным формулой (3.11), если для любого $\xi \in \mathring{W}_p^1(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{1\le i\le n}\int_Q A_i(x,R_Q u,\nabla R_Q u)\partial_i\xi dx + \int_Q A_0(x,R_Q u,\nabla R_Q u)\xi dx = \int_Q f\xi dx. \tag{3.14}$$

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.3. *Тогда для любого* $f \in W_q^{-1}(Q)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$ *задачи* (1.1), (1.2).

Доказательство теорем 3.3 и 3.4 совпадает с доказательствами теорем 3.1 и 3.2 соответственно.

4. (S_+)-ОПЕРАТОРЫ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Определение 4.1. Оператор $A : \mathring{W}_p^1(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ *обладает свойством* $(S)_+$, если каждая слабо сходящаяся последовательность $u_m \rightharpoonup u$ в $\mathring{W}_p^1(Q)$, для которой справедлива оценка $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\left\langle Au_m, u_m - u\right\rangle \le 0$, является сильно сходящейся.

Определение 4.2. Оператор $A : \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ называется *псевдомонотонным*, если для каждой слабо сходящейся последовательности $u_m \rightharpoonup u$ в $\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)$ при выполнении оценки $\overline{\lim\limits_{m\to\infty}} \langle Au_m, u_m - u\rangle \le 0$ справедливо неравенство

$$\underline{\lim_{m\to\infty}} \langle Au_m, u_m - \xi\rangle \ge \langle Au, u - \xi\rangle \quad \forall \xi \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q).$$

Очевидно, каждый деминепрерывный оператор, обладающий свойством $(S)_+$, является псевдомонотонным.

Определение 4.3. Оператор A называется *коэрцитивным*, если существует непрерывная функция c: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\langle Au, u\rangle \ge c\left(\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)}\right)\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)}, \tag{4.1}$$

и $c(s) \to \infty$ при $s \to \infty$.

Теорема 4.1. *Пусть* $p \in [2, \infty)$ *и оператору* R_Q *соответствуют невырожденные матрицы* R_s. *Пусть также оператор* $\mathscr{A}$, *заданный формулой* (3.11), *имеет измеримые по* $x \in Q$ *и непрерывные по* $\xi_j \in \mathbb{R}$ $(j = 0, 1, \dots, n)$ *коэффициенты* $A_i(x, \xi)$, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *Более того, существуют производные* $A_{ij}(x, \xi) := \dfrac{\partial A_i(x,\xi)}{\partial \xi_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, *удовлетворяющие алгебраическому условию*

$$\sum_{1\le m,l\le N(s)} \sum_{1\le i,j\le n} r^s_{ml} A_{ij}(x + h_{sm}, \zeta_{m\cdot})\eta_{lj}\eta_{mi} \ge c_{11} \sum_{1\le m\le N(s)} \sum_{1\le i\le n} |\zeta_{mi}|^{p-2} |\eta_{mi}|^2, \tag{4.2}$$

для всех s *и почти всех* $x \in Q_{s1}$, $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$, $\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times n}$, *где* $c_{11} > 0$ *не зависит от* x, ζ и η; *причем*

$$|A_{ij}(x, \xi)| \le g_1(x) + c_{12} \sum_{0\le i\le n} |\xi_i|^{p-2} \quad (i, j = 1, \dots, n), \tag{4.3}$$

$$|A_i(x, \xi_0, 0, \dots, 0)| \le g_2(x) + c_{13} |\xi_0|^{p'-1} \quad (i = 1, \dots, n), \tag{4.4}$$

$$|A_0(x, \xi)| \le g_2(x) + c_{13} \sum_{0\le i\le n} |\xi_i|^{p'-1} \tag{4.5}$$

для почти всех $x \in Q$ *и любых* $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$, *здесь* $2 - 1/p < p' < p$, $g_1 \in L_{p/(p-2)}(Q)$, $g_2 \in L_q(Q)$, $c_{12}, c_{13} > 0$ *не зависят от* x *и* ξ.

Тогда оператор $\mathscr{A}_R = \mathscr{A}R_Q : \overset{\circ}{W}{}^1_p(Q) \to W_q^{-1}(Q)$ – *деминепрерывный, коэрцитивный оператор, обладающий свойством* (S_+).

Доказательство. В силу формулы Тейлора и теорем вложения для пространств Лебега условия (4.3)–(4.5) гарантируют выполнение условия (3.1). Тогда в силу леммы 3.1 оператор $\mathscr{A}_R$ деминепрерывный.

Представим оператор $\mathscr{A}_R$ в виде суммы операторов следующим образом:

$$\langle \mathscr{A}_R u - \mathscr{A}_R y, u - y\rangle = \sum_{1\le i\le n} \int_Q \big(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)\big)(\partial_i u - \partial_i y)dx +$$

$$+ \int_Q \big(A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_0(x, R_Q y, \nabla R_Q y)\big)(u - y)dx = \left\langle \mathscr{A}^1_R(u) - \mathscr{A}^1_R(y), u - y\right\rangle + \left\langle \mathscr{A}^2_R(u) - \mathscr{A}^2_R(y), u - y\right\rangle,$$

где

$$\left\langle \mathscr{A}^1_R u - \mathscr{A}^1_R y, u - y\right\rangle := \sum_{1\le i\le n} \int_Q \big(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q y)\big)(\partial_i u - \partial_i y)dx,$$

$$\left\langle \mathscr{A}^2_R u - \mathscr{A}^2_R y, u - y\right\rangle := \sum_{1\le i\le n} \int_Q \big(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q y) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)\big)(\partial_i u - \partial_i y)dx +$$

$$+ \int_Q \big(A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_0(x, R_Q y, \nabla R_Q y)\big)(u - y)dx.$$

Согласно условию (4.2), аналогично теореме 3.1 доказывается, что оператор $\mathcal{A}^1_R : \mathring{W}^1_p(Q) \to W^{-1}_q(Q)$ сильно эллиптичен.

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_R$ обладает свойством (S_+). Пусть $u_m \rightharpoonup u$ слабо в $\mathring{W}^1_p(Q)$. Тогда, с точностью до подпоследовательности, $u_m \to u$ в $L_p(Q)$. В силу непрерывности оператора R_Q, $R_Q u_m \rightharpoonup R_Q u$ в $W^1_p(Q)$ и $R_Q u_m \to R_Q u$ в $L_p(Q)$. Из сходимости $R_Q u_m \to R_Q u$ в $L_p(Q)$, условий (4.3), (4.4) и [10, Глава 1, § 2, п. 4] следует, что $A_i(\cdot, R_Q u_m, \nabla R_Q u) \to A_i(\cdot, R_Q u, \nabla R_Q u)$ в $L_q(Q)$.

Заметим, что $\lim\limits_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u, u_m - u\rangle = 0$ в силу слабой сходимости $\{u_m\}$. Тогда

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u_m, u_m - u\rangle = \varliminf_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u_m - \mathcal{A}_R u, u_m - u\rangle =$$
$$= \varliminf_{m\to\infty} \left\{\left\langle \mathcal{A}^1_R u_m - \mathcal{A}^1_R u, u_m - u\right\rangle + \left\langle \mathcal{A}^2_R u_m - \mathcal{A}^2_R u, u_m - u\right\rangle\right\}.$$

Рассмотрим второе слагаемое под знаком предела:

$$\lim_{m\to\infty} \left\langle \mathcal{A}^2_R u_m - \mathcal{A}^2_R u, u_m - u\right\rangle = \lim_{m\to\infty} \left\{\int_Q \big(A_0(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u_m) - A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\big)(u_m - u)dx + \right.$$
$$\left. + \sum_{1\le i\le n} \int_Q \big(A_i(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\big)(\partial_i u_m - \partial_i u)dx\right\} = 0.$$

Здесь первый интеграл сходится к нулю, поскольку подынтегральной функцией является произведение, первый сомножитель которого принадлежит ограниченной в $L_q(Q)$ последовательности, а второй – последовательности функций, сходящихся к нулю в $L_p(Q)$. В последней строке рассмотрена сумма интегралов, подынтегральными функциями которых являются произведения, первый сомножитель которых принадлежит последовательности функций, сходящихся к нулю в пространстве $L_q(Q)$, а второй – последовательности функций, слабо сходящихся к нулю в $L_p(Q)$. То есть,

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u_m, u_m - u\rangle = \varliminf_{m\to\infty} \left\langle \mathcal{A}^1_R u_m - \mathcal{A}^1_R u, u_m - u\right\rangle.$$

Поскольку выше было доказано, что оператор $\mathcal{A}^1_R : \mathring{W}^1_p(Q) \to W^{-1}_q(Q)$ сильно эллиптичен, то мы можем использовать оценку (3.9):

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u_m, u_m - u\rangle = \varliminf_{m\to\infty} \left\langle \mathcal{A}^1_R u_m - \mathcal{A}^1_R u, u_m - u\right\rangle \ge \varliminf_{m\to\infty} c_8 \|u_m - u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} \ge 0. \tag{4.6}$$

Из неравенства (4.6) следует, что для любой слабо сходящейся последовательности $u_m \rightharpoonup u$ в $\mathring{W}^1_p(Q)$ при выполнении условия $\varlimsup\limits_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u_m, u_m - u\rangle \le 0$ справедливо, что

$$\lim_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u_m, u_m - u\rangle = 0.$$

Таким образом, получена оценка

$$c_8 \lim_{m\to\infty} \|u_m - u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} \le \lim_{m\to\infty} \langle \mathcal{A}_R u_m, u_m - u\rangle = 0.$$

Доказано, что последовательность $\{u_m\}$ сходится в пространстве $\mathring{W}^1_p(Q)$ по норме, т.е. оператор $\mathcal{A}_R$ обладает свойством (S_+).

Осталось проверить коэрцитивность оператора $\mathcal{A}_R$:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_R u, u\rangle &= \sum_{1\le i\le n}\int_Q A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\partial_i u dx + \int_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) u dx = \\ &= \sum_{1\le i\le n}\int_Q \left(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, 0)\right)\partial_i u dx + \\ &+ \sum_{1\le i\le n}\int_Q A_i(x, R_Q u, 0)\partial_i u dx + \int_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) u dx.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Для первого слагаемого в силу условия (4.2) выше получена оценка:

$$\sum_{1\le i\le n}\int_Q \left(A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, 0)\right)\partial_i u dx \ge c_8 \|u\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)}. \tag{4.8}$$

Оценим второе слагаемое. Используем условие (4.4), а также неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned}\left|\int_Q A_i(x, R_Q u, 0)\partial_i u dx\right| &\le \int_Q |A_i(x, R_Q u, 0)||\partial_i u|\, dx \le \int_Q \left|g_2(x) + c_{13}|R_Q u|^{p'-1}\right||\partial_i u|\, dx \le \int_Q |g_2(x)||\partial_i u|\, dx + \\ &+ c_{13}\int_Q |R_Q u|^{p'-1}|\partial_i u|\, dx \le \|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + c_{13}\left(\int_Q |R_Q u|^{(p'-1)q}\, dx\right)^{1/q}\left(\int_Q |\partial_i u|^p\, dx\right)^{1/p} = \\ &= \|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + c_{13}\|R_Q u\|^{p'-1}_{L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)}.\end{aligned}$$

Заметим, что $1 < (p'-1)p/(p-1) = (p'-1)q < p$ при $(2 - 1/p) < p' < p$. Используем непрерывность вложения пространств Лебега $L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q) \subset L_p(Q)$, а также непрерывность оператора $R_Q : L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q) \to L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q)$:

$$\begin{aligned}\left|\int_Q A_i(x, R_Q u, 0)\partial_i u dx\right| &\le \|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + c_{14}\|R_Q u\|^{p'-1}_{L_p(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} \le \\ \le \|g_2\|_{L_q(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + c_{15}\|u\|^{p'-1}_{L_p(Q)}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} &\le c_{16}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \frac{c_{15}\varepsilon}{p}\|\partial_i u\|^p_{L_p(Q)} + \frac{c_{15}}{\varepsilon q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{1\le i\le n}\int_Q A_i(x, R_Q u, 0)\partial_i u dx\right| &\le \sum_{1\le i\le n}\frac{c_{15}\varepsilon}{p}\|\partial_i u\|^p_{L_p(Q)} + c_{16}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \\ &+ \frac{c_{15}n}{\varepsilon q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)} = \frac{c_{15}\varepsilon}{p}\|u\|^p_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)} + c_{16}\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)} + \frac{c_{15}n}{\varepsilon q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Аналогично для последнего слагаемого (4.7), используем непрерывность вложения $L_{p'}(Q) \subset L_p(Q)$ для $1 < p' < p$, а также непрерывность оператора $R_Q : L_{p'}(Q) \to L_{p'}(Q)$:

$$\begin{aligned}\left|\int_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) u dx\right| &\le \int_Q |A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)||u|\, dx \le \int_Q \left|g_2(x) + c_{13}|R_Q u|^{p'-1} + c_{13}\sum_{1\le i\le n}|\partial_i R_Q u|^{p'-1}\right||u|\, dx \le \\ \le \int_Q |g_2||u|\, dx + c_{13}\int_Q |R_Q u|^{p'-1}|u|\, dx &+ c_{13}\sum_{1\le i\le n}\int_Q |\partial_i R_Q u|^{p'-1}|u|\, dx \le c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + c_{13}\|u\|_{L_{p'}(Q)}\|R_Q u\|^{p'-1}_{L_{p'}(Q)} + \\ + c_{13}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i R_Q u\|^{p'-1}_{L_{p'}(Q)}\|u\|_{L_{p'}(Q)} &\le c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + c_{17}\|u\|_{L_{p'}(Q)}\|u\|^{p'-1}_{L_{p'}(Q)} + c_{18}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i u\|^{p'-1}_{L_{p'}(Q)}\|u\|_{L_{p'}(Q)} \le c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + \\ + c_{17}\|u\|^{p'}_{L_{p'}(Q)} + \frac{c_{18}(p'-1)}{p'}\sum_{1\le i\le n}\|\partial_i u\|^{p'}_{L_{p'}(Q)} &+ \frac{c_{18}}{p'}\|u\|^{p'}_{L_{p'}(Q)} \le c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + c_{19}\|u\|^{p'}_{L_p(Q)} + c_{20}\|u\|^{p'}_{\overset{\circ}{W}{}^1_p(Q)}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Выберем ε таким образом, что $c_{15}\varepsilon/p = c_8/2$, подставим оценки (4.8)–(4.10) в (4.7) и используем неравенство Фридрихса $\|u\|_{L_p(Q)} \le c_{21}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)}$. Тогда имеем

$$\langle \mathcal{A}_R u, u\rangle \ge c_8\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - \left(\frac{c_{15}\varepsilon}{p}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} + c_{16}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} + \frac{c_{15}n}{\varepsilon q}\|u\|^{(p'-1)q}_{L_p(Q)}\right) -$$
$$-\left(c_{16}\|u\|_{L_p(Q)} + c_{19}\|u\|^{p'}_{L_p(Q)} + c_{20}\|u\|^{p'}_{\mathring{W}^1_p(Q)}\right) \ge \frac{c_8}{2}\|u\|^p_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{22}\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{23}\|u\|^{(p'-1)p/(p-1)}_{\mathring{W}^1_p(Q)} - c_{24}\|u\|^{p'}_{\mathring{W}^1_p(Q)}. \quad (4.11)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (4.11) положительно и имеет степенной рост порядка p относительно $\|u\|_{\mathring{W}^1_p(Q)}$, а остальные слагаемые имеют степенной рост порядков меньше p. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_R$ является коэрцитивным.

Замечание 4.1. Заметим, что свойство $(S)_+$ сохраняется, если $p' = p$ в оценках (4.4), (4.5) при выполнении остальных условий теоремы 4.1.

Замечание 4.2. Аналогичные исследования можно провести в случае задач $2m$-го порядка. Для симметричного разностного оператора подобные результаты были получены в [7].

Определение 4.4. Функция $u \in \mathring{W}^1_p(Q)$ называется *обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2), если для любого $\xi \in \mathring{W}^1_p(Q)$ справедливо интегральное тождество

$$\sum_{1\le i\le n}\int_Q A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\partial_i\xi\, dx + \int_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)\,\xi\, dx = \int_Q f\,\xi\, dx. \quad (4.12)$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *а также* $f \in W_q^{-1}(Q)$. *Тогда существует обобщенное решение задачи* (1.1), (1.2). *Более того, множество решений задачи* (1.1), (1.2) *слабо компактно*.

Доказательство. Согласно теореме 4.1, оператор $\mathcal{A}_R$ деминепрерывен, коэрцитивен и обладает свойством (S_+), т.е. псевдомонотонен. Следовательно, обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует, см. теорему 2.7 гл. 2 из [11].

Доказательство слабой компактности множества решений уравнения с коэрцитивным, деминепрерывным оператором, обладающим свойством (S_+), приведено, например, в теореме 3 (см. [6]).

5. ПРИМЕР: НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО

Пусть $p = 2$, $Q = (0,2)\times(0,1)$, $f \in L_2(Q)$. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$Aw(x) = -\sum_{i,j=1,2}\partial_i\left(A_{ij}(x,w)\partial_j w\right) = f \qquad (x \in Q) \quad (5.1)$$

с краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского:

$$\begin{aligned} w(x_1,0) = w(x_1,1) &= 0 \qquad (0 \le x_1 \le 2),\\ w(0,x_2) &= \gamma_1 w(1,x_2) \qquad (0 \le x_2 \le 1),\\ w(2,x_2) &= \gamma_{-1} w(1,x_2) \qquad (0 \le x_2 \le 1). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь

$$|A_{ij}(x,y)| \le g_4(x), \qquad g_4 \in L_\infty(Q). \quad (5.3)$$

В работе [12] был рассмотрен оператор $A = -\Delta$ и доказана разрешимость задачи при $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_{-1} = 1$. Существование и единственность обобщенного решения в пространстве $W^1_2(Q)$ для произвольного линейного сильно эллиптичного оператора A, заданного 1-периодическими функциями $A_{ij}(x,w) = A_{ij}(x)$, при $|\gamma_1 + \gamma_{-1}| < 2$ была доказана в [5]. Там же была установлена взаимосвязь задачи (5.1), (5.2) и эллиптического функционально-дифференциального уравнения

$$AR_Q u(x) = f \quad (x \in Q) \tag{5.4}$$

с краевым условием

$$u = 0 \quad (x \in \partial Q), \tag{5.5}$$

где оператор $R_Q = I_Q R P_Q$ задан соотношением

$$Ru(x) = u(x) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

А именно, было доказано, что если $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$, то оператор $R_Q : \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q) \to W_{2,\gamma}^1(Q)$ является изоморфизмом, здесь

$$W_{2,\gamma}^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u \text{ удовлетворяют (5.2)}\}.$$

Таким образом, функция $w \in W_2^1(Q)$ тогда и только тогда является обобщенным решением (5.1), (5.2), когда существует обобщенное решение $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ задачи (5.4), (5.5), причем $w = R_Q u$.

В рассматриваемой квазилинейной задаче нельзя наложить условие 1-периодичности функций A_{ij}, поскольку имеется явная зависимость A_{ij} от w. Используем теорему 3.2 для проверки сильной эллиптичности оператора AR_Q. Заметим, что оператору R_Q соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_{-1} & \gamma_0 \end{pmatrix},$$

где $\gamma_0 := 1$. Матрица R_1 невырождена при $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$. Согласно теореме 3.1 оператор AR_Q сильно эллиптичен, если $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$, а непрерывные функции A_{ij} удовлетворяют неравенству

$$\sum_{l,m=1,2} \sum_{i,j=1,2} \gamma_{l-m} A_{ij}(x, \xi_m) \eta_{lj} \eta_{mi} \geq c_{25} \sum_{m,i=1,2} |\eta_{mi}|^2, \tag{5.6}$$

где $c_{25} > 0$ не зависит от $\xi \in \mathbb{R}^2$ и $\eta \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$, *и пусть выполнены неравенства* (5.3) *и* (5.6). *Тогда нелокальная эллиптическая задача* (5.1), (5.2) *имеет единственное обобщенное решение* $w \in W_{2,\gamma}^1(Q)$ *для любого* $f \in W_2^{-1}(Q)$.

Доказательство вытекает из теоремы 3.4 и сформулированного утверждения о том, что $R_Q : \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q) \to W_{2,\gamma}^1(Q)$ – изоморфизм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
2. *Hartman P., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential functional equations // Acta Math. 1966. V. 115. P. 271–310.
3. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. Вып. 5 (431). С. 3–112.
4. *Skubachevskii A.L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations // J. of Differential Equations. 1986. V. 63. P. 332–361.
5. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

6. *Солонуха О.В.* Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений // Труды Математического института им. В.А. Стеклова. 2013. Т. 283. С. 226–244.
7. *Solonukha O.V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional–differential equations // Discrete and Continuous Dynamic Systems, Seria S. 2016. V. 9. № 3. P. 847–868.
8. *Солонуха О.В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 417–428.
9. *Дубинский Ю.А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Итоги науки и техники: ВИНИТИ. Современные проблемы математики. 1976. Т. 9. С. 5–130.
10. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
11. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
12. *Бицадзе А.В., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.