

УДК 519.622

## СИНТЕЗ ЛОКАЛЬНО СОСРЕДОТОЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ МЕМБРАНЫ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ РАЗМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК КОНТРОЛЯ И ГАСИТЕЛЕЙ КОЛЕБАНИЙ

© 2020 г. К. Р. Айда-заде<sup>1,2,\*</sup>, В. А. Гашимов<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> AZ1141 Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, Институт Систем Управления НАН Азербайджана, Азербайджан

<sup>2</sup> AZ1141 Баку, ул. Б. Вахабзаде, 9, Институт Математики и Механики НАН Азербайджана, Азербайджан

\*e-mail: kamil\_aydazade@rambler.ru

\*\*e-mail: vugarhashimov@gmail.com

Поступила в редакцию 29.07.2019 г.

Переработанный вариант 29.07.2019 г.

Принята к публикации 10.03.2020 г.

Предложен подход к синтезу управления сосредоточенными источниками в распределенных системах с обратной связью. На примере задачи гашения колебаний мембраны точечными стабилизаторами оптимизируются: 1) места размещения стабилизаторов; 2) места точек замера состояния мембраны; 3) параметры линейной обратной связи, определяющей зависимость между замерами состояния мембраны и режимами работы стабилизаторов. Получены формулы градиента функционала по оптимизируемым параметрам. С применением численных методов оптимизации первого порядка проведены компьютерные эксперименты, сделан анализ влияния точности замеров на процесс стабилизации мембраны. Библ. 22. Фиг. 2. Табл. 2.

**Ключевые слова:** тонкая мембрана, колебания, синтез управления, сосредоточенный источник, окрестность точки контроля, нагруженное дифференциальное уравнение, метод проекции градиента.

DOI: 10.31857/S0044466920050026

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, задачи оптимального управления с обратной связью объектами с распределенными параметрами (см. [1]–[3]) в отличие от управления объектами с сосредоточенными параметрами (см. [4]–[8]) изучены меньше. Это связано, во-первых, со сложностью технической реализации таких систем, требующих получения текущей информации о состоянии объекта (процесса) во всех его точках. Во-вторых, имеются проблемы, связанные как с решением задач структурной и параметрической идентификации математических моделей управляемых объектов, так и с разработкой эффективных численных методов, алгоритмов решения соответствующих математических задач.

В последние годы в связи с развитием информационных, компьютерных технологий и средств измерительной техники возрос интерес к созданию систем автоматического управления и регулирования сложными объектами с распределенными параметрами, описываемыми различными видами функциональных уравнений с начально-краевыми условиями (см. [1]–[3]).

Данная работа посвящена изложению подхода к синтезу управляющих воздействий на процесс стабилизации колебаний тонкой однородной мембраны. Предполагается, что колебания возникли в результате сосредоточенных воздействий на мембрану в начальный момент времени. Значения стабилизирующих воздействий на мембрану со стороны стабилизаторов, установленных в различных ее точках, назначаются в зависимости от замеренных состояний мембраны в окрестностях точек контроля. Для синтеза управляющих воздействий предлагается использовать линейную обратную связь с учетом результатов текущих замеров. Оптимизируемыми в рассматриваемой постановке задачи являются: 1) параметры линейной обратной связи; 2) координаты расположения стабилизаторов на мембране; 3) координаты точек замера (контроля) состояния мембраны.

Задача синтеза управления приведена к параметрической задаче оптимального управления системой с распределенными параметрами. Для ее численного решения предлагается использовать методы оптимизации первого порядка. С этой целью получены формулы для компонент градиента целевого функционала задачи в пространстве оптимизируемых параметров.

Приводятся результаты численных экспериментов, проведен анализ влияния погрешностей замеров в контролируемых точках на процесс стабилизации мембраны.

Предлагаемый подход может быть использован в системах управления с обратной связью многими другими технологическими процессами и объектами с распределенными параметрами, описываемыми другими видами и типами начально-краевых задач относительно дифференциальных уравнений с частными производными.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается задача гашения поперечных колебаний тонкой однородной мембраны заданной формы, закрепленной по границе. Предполагается, что колебания возникают в результате одновременных воздействий внешних источников в начальный момент времени на окрестности некоторых точек мембраны  $\theta^v$ ,  $v = 1, \dots, L$ . Колебания гасятся стабилизаторами (гасителями), воздействующими на окрестности точек мембраны  $\eta^i$ ,  $i = 1, \dots, N_c$ , в окрестности заданных дискретных моментов времени  $\tau_s$ ,  $s = 1, \dots, N_t$ . Для формирования режимов функционирования стабилизаторов используется информация от датчиков о результатах измерения текущих значений смещения в окрестности точек  $\xi^j$ ,  $j = 1, \dots, N_o$ .

Данный процесс при  $t > 0$  можно описать следующей начально-краевой задачей (см. [9]):

$$u_t(x, t) = a^2 \mathcal{L}u(x, t) - \lambda u_t(x, t) + \sum_{s=1}^{N_t} \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) \sum_{i=1}^{N_c} \vartheta_s^i \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)), \tag{1.1}$$

$$x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sum_{v=1}^L q^v \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\theta^v)), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma. \tag{1.3}$$

Здесь  $u(x, t)$  – функция, определяющая величину смещения мембраны в точке  $x \in \Omega$  в момент времени  $t$  в процессе ее колебания;  $\mathcal{L} = \partial^2 / \partial x_1^2 + \partial^2 / \partial x_2^2$ ;  $a^2, \lambda \geq 0$  – заданные константы, определяемые физическими свойствами мембраны и среды, в которой она находится;  $\Gamma$  – почти всюду гладкая граница области  $\Omega$ , занимаемой мембраной;  $q^v$  – интенсивность (мощность)  $v$ -го внешнего источника, сосредоточенного в окрестности точки мембраны  $\theta^v = (\theta_1^v, \theta_2^v) \in \Omega$ ,  $v = 1, \dots, L$ , число которых равно  $L$ ;  $\vartheta = (\vartheta_1^1, \dots, \vartheta_1^{N_c}, \dots, \vartheta_{N_t}^1, \dots, \vartheta_{N_t}^{N_c}) \in \mathbb{R}^{N_t N_c}$  – вектор, определяющий управляющие воздействия стабилизаторов на окрестности точек  $\eta^i = (\eta_1^i, \eta_2^i) \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, N_c$ ,  $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^{N_c})$ ;  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{N_t})$  – заданные моменты времени, в окрестности которых происходило воздействие гасителей,  $\tau_s > \tau_{s-1} > 0$ ,  $s = 1, \dots, N_t$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $\tau_{N_t} = T_f$ , количество которых равно  $N_t$ ;  $T_f$  – заданная продолжительность времени управления процессом.

Непрерывно дифференцируемая по  $x \in \Omega$  функция  $\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}))$  определяет распределение интенсивности источника в окрестности  $\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})$  точки ее размещения  $\tilde{\eta} \in \Omega$ . Она имеет следующие свойства:

$$\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})) = \begin{cases} \neq 0 & \text{при } x \in \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}), \\ = 0 & \text{при } x \notin \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}), \end{cases}$$

$$\iint_{\Omega} \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})) dx = \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})} \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})) dx = 1, \quad \tilde{\eta} \in \Omega_{\varepsilon_x},$$

где  $\Omega_{\varepsilon_x}$  есть  $\varepsilon_x$ -внутренность  $\Omega$ , т.е. каждая точка  $x \in \Omega_{\varepsilon_x}$  удалена от границы  $\Gamma$  области  $\Omega$  не меньше, чем на  $\varepsilon_x$ . Границу окрестности  $\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})$  будем обозначать через  $\Gamma_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta})$ .

Аналогично, непрерывная по  $t \in [0, T_f]$  функция  $\delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau}))$  определяет распределение интенсивности источника в окрестности  $\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau})$  момента времени воздействия  $\tilde{\tau} \subset [\varepsilon_t, T_f - \varepsilon_t]$ , причем

$$\delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau})) = \begin{cases} \neq 0 & \text{при } t \in \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau}) \subset [\varepsilon_t, T_f - \varepsilon_t], \\ = 0 & \text{при } t \notin \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau}) \subset [\varepsilon_t, T_f - \varepsilon_t], \end{cases}$$

$$\int_0^{T_f} \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau})) dt = \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau})} \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau})) dt = 1.$$

Как следует из свойств функций  $\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}))$  и  $\delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau}))$ , участвующих в дифференциальном уравнении (1.1) и начальном условии (1.2), воздействия в моменты времени и в точках мембраны осуществляются не мгновенно и не точечно, а они имеют пространственное и временное распределения в достаточно малых окрестностях точек своего сосредоточения. Во-первых, это объясняется практическими соображениями, т.к. реальные воздействия (далее это будет принято относительно и замеров) не могут быть мгновенными во времени и точечными в фазовом пространстве. Во-вторых, привлечение предельных вариантов при  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_t \rightarrow 0$  функций  $\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}))$ ,  $\delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau}))$ , т.е. соответствующих функций Дирака (см. [1], [9], [10]), существенно усложнило бы приводимые ниже математические выкладки и привело к необходимости использования функциональных пространств и понимания решения начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в обобщенном смысле. В-третьих, использование функций  $\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\tilde{\eta}))$ ,  $\delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tilde{\tau}))$  в математических моделях прикладных задач является более естественным и при этом несложно обосновываются схемы численной аппроксимации задачи в целом.

Пусть значения мощностей источников колебаний  $q^v$  и места их размещения  $\theta^v$ ,  $v = 1, \dots, N_b$ , известны не точно. Заданы множества возможных значений  $q^v$ :

$$Q^v = \{q \in \mathbb{R} : \underline{q}^v \leq q \leq \overline{q}^v\}, \quad v = 1, \dots, L, \quad Q = Q^1 \times \dots \times Q^L, \tag{1.4}$$

и функции плотности распределения их значений  $\rho_{Q^v}(q) \geq 0$ ,  $\underline{q}^v \leq q \leq \overline{q}^v$  такие, что

$$\int_{Q^v} \rho_{Q^v}(q) dq = 1, \quad v = 1, \dots, L.$$

Точки  $\theta^v$  возможного размещения источников внешних воздействий определены множествами

$$\Theta^v \subset \Omega, \quad v = 1, \dots, L, \quad \Theta = \Theta^1 \times \dots \times \Theta^L, \tag{1.5}$$

с заданными функциями плотности распределения  $\rho_{\Theta^v}(\theta) \geq 0$  такими, что

$$\iint_{\Theta^v} \rho_{\Theta^v}(\theta) d\theta = 1, \quad v = 1, \dots, L.$$

Значения  $\vartheta_s^i$ , определяющие управляющие мощности воздействий и места их размещения  $\eta^i$ , являются оптимизируемыми параметрами рассматриваемого процесса управления гашением колебаний. Они удовлетворяют ограничениям:

$$\underline{\vartheta}^i \leq \vartheta_s^i \leq \overline{\vartheta}^i, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad s = 1, \dots, N_t, \tag{1.6}$$

$$\eta^i \in \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i) \subset \Omega_c^i \subset \Omega, \quad i = 1, \dots, N_c, \tag{1.7}$$

исходящих из технических и технологических соображений. В (1.7)  $\Omega_c^i$  – заданные замкнутые подобласти, в которых могут устанавливаться стабилизаторы;  $\underline{\vartheta}^i, \overline{\vartheta}^i$  – заданы,  $i = 1, \dots, N_c$ .

Известно, что решение  $u(x, t)$  начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) при заданных внешних и управляющих воздействиях  $q^v$  и  $\vartheta_s^i$ ,  $i = 1, \dots, N_c$ ,  $v = 1, \dots, L$ , существует в классическом смысле (см. [9]).

Рассматриваемая задача управления процессом гашения колебаний мембраны за заданное время  $T_f$  заключается в определении значений мощностей воздействий гасителей колебания  $\vartheta$  и мест их размещения  $\eta$ , удовлетворяющих приведенным выше условиям и минимизирующих следующий функционал:

$$\mathcal{J}(\vartheta, \eta) = \int \int \int_Q I(\vartheta, \eta; q, \theta) \rho_\theta(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq, \tag{1.8}$$

$$I(\vartheta, \eta; q, \theta) = T_1 \int_{T_f} \int_{\Omega} \mu(x) [u(x, t; \vartheta, \eta, q, \theta)]^2 dx dt + \mathcal{R}(\vartheta, \eta, \varepsilon), \tag{1.9}$$

$$\mathcal{R}(\vartheta, \eta, \varepsilon) = \varepsilon_1 \|\vartheta - \hat{\vartheta}\|_{\mathbb{R}^{N_c}}^2 + \varepsilon_2 \|\eta - \hat{\eta}\|_{\mathbb{R}^{2N_c}}^2,$$

$$q = (q^1, \dots, q^L), \quad \rho_Q(q) = \rho_{Q^1}(q^1) \cdots \rho_{Q^L}(q^L), \quad dq = dq^1 \cdots dq^L,$$

$$\theta = (\theta^1, \dots, \theta^L), \quad \rho_\theta(\theta) = \rho_{\theta^1}(\theta^1) \cdots \rho_{\theta^L}(\theta^L), \quad d\theta = d\theta^1 \cdots d\theta^L.$$

Здесь функция  $u(x, t) = u(x, t; \vartheta, \eta, q, \theta)$  является решением начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) при заданных в окрестностях точек сосредоточения  $\theta^v$  внешних воздействий мощностью  $q^v$  в начальный момент времени,  $v = 1, \dots, L$ , и режимах гасителей  $\vartheta$ ;  $\mu(x) \geq 0$  – весовая функция, определяющая значимость гашения колебания в точке мембраны  $x \in \Omega$ . Второе слагаемое в (1.9) служит для регуляризации функционала,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \hat{\vartheta} \in \mathbb{R}^{N_c}, \hat{\eta} \in \mathbb{R}^{2N_c}$  – параметры регуляризации.

Заданная величина  $\Delta T > 0$  определяет длительность промежутка времени  $[T_f, T_1]$ ,  $T_1 = T_f + \Delta T$ , на котором должна оцениваться степень установления колебания мембраны. Функционал (1.8), (1.9) по состоянию мембраны на промежутке времени  $[T_f, T_1]$  оценивает качество управляющих параметров  $\vartheta$  и  $\eta$  при управлении процессом гашения колебаний на промежутке времени  $t \in [0, T_f]$  в среднем по всем значениям параметров внешних точечных воздействий  $q, \theta$ , удовлетворяющих условиями (1.4), (1.5).

Предположим, что в точках мембраны  $\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j) \in \Omega, j = 1, \dots, N_o$ , установлены датчики, осуществляющие замеры интегральных значений смещения мембраны в окрестностях этих точек и моментов времени  $\tau_s \in (0, T_f], s = 1, \dots, N_t$ :

$$\hat{u}_s^j = \int_{\mathbb{O}_\varepsilon(\tau_s)} \int_{\mathbb{O}_\varepsilon(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t}, \quad j = 1, \dots, N_o, \quad s = 1, \dots, N_t, \tag{1.10}$$

и имеется возможность оперативно устанавливать допустимые режимы стабилизации  $\vartheta_s^i, i = 1, \dots, N_c, s = 1, \dots, N_t$ , по результатам этих замеров. В силу свойств функций  $\delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)), \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))$  формулу (1.10) можно записать и в виде

$$\hat{u}_s^j = \int_0^T \int_{\Omega} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t}, \quad j = 1, \dots, N_o, \quad s = 1, \dots, N_t.$$

Здесь  $\delta(\hat{x}, \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)), \delta(\hat{t}, \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s))$  играют роль весовых функций, определяющих вклад значения состояния мембраны в точке  $x \in \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j), t \in \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)$  в целом на замеренное значение  $\hat{u}_s^j$ .

Для назначения текущих значений для режимов стабилизаторов используем следующую функцию, определяющую обратную связь управляющих воздействий с состоянием мембраны в окрестностях точек наблюдения:

$$\vartheta_s^i = \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} [\hat{u}_s^j - z^{ij}] = \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{O}_\varepsilon(\tau_s)} \int_{\mathbb{O}_\varepsilon(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right], \tag{1.11}$$

$$i = 1, \dots, N_c, \quad s = 1, \dots, N_t.$$

Здесь  $k = ((k^{ij}))$  – матрица коэффициентов усиления;  $z = ((z^{ij}))$ ,  $z^{ij}$  – номинальное значение смещения мембраны в точке  $\xi^j$  относительно стабилизатора, установленного в точке  $\eta^i$ ,  $i = 1, \dots, N_c$ ,  $j = 1, \dots, N_o$ ;  $k, z$  – являются оптимизируемыми параметрами обратной связи.

Подставив формулу (1.11) в уравнение (1.1), получим

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \mathcal{L}u(x, t) - \lambda u_t(x, t) + \sum_{s=1}^{N_l} \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) \sum_{i=1}^{N_c} \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \times \times \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right], \quad x \in \Omega. \tag{1.12}$$

Из-за участия в дифференциальных уравнениях интегральных значений искомых функций по окрестности некоторых точек временной переменной или фазового пространства такие уравнения многие авторы называют нагруженными (см. [11] и библиографию в ней). В уравнении (1.12) нагружениями являются интегралы по состоянию мембраны в окрестностях точек размещения замеров  $\xi^j$  и моментов времени замеров  $\tau_s$ ,  $j = 1, \dots, N_o$ ,  $s = 1, \dots, N_l$ . Исследование вопросов существования и единственности решений нагруженных дифференциальных уравнений как с обыкновенными, так и с частными производными, в том числе численные методы их решения, исследовались в таких работах, как [12]–[15]. Эти вопросы в данной статье не рассматриваются.

Пусть устройства для замеров состояния мембраны, исходя из технических и технологических соображений, могут устанавливаться не во всех точках мембраны, а в некоторых ее заданных подобластях:

$$\xi^j \in \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j) \subset \Omega_o^j \subset \Omega, \quad j = 1, \dots, N_o, \tag{1.13}$$

причем на практике, как правило, подобласти точек размещения стабилизаторов и замеров состояния могут не пересекаться, т.е.

$$\Omega_c^i \cap \Omega_o^j = \emptyset, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad j = 1, \dots, N_o.$$

Основной целью данной статьи является синтез управляющих параметров стабилизации процесса колебаний мембраны. Задача заключается в определении оптимальных значений параметров обратной связи  $k \in \mathbb{R}^{N_c N_o}$ ,  $z \in \mathbb{R}^{N_c N_o}$ , мест размещения точек замера  $\xi$  и стабилизации  $\eta$ , при которых удовлетворяются ограничения (1.6), (1.7), (1.12). Общая размерность конечномерного вектора синтезируемых параметров, который обозначим через  $y = (k, z, \xi, \eta)$ , равна  $N = 2(N_c N_o + N_c + N_o)$ , т.е.  $y \in \mathbb{R}^N$ . Как видно, размерность оптимизируемого вектора определяется в основном удвоенным произведением числа стабилизаторов и точек контроля. В практических приложениях их число невелико и редко превышает 5–6 единиц, а следовательно, размерность всей задачи составляет порядка 60–80. Такую размерность можно считать приемлемой с учетом использования современных средств вычислительной техники, численных методов и того, что эти задачи не требуют решения в реальном масштабе времени.

Критерий качества параметров управления, определяемый функционалом (1.8), (1.9), запишем в виде

$$\mathcal{J}(y) = \int_{\mathcal{Q}} \int_{\Theta} I(y; q, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_{\mathcal{Q}}(q) d\theta dq, \tag{1.14}$$

$$I(y; q, \theta) = \int_{T_f}^{T_1} \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, t; y, q, \theta)]^2 dx dt + \mathcal{R}(y, \varepsilon), \tag{1.15}$$

где использовано обозначение:

$$\mathcal{R}(y, \varepsilon) = \varepsilon_1 \|k - \hat{k}\|_{\mathbb{R}^{N_c N_o}}^2 + \varepsilon_2 \|z - \hat{z}\|_{\mathbb{R}^{N_c N_o}}^2 + \varepsilon_3 \|\xi - \hat{\xi}\|_{\mathbb{R}^{2N_o}}^2 + \varepsilon_4 \|\eta - \hat{\eta}\|_{\mathbb{R}^{2N_c}}^2.$$

Здесь  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ ,  $\varepsilon_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $\hat{k} \in \mathbb{R}^{N_c N_o}$ ,  $\hat{z} \in \mathbb{R}^{N_c N_o}$ ,  $\hat{\xi} \in \mathbb{R}^{2N_o}$ ,  $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{2N_c}$  – параметры регуляризации, значения которых могут назначаться с использованием различных известных алгоритмов метода регуляризации (см. [16]).

Полученная задача синтеза управления процессом стабилизации колебаний (1.12), (1.2), (1.3), (1.4)–(1.6), (1.14), (1.15) относится к классу задач параметрического оптимального управления распределенными системами.

Представляет интерес случай, когда множество возможных значений внешних воздействий  $Q^v$  и точек их размещения  $\Theta^v$  являются дискретно заданными

$$Q^v = \{q^{v,i}: i = 1, \dots, N_q^v\}, \quad v = 1, \dots, L, \tag{1.16}$$

$$\Theta^v = \{\theta^{v,j}: j = 1, \dots, N_\theta^v\}, \quad v = 1, \dots, L, \tag{1.17}$$

с заданными значениями вероятности получения этих дискретных значений

$$p_{Q^v}^i = P(q = q^{v,i}), \quad i = 1, \dots, N_q^v, \quad v = 1, \dots, L, \tag{1.18}$$

$$p_{\Theta^v}^j = P(\theta = \theta^{v,j}), \quad j = 1, \dots, N_\theta^v, \quad v = 1, \dots, L. \tag{1.19}$$

В этом случае функционал (1.14) примет вид

$$\mathcal{J}(y) = \sum_{i_1=1}^{N_q^1} \dots \sum_{i_L=1}^{N_q^L} \sum_{j_1=1}^{N_\theta^1} \dots \sum_{j_L=1}^{N_\theta^L} I(y; q^{1,i_1}, \dots, q^{L,i_L}, \theta^{1,j_1}, \dots, \theta^{L,j_L}) p_{Q^1}^{i_1} \dots p_{Q^L}^{i_L} \cdot p_{\Theta^1}^{j_1} \dots p_{\Theta^L}^{j_L}. \tag{1.20}$$

В практических приложениях встречается случай, когда обратная связь с точками замера состояния (смещения) мембраны и воздействия стабилизаторов может осуществляться лишь в окрестностях заданных дискретных моментов времени  $\tau_n, n = 1, \dots, N_m$ . Предлагаемый подход можно распространить и на такую постановку задачи.

Отметим следующие особенности полученной задачи синтеза управления процессом стабилизации колебаний.

Во-первых, синтезированное управление определяется конечномерным вектором  $y \in \mathbb{R}^N$ . Во-вторых, в задаче оптимизируются как координаты размещения стабилизаторов  $\eta^i \in \Omega_c^i \subset \Omega$ , так и точки замеров  $\xi^j \in \Omega_o^j \subset \Omega$ , определяемые для всевозможных значений интенсивности внешних точечных воздействий и точек их сосредоточения. В-третьих, несмотря на то, что исходная задача оптимального управления относительно уравнения (1.1) и функционала (1.8), (1.9) при заданных точках размещения стабилизаторов выпукла, полученная задача из-за нелинейного участия в уравнении (1.11) оптимизируемых параметров обратной связи, в общем случае, может быть невыпуклой, а следовательно, многоэкстремальной. Четвертая особенность задачи обусловлена тем, что исследуемый процесс описывается нагруженным дифференциальным уравнением гиперболического типа. Пятая особенность задачи связана с ограничением (1.5) на управляющие воздействия стабилизаторов. В силу (1.11) ограничение (1.13) на управление переходит в совместное ограничение на фазовую функцию  $u(x, t)$  в точках замера  $\xi^j, j = 1, \dots, N_o$ , и параметры обратной связи  $k, z$ . Шестая особенность рассматриваемой постановки заключается в том, что мощности и точки сосредоточения внешних воздействий на процесс заданы не точно, поэтому целевой функционал оценивает качество параметров обратной связи в среднем по всевозможным значениям внешних воздействий. Следовательно, можно ожидать, что полученное оптимальное управление будет робастно по отношению к малым изменениям исходных данных задачи. Эта особенность получаемых решений рассматриваемой задачи будет проиллюстрирована далее на тестовой задаче.

## 2. МЕТОД И ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ СТАБИЛИЗАЦИИ

Прежде всего рассмотрим ограничения (1.6), (1.7) с учетом формулы (1.11). Будем предполагать, что область  $\Omega$  имеет простую структуру (прямоугольник, круг, эллипс и т.п.), и оператор проектирования точек пространства  $\mathbb{R}^2$  на эту область имеет конструктивный характер.

Ограничения (1.6) с учетом (1.11) и обозначений

$$g_i^0(\tau_s; y) = \frac{\bar{\vartheta}_i + \vartheta_i}{2} - \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_i}(\tau_s)} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right],$$

$$i = 1, \dots, N_c, \quad s = 1, \dots, N_f,$$

запишем в компактной форме:

$$g_i(\tau_s; y) = |g_i^0(\tau_s; y)| - \frac{\bar{\vartheta}_i - \vartheta_i}{2} \leq 0, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad s = 1, \dots, N_f. \tag{2.1}$$

Для учета ограничений (2.1) в задаче оптимизации параметров обратной связи  $y$  используем метод внешнего штрафа (см. [16], [17]). В подынтегральную функцию целевого функционала (1.14) прибавим штрафное слагаемое

$$\mathcal{F}_r(y) = \int_Q \int_{\Theta} \tilde{I}_r(y; q, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq, \tag{2.2}$$

$$\tilde{I}_r(y; q, \theta) = I(y; q, \theta) + rG(y). \tag{2.3}$$

Здесь использованы обозначения:

$$G(y) = \sum_{s=1}^{N_f} \sum_{i=1}^{N_c} [g_i^+(\tau_s; y)]^2,$$

$$g_i^+(\tau_s; y) = \begin{cases} 0, & g_i(\tau_s; y) \leq 0, \\ g_i(\tau_s; y), & g_i(\tau_s; y) > 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, N_c, \quad s = 1, \dots, N_f.$$

В (2.3) параметр  $r > 0$  является коэффициентом штрафа, причем при численных расчетах необходимо, чтобы  $r$  стремился к  $+\infty$ .

Для учета ограничений (1.7), (1.13) используем операторы проектирования на  $\Omega_c^i, \Omega_o^j, i = 1, \dots, N_c, j = 1, \dots, N_o$ . В целом для численного решения задачи синтеза параметров  $y$  используем метод проекции градиента штрафного функционала. Итерационная процедура для построения минимизирующей последовательности имеет следующий вид (см. [16]):

$$y^{m+1} = \mathcal{P}_{(1.7),(1.13)}[y^m - \alpha_m \text{grad } \mathcal{F}_r(y^m)], \quad m = 0, 1, 2, \dots \tag{2.4}$$

Здесь  $\text{grad } \mathcal{F}_r(y)$  – градиент функционала (2.2), вычисленный в точке  $y \in \mathbb{R}^N$  при заданном коэффициенте штрафа  $r$ ;  $\mathcal{P}_{(1.7),(1.13)}[\cdot]$  – оператор проектирования компонентов вектора  $y$  (более конкретно – его компоненты  $\xi$  и  $\eta$ ) на подобласти  $\Omega_c^i$  и  $\Omega_o^j, i = 1, \dots, N_c, j = 1, \dots, N_o$ ;  $\alpha_m$  – величина шага в направлении спроектированного на ограничения (1.7), (1.13) антиградиента штрафной функции, при котором должно быть выполнено условие  $\mathcal{F}_r(y^{m+1}) \leq \mathcal{F}_r(y^m)$  (см. [16]).

Сформулируем теорему, в которой приведены формулы для компонент градиента функционала  $\mathcal{F}_r(y)$ , необходимых для реализации процедуры (2.4). В ней использована характеристическая функция  $\chi_{[T_f, T_1]}(t)$ , равная 0 при  $t \notin [T_f, T_1]$  и 1 при  $t \in [T_f, T_1]$ .

**Теорема 1.** Для компонент градиента функционала (1.14) по параметрам  $y = (k, z, \xi, \eta) \in \mathbb{R}^N$  линейной обратной связи (1.10), (1.11) имеют место формулы:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r(y)}{\partial k^{ij}} = \int_Q \int_{\Theta} \left\{ - \sum_{s=1}^{N_f} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_i}(\tau_s)} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt + 2rg_i^+(\tau_s; y) \text{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_i}(\tau_s)} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right] + 2\varepsilon_1(k^{ij} - \hat{k}^{ij}) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r(y)}{\partial z^{ij}} = \iiint_{\Theta} \left\{ \sum_{s=1}^{N_t} \left[ \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt + 2rg_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right] k^{ij} + 2\varepsilon_2(z^{ij} - \hat{z}^{ij}) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r(y)}{\partial \xi_{\gamma}^j} = \iiint_{\Theta} \left\{ - \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} \left[ \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt + 2rg_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right] \times k^{ij} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}_{\gamma}} \delta(\hat{x}; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} + 2\varepsilon_3(\xi_{\gamma}^j - \hat{\xi}_{\gamma}^j) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_r(y)}{\partial \eta_{\gamma}^i} = \iiint_{\Theta} \left\{ - \sum_{s=1}^{N_t} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_{\gamma}} \delta(x; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt \times \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right] + 2\varepsilon_4(\eta_{\gamma}^i - \hat{\eta}_{\gamma}^i) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq, \tag{2.8}$$

где  $i = 1, \dots, N_c, j = 1, \dots, N_o, \gamma = 1, 2$ . Функция  $\psi(x, t)$  является решением сопряженной начально-краевой задачи:

$$\psi_n(x, t) = a^2 \mathcal{L} \psi(x, t) + \lambda \psi_t(x, t) - 2u(x, t; y, q, \theta) \chi_{[T_f, T_1]}(t) + \sum_{s=1}^{N_t} \delta(t; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) \sum_{j=1}^{N_o} \delta(x; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \times \sum_{i=1}^{N_c} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(\hat{t}; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} + 2rg_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right], \tag{2.9}$$

$$x \in \Omega, \quad t \in [0, T_1],$$

$$\psi(x, T_1) = 0, \quad \psi_t(x, T_1) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$\psi(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T_1]. \tag{2.11}$$

**Доказательство.** Учитывая, что для  $v = 1, \dots, L$  значения возмущений  $q^v$  и места точек  $\theta^v$  воздействия внешних источников не зависимы как между собой, так и не зависят от синтезируемых параметров  $y$ , для градиента функционала (1.14) будет иметь место

$$\operatorname{grad}_y \mathcal{F}_r(y) = \operatorname{grad}_y \int_{\Theta} \int_Q \tilde{I}_r(y; q, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq = \int_{\Theta} \int_Q \operatorname{grad}_y \tilde{I}_r(y; q, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq. \tag{2.12}$$

В связи с этим, предполагая заданными значения внешних возмущений  $q^v$  и точек их приложения  $\theta^v, v = 1, \dots, L$ , достаточно получить формулы для компонент

$$\operatorname{grad}_y \tilde{I}_r(y; q, \theta) = \left( \frac{\partial \tilde{I}_r(y; q, \theta)}{\partial k}, \frac{\partial \tilde{I}_r(y; q, \theta)}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{I}_r(y; q, \theta)}{\partial \xi}, \frac{\partial \tilde{I}_r(y; q, \theta)}{\partial \eta} \right).$$

В дифференциальном уравнении (1.12) оптимизируемые параметры  $y$  содержатся только в третьем слагаемом правой части. Обозначим это слагаемое через

$$V(x, t; y, \tau) = \sum_{s=1}^{N_t} \delta(t; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) \sum_{i=1}^{N_c} \delta(x; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right], \tag{2.13}$$

и будем считать его агрегированным управлением.



Уравнение (1.12) запишем в виде

$$u_{tt}(x, t) = a^2 \mathcal{L}u(x, t) - \lambda u_t(x, t) + V(x, t; y, \tau), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_1], \tag{2.14}$$

Для получения искомых формул для компонент градиента целевого функционала используем метод приращения функционала Лагранжа рассматриваемой задачи, получаемого за счет приращения независимых параметров  $y$ . Составим функционал Лагранжа. Для этого перенесем правую часть уравнения (2.14) влево и умножим обе части уравнения на пока произвольную функцию  $\psi(x, t)$ , условия на которую будут наложены далее в ходе доказательства. Проинтегрируем полученное выражение, равное нулю, по  $x \in \Omega, t \in [0, T_1]$  и прибавим к функционалу (2.3) левую часть полученного соотношения. Получим

$$\begin{aligned} \tilde{I}_r(y; q, \theta) = & I(y; q, \theta) + rG(y) + \int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) (u_{tt}(x, t) - a^2 \mathcal{L}u(x, t) + \lambda u_t(x, t)) dx dt - \\ & - \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt \times \\ & \times \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Ясно, что изменение значений параметров  $y$  прежде всего приведет к изменению значения агрегированного управления  $V(x, t; y, \tau)$ .

Пусть управление  $V(x, t; y, \tau)$  получило приращение  $\Delta V(x, t; y, \tau)$  за счет изменения вектора синтезируемых параметров  $y = (k, z, \xi, \eta)$  на величину  $\Delta y = (\Delta k, \Delta z, \Delta \xi, \Delta \eta)$ . Обозначим через  $\Delta_k V(x, t; y, \tau), \Delta_z V(x, t; y, \tau), \Delta_\xi V(x, t; y, \tau), \Delta_\eta V(x, t; y, \tau)$  приращения управляющего слагаемого  $V(x, t; y, \tau)$ , получаемые за счет приращения  $\Delta k, \Delta z, \Delta \xi, \Delta \eta$  соответствующих компонент вектора  $y$ . В силу взаимной независимости компонент  $y$  приращение  $\Delta V(x, t; y, \tau)$  определяется в виде

$$\begin{aligned} \Delta V(x, t; y, \tau) = & V(x, t; y + \Delta y, \tau) - V(x, t; y, \tau) = \\ = & \Delta_k V(x, t; y, \tau) + \Delta_z V(x, t; y, \tau) + \Delta_\xi V(x, t; y, \tau) + \Delta_\eta V(x, t; y, \tau). \end{aligned}$$

Аналогично приращение функционала  $\tilde{I}_r(y; q, \theta)$ , соответствующее приращению  $\Delta y = (\Delta k, \Delta z, \Delta \xi, \Delta \eta)$ , определится формулой

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{I}_r(y; q, \theta) = & \tilde{I}_r(y + \Delta y; q, \theta) - \tilde{I}_r(y; q, \theta) = \\ = & \Delta_k \tilde{I}_r(y; q, \theta) + \Delta_z \tilde{I}_r(y; q, \theta) + \Delta_\xi \tilde{I}_r(y; q, \theta) + \Delta_\eta \tilde{I}_r(y; q, \theta), \end{aligned}$$

где  $\Delta_k \tilde{I}_r(y; q, \theta), \Delta_z \tilde{I}_r(y; q, \theta), \Delta_\xi \tilde{I}_r(y; q, \theta), \Delta_\eta \tilde{I}_r(y; q, \theta)$  – приращения функционала, полученные за счет приращений соответствующих компонент вектора  $y$ .

Тогда приращение решения начально-краевой задачи (1.12), (1.2), (1.3) имеет вид, которое обозначим

$$\Delta u(x, t) = \Delta u(x, t; y) = u(x, t; y + \Delta y) - u(x, t; y)$$

и будет являться решением начально-краевой задачи

$$\Delta u_{tt}(x, t) = a^2 \mathcal{L} \Delta u(x, t) - \lambda \Delta u_t(x, t) + \Delta V(x, t; y, \tau), \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_1], \tag{2.16}$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad \Delta u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.17}$$

$$\Delta u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in [0, T_1]. \tag{2.18}$$

Получим формулу  $\Delta \tilde{I}_r(y, q, \theta; y)$  для приращения функционала (2.15), соответствующего приращению агрегированного управления  $\Delta V(x, t; y, \tau)$ , которое с точностью малых второго порядка записывается в виде

$$\Delta \tilde{I}_r(y, q, \theta) = \int_{T_f}^{T_1} \iint_{\Omega} \left[ \frac{\partial \tilde{I}_r(y, q, \theta)}{\partial k} \Delta k + \frac{\partial \tilde{I}_r(y, q, \theta)}{\partial z} \Delta z + \frac{\partial \tilde{I}_r(y, q, \theta)}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial \tilde{I}_r(y, q, \theta)}{\partial \eta} \Delta \eta \right] dxdt + o(\|\Delta k\|_{\mathbb{R}^{N_c N_o}}) + o(\|\Delta z\|_{\mathbb{R}^{N_c N_o}}) + o(\|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{2N_r N_o}}) + o(\|\Delta \eta\|_{\mathbb{R}^{2N_r N_c}}).$$

Для этого используем известные выкладки (интегрирование по частям, группировку), аналогичные приведенным, например, в работе [16]. В результате получим

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{I}_r(y, q, \theta) &= 2 \int_{T_f}^{T_1} \iint_{\Omega} \mu(x) u(x, t) \Delta u(x, t) dxdt + \\ &+ \int_0^{T_1} \iint_{\Omega} [\psi_{tt}(x, t) - a^2 \mathcal{L}\psi(x, t) - \lambda \psi_t(x, t)] \Delta u(x, t) dxdt + \iint_{\Omega} \psi(x, T_1) \Delta u_t(x, T_1) dx + \\ &+ \iint_{\Omega} (\psi_t(x, T_1) - \lambda \psi(x, T_1)) \Delta u(x, T_1) dx - a^2 \int_0^{T_1} \iint_{\Gamma} \psi(x, t) \frac{\partial \Delta u(x, t)}{\partial n} dxdt + \\ &+ a^2 \int_0^{T_1} \iint_{\Gamma} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial n} \Delta u(x, t) dxdt - \iint_{\Omega} \psi(x, 0) \Delta u_t(x, 0) dx + \iint_{\Omega} (\psi_t(x, 0) - \lambda \psi(x, 0)) \Delta u(x, 0) dx - \\ &- \int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) \Delta V(x, t; y, \tau) dxdt + r \Delta G(y) + 2\varepsilon_1 \langle k - \hat{k}, \Delta k \rangle + 2\varepsilon_2 \langle z - \hat{z}, \Delta z \rangle + \\ &+ 2\varepsilon_3 \langle \xi - \hat{\xi}, \Delta \xi \rangle + 2\varepsilon_4 \langle \eta - \hat{\eta}, \Delta \eta \rangle + o(\|\Delta u(x, t)\|_{L_2(\Omega \times [0, T_1])}) + o(\|\Delta y\|_{\mathbb{R}^N}). \end{aligned} \tag{2.19}$$

В силу произвольности функции  $\psi(x, t)$  потребуем от нее, чтобы она являлась решением сопряженной начально-краевой задачи (2.9)–(2.11). Тогда в силу (2.16)–(2.18) из (2.19) будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{I}_r(y, q, \theta) &= - \int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) \Delta V(x, t; y, \tau) dxdt + r \Delta G(y) + 2\varepsilon_1 \langle k - \hat{k}, \Delta k \rangle + 2\varepsilon_2 \langle z - \hat{z}, \Delta z \rangle + \\ &+ 2\varepsilon_3 \langle \xi - \hat{\xi}, \Delta \xi \rangle + 2\varepsilon_4 \langle \eta - \hat{\eta}, \Delta \eta \rangle + o(\|\Delta u(x, t)\|_{L_2(\Omega \times [0, T_1])}) + o(\|\Delta y\|_{\mathbb{R}^N}). \end{aligned}$$

Ясно, что:

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) \Delta V(x, t; y, \tau) dxdt = \\ &= \int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) (\Delta_k V(x, t; y, \tau), \Delta_z V(x, t; y, \tau), \Delta_{\xi} V(x, t; y, \tau), \Delta_{\eta} V(x, t; y, \tau)) dxdt. \end{aligned}$$

С учетом обозначения (2.13) имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} &\int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) \Delta_k V(x, t; y, \tau) dxdt = \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dxdt \times \\ &\times \sum_{j=1}^{N_o} \left[ \int_{\mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} (u(\hat{x}, \hat{t}) \Delta k^{ij} + \Delta_{k^{ij}} u(\hat{x}, \hat{t}) k^{ij}) \delta(\hat{x}; \mathbb{C}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{C}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \Delta k^{ij} \right] + o(\|\Delta k\|_{\mathbb{R}^{N_c N_o}}), \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) \Delta_z V(x, t; y, \tau) dx dt = - \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_o} \left[ k^{ij} \Delta z^{ij} + \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} \Delta_{z^{ij}} u(\hat{x}, \hat{t}) k^{ij} \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} \right] + o(\|\Delta z\|_{\mathbb{R}^{N_c N_o}}), \tag{2.21}$$

$$\int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) \Delta_{\xi} V(x, t; y, \tau) dx dt = - \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} (\text{grad}_x u(\hat{x}, \hat{t}), \Delta \xi^j + \Delta_{\xi^j} u(\hat{x}, \hat{t})) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} \right] + o(\|\Delta \xi\|_{\mathbb{R}^{2N_o}}), \tag{2.22}$$

$$\int_0^{T_1} \iint_{\Omega} \psi(x, t) \Delta_{\eta} V(x, t; y, \tau) dx dt = - \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \langle \text{grad}_x \psi(x, t), \Delta \eta^i \rangle \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx \times$$

$$\times \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} (u(\hat{x}, \hat{t}) + \Delta_{\eta^i} u(\hat{x}, \hat{t})) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right] + o(\|\Delta \eta\|_{\mathbb{R}^{2N_c}}). \tag{2.23}$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение двумерных векторов.

Займемся приращением штрафного члена

$$\Delta G(y) = G(y + \Delta y) - G(y) = -2 \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} g_i^+(\tau_s; y) \text{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \times$$

$$\times \left( \sum_{j=1}^{N_o} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right] \Delta k^{ij} - \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \Delta z^{ij} + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} \langle \text{grad}_x u(\hat{x}, \hat{t}), \Delta \xi^j \rangle \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} \right] +$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} \Delta_y u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} \right) + o(\|\Delta y\|_{\mathbb{R}^N}).$$

Отсюда, исходя из того, что компоненты градиента функционала определяются линейной частью его приращения относительно каждой из компонент и из формул (2.20)–(2.23), следует справедливость формул (2.5)–(2.8).

Аналогично можно получить формулы для компонент градиента (1.20) в случае, если возможные значения мощностей и мест размещения точечных источников внешних возмущений заданы дискретными множествами (1.16), (1.17).

**Теорема 2.** Компоненты градиента функционала (1.20) в случае, когда возможные значения мощностей и мест размещения локальных воздействий в начальный момент получают свои значения в дискретных множествах (1.16), (1.17) с вероятностями (1.18), (1.19) определяются следующими формулами:

$$\frac{\partial \mathcal{J}(y)}{\partial k^{ij}} = \sum_{i_1=1}^{N_q^1} \dots \sum_{i_L=1}^{N_q^L} \sum_{j_1=1}^{N_{\theta}^1} \dots \sum_{j_L=1}^{N_{\theta}^L} \left\{ - \sum_{s=1}^{N_t} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt + \right. \right.$$

$$+ 2r g_i^+(\tau_s; y) \text{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \left. \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right] + 2\varepsilon_1 (k^{ij} - \hat{k}^{ij}) \right\} \times$$

$$\times p_{\Theta^1}^{i_1} \dots p_{\Theta^L}^{i_L} \cdot p_{\Theta^1}^{j_1} \dots p_{\Theta^L}^{j_L},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}(y)}{\partial z^{ij}} &= \sum_{i_1=1}^{N_q^1} \dots \sum_{i_L=1}^{N_q^L} \sum_{j_1=1}^{N_\theta^1} \dots \sum_{j_L=1}^{N_\theta^L} \left\{ \sum_{s=1}^{N_t} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2rg_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right] k^{ij} + 2\varepsilon_2(z^{ij} - \hat{z}^{ij}) \right\} p_{Q^1}^{i_1} \dots p_{Q^L}^{i_L} \cdot p_{\Theta^1}^{j_1} \dots p_{\Theta^L}^{j_L}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}(y)}{\partial \xi_\gamma^j} &= \sum_{i_1=1}^{N_q^1} \dots \sum_{i_L=1}^{N_q^L} \sum_{j_1=1}^{N_\theta^1} \dots \sum_{j_L=1}^{N_\theta^L} \left\{ - \sum_{s=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_c} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \psi(x, t) \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2rg_i^+(\tau_s; y) \operatorname{sgn}(g_i^0(\tau_s; y)) \right] k^{ij} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} \frac{\partial u(\hat{x}, \hat{t})}{\partial \hat{x}_\gamma} \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} + 2\varepsilon_3(\xi_\gamma^j - \hat{\xi}_\gamma^j) \right\} \times \\ &\quad \times p_{Q^1}^{i_1} \dots p_{Q^L}^{i_L} \cdot p_{\Theta^1}^{j_1} \dots p_{\Theta^L}^{j_L}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}(y)}{\partial \eta_\gamma^i} &= \sum_{i_1=1}^{N_q^1} \dots \sum_{i_L=1}^{N_q^L} \sum_{j_1=1}^{N_\theta^1} \dots \sum_{j_L=1}^{N_\theta^L} \left\{ - \sum_{s=1}^{N_t} \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x_\gamma} \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\eta^i)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{j=1}^{N_o} k^{ij} \left[ \int_{\mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)} u(\hat{x}, \hat{t}) \delta(\hat{x}; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(\hat{t}; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) d\hat{x} d\hat{t} - z^{ij} \right] + 2\varepsilon_4(\eta_\gamma^i - \hat{\eta}_\gamma^i) \right\} p_{Q^1}^{i_1} \dots p_{Q^L}^{i_L} \cdot p_{\Theta^1}^{j_1} \dots p_{\Theta^L}^{j_L}, \end{aligned}$$

где  $i = 1, \dots, N_c, j = 1, \dots, N_o, \gamma = 1, 2, a$   $\psi(x, t)$  является решением начально-краевой задачи (2.9)–(2.11).

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Приведем результаты численных экспериментов, полученные при решении рассматриваемой задачи (1.1)–(1.4) при следующих значениях данных, участвующих в постановке

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2\}, \quad T_f = 3, \quad \Delta T = 0.3,$$

$$a = 1, \quad \lambda = 0.001, \quad N_c = 2, \quad N_o = 3, \quad \vartheta_i = -0.05, \quad \bar{\vartheta}_i = 0.05, \quad i = 1, \dots, N_c, \quad L = 2,$$

$$N_t = 10, \quad \tau_s = 0.3s, \quad s = 1, \dots, N_t,$$

$$\Omega_o^1 = \{x \in \Omega: 0.12 \leq x_1 \leq 0.32, 0.28 \leq x_2 \leq 0.48\},$$

$$\Omega_o^2 = \{x \in \Omega: 0.71 \leq x_1 \leq 0.89, 0.05 \leq x_2 \leq 0.22\},$$

$$\Omega_o^3 = \{x \in \Omega: 0.44 \leq x_1 \leq 0.64, 0.45 \leq x_2 \leq 0.63\},$$

$$\Omega_c^1 = \{x \in \Omega: 0.58 \leq x_1 \leq 0.78, 0.25 \leq x_2 \leq 0.42\},$$

$$\Omega_c^2 = \{x \in \Omega: 0.19 \leq x_1 \leq 0.39, 0.59 \leq x_2 \leq 0.78\},$$

$$q_1 \in Q^1 = \{0.050; 0.051; 0.052; 0.053\},$$

$$q_2 \in Q^2 = \{0.049; 0.050; 0.051; 0.052\},$$

$$\theta^1 \in \Theta^1 = \{x \in \Omega: 0.22 \leq x_1 \leq 0.34, 0.20 \leq x_2 \leq 0.38\},$$

$$\theta^2 \in \Theta^2 = \{x \in \Omega: 0.65 \leq x_1 \leq 0.78, 0.68 \leq x_2 \leq 0.81\}.$$

Значения мощностей внешних воздействий имеют равномерные распределения в  $Q^1$  и  $Q^2$ , а их возможные точки воздействия равномерно распределены в заданных допустимых областях  $\Theta^1$

и  $\Theta^2$ . Множества возможных точек размещения  $\Theta^v$  и значений мощностей внешних воздействий  $Q^v$  аппроксимируем следующими дискретными множествами точек:

$$\Theta^1 = \{(0.26; 0.28), (0.27; 0.29), (0.25; 0.25), (0.32; 0.35)\},$$

$$\Theta^2 = \{(0.75; 0.75), (0.70; 0.78), (0.75; 0.79), (0.76; 0.80)\}.$$

Каждое из дискретных множеств состоит из четырех элементов, а вероятности получения этих значений, учитывая равномерность вероятности для непрерывных множеств, равны

$$p_{Q^1}^\gamma = p_{Q^2}^\gamma = 0.25, \quad \gamma = 1, \dots, 4,$$

$$p_{\Theta^1}^\gamma = p_{\Theta^2}^\gamma = 0.25, \quad \gamma = 1, \dots, 4.$$

В этом случае вместо функционала (2.2), учитывая (1.20), будет использован следующий функционал:

$$\mathcal{F}_r(y) = \frac{1}{256} \sum_{i=1}^4 \sum_{l_2=1}^4 \sum_{j_1=1}^4 \sum_{j_2=1}^4 \tilde{I}_r(y; q^i, q^{j_2}, \theta^i, \theta^{j_2}).$$

Оптимизируемый вектор параметров управления обратной связью при выше выбранных параметрах задачи имеет размерность  $N = 22$ . Множества возможных точек размещений стабилизаторов  $\Omega_c^i$  и датчиков  $\Omega_o^j$ , как это принято в практических приложениях, находятся внутри мембраны, т.е. они не могут размещаться на границе  $\Gamma$ .

Опишем общую схему реализации итерационной процедуры (2.4) для минимизации функционала (2.2) с применением методов штрафной функции и проекции градиента.

Учитывая, что допустимые области параметров  $\xi$ ,  $\eta$  являются прямоугольными, то операторы проектирования на эти области очевидны и имеют простой вид (см. [16]).

При каждом значении коэффициента штрафа  $r$  проводилась регуляризация функционала с применением известных схем (см. [16], [17]). При этом параметры регуляризации изменялись трижды, а именно при начальном значении  $\varepsilon = 0.1$  оно уменьшалось в 5 раз, а в качестве  $\hat{y}$  назначалось полученное оптимальное значение  $y$  на предыдущем шаге. Начальное значение коэффициента штрафа было назначено равным 5, которое на каждом последующем этапе увеличивалось в 5 раз. Эти этапы проводились до тех пор, пока на двух последовательных этапах значение основного функционала задачи (1.14), (1.15) отличалось более, чем на 0.005.

Для решения двумерных прямой и сопряженной начально-краевых задач (1.12), (1.2), (1.3) и (2.9)–(2.11) использовался метод переменных направлений (см. [18]), приводящий к решению одномерных нагруженных задач. Для решения нагруженных начально-краевых задач использовалась неявная конечно-разностная схема аппроксимации, исследованная в работах [12], [15], [20]–[22]. Для решения конечно-разностно аппроксимированных начально-краевых задач использовались численные методы, предложенные в работах [13]–[15]. Шаги для аппроксимации по пространственной переменной выбирались равными  $h_{x_1} = h_{x_2} = 0.01$ , по временной переменной  $h_t = 0.005$ .

Функция  $\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(0))$  была задана в виде следующей “гауссоподобной” всюду гладкой функции (см. [1], [19]):

$$\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(0)) = \begin{cases} 0, & |x_1| > \sigma_{x_1} \quad \text{или} \quad |x_2| > \sigma_{x_2}, \\ \prod_{i=1}^2 \frac{1}{2\sigma_{x_i}} \left[ 1 + \sin \left( \frac{2x + \sigma_{x_i}}{2\sigma_{x_i}} \pi \right) \right], & |x_1| \leq \sigma_{x_1} \quad \text{и} \quad |x_2| \leq \sigma_{x_2}. \end{cases}$$

Таким образом,  $\varepsilon_x$ -окрестностью точки начала координат является квадрат со стороной, равной  $\sigma_{x_1}$  и  $\sigma_{x_2}$ . В численных расчетах  $\sigma_{x_1}$  и  $\sigma_{x_2}$  выбирались равными  $3h_{x_1}$  и  $3h_{x_2}$ , т.е.  $\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(0))$  принимает отличные от нуля значения в 49 ячейках сеточной области, соседних в данном случае с точкой  $(0; 0)$ . Такой выбор вида функции  $\delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(0))$  обеспечивает определенную гладкость функционала  $\mathcal{F}_r(y)$  по оптимизируемым координатам  $\xi^j$ ,  $\eta^i$ ,  $i = 1, \dots, N_c$ ,  $j = 1, \dots, N_o$  (см. [19]).

**Таблица 1.** Полученные решения тестовой задачи из двух начальных точек  $y_1^0$  и  $y_2^0$

	№	K			Z			ξ	η	J(y)
$y_1^0$	0	-0.5412	-0.8412	0.5745	-0.0084	-0.0075	0.0086	(0.1418; 0.2914)	(0.7608; 0.2631)	0.994966
		-0.8259	0.8482	0.3751	-0.0035	0.0022	0.0031	(0.8724; 0.1008)	(0.3725; 0.6045)	
	3	0.2989	0.3821	-0.2567	-0.0231	-0.0332	0.0268	(0.1378; 0.3858)	(0.7256; 0.2500)	
		0.5525	0.1080	-0.3657	-0.3171	0.1315	0.1779	(0.8519; 0.0873)	(0.3323; 0.7800)	
	6	0.2964	0.3315	-0.1984	0.0047	0.0105	-0.0050	(0.2180; 0.3882)	(0.6709; 0.3036)	
		0.2865	0.4418	-0.2215	0.0074	0.0065	-0.0050	(0.7591; 0.1923)	(0.2840; 0.6804)	
10	0.3068	0.3486	-0.2102	0.0028	0.0075	-0.0026	(0.2059; 0.3967)	(0.6734; 0.2997)		
	0.3355	0.3874	-0.2490	0.0030	0.0065	-0.0027	(0.7639; 0.1825)	(0.2968; 0.6893)		
$y_2^0$	0	-0.0412	-0.4182	0.7455	0.4008	0.2805	0.3006	(0.3105; 0.2914)	(0.7524; 0.4135)	2.158796
		-0.2589	-0.7521	0.3848	0.8128	-0.2070	0.3001	(0.7248; 0.2153)	(0.2015; 0.7549)	
	2	-0.4801	-0.2316	0.3194	0.0794	0.0851	0.0285	(0.1200; 0.2800)	(0.7800; 0.4200)	
		-0.5411	-0.1267	0.2196	0.0062	-0.0294	0.0475	(0.7429; 0.0500)	(0.3900; 0.7800)	
	4	-0.5252	-0.1788	0.2785	-0.0028	0.0104	0.0269	(0.3200; 0.2889)	(0.5988; 0.3994)	
		-0.4903	-0.1925	0.3133	0.0412	-0.0273	0.0442	(0.8317; 0.0793)	(0.3777; 0.6342)	
	6	-0.5259	-0.1830	0.2802	0.0083	0.0167	0.0217	(0.3388; 0.2948)	(0.6012; 0.3929)	
		-0.4922	-0.1949	0.3130	0.0415	-0.0264	0.0457	(0.8400; 0.0840)	(0.3740; 0.6324)	

Окрестность момента времени  $\tilde{\tau}$  определялась временным промежутком  $O_{\epsilon_r}(\tilde{\tau}) = [\tilde{\tau} - 2h_r, \tilde{\tau} + h_r]$ , а функция  $\delta(t; O_{\epsilon_r}(\tilde{\tau}))$  задавалась в виде непрерывной несимметричной треугольноподобной функции

$$\delta(t; O_{\epsilon_r}(\tilde{\tau})) = \begin{cases} 0, & t \notin O_{\epsilon_r}(\tilde{\tau}), \\ (t + (2h_r - \tilde{\tau})) / 3h_r^2, & t \in [\tilde{\tau} - 2h_r, \tilde{\tau}], \\ (-2t + 2(\tilde{\tau} + h_r)) / 3h_r^2, & t \in [\tilde{\tau}, \tilde{\tau} + h_r]. \end{cases}$$

Легко проверить, что

$$\int_0^{T_f} \delta(t; O_{\epsilon_r}(\tilde{\tau})) dt = \int_{O_{\epsilon_r}(\tilde{\tau})} \delta(t; O_{\epsilon_r}(\tilde{\tau})) dt = 1.$$

В табл. 1, 2 приведены результаты расчетов, в которых в качестве начального приближения для итерационного процесса использовались два значения:  $y_1^0, y_2^0$ . В табл. 1 значения матриц  $k$  и  $z$  приведены в следующем порядке:  $(k^{11}, \dots, k^{1N_o}, \dots, k^{N_c1}, \dots, k^{N_cN_o}), (z, \dots, z^{1N_o}, \dots, z^{N_c1}, \dots, z^{N_cN_o})$ .

В табл. 1 приведены результаты некоторых итераций решения задачи, полученные с использованием приведенных двух начальных приближений.

Видно, что, как указывалось выше, в связи с возможной многоэкстремальностью целевого функционала, результаты оптимизации, полученные из различных начальных точек, различаются по аргументам, хотя по функционалу различие не существенно. Здесь необходимо также

**Таблица 2.** Решения тестовой задачи, полученные из начальной точки  $y_1^0$  при величинах погрешности  $\zeta$  в замерах в 1%, 2%, 5%

$y_1$	$K$			$Z$			$\xi$	$\eta$	$\mathcal{F}(y)$
1%	0.3066	0.3487	-0.2103	0.0028	0.0074	-0.0025	(0.2051; 0.3965)	(0.6732; 0.2997)	0.000091
	0.3367	0.3860	-0.2496	0.0015	0.0082	-0.0020	(0.7631; 0.1816)	(0.2974; 0.6895)	
2%	0.3065	0.3482	-0.2101	0.0030	0.0077	-0.0027	(0.2062; 0.3973)	(0.6738; 0.3000)	0.000092
	0.3352	0.3877	-0.2488	0.0020	0.0078	-0.0023	(0.7636; 0.1819)	(0.2962; 0.6889)	
5%	0.3068	0.3485	-0.2104	0.0031	0.0072	-0.0028	(0.2058; 0.3973)	(0.6732; 0.2996)	0.000095
	0.3357	0.3871	-0.2496	0.0028	0.0070	-0.0026	(0.7637; 0.1826)	(0.2964; 0.6890)	

учесть (как показали другие специально проведенные численные эксперименты), что функционал задачи имеет сильную овражную структуру.

Были проведены компьютерные эксперименты по наблюдению за процессом гашения колебаний при оптимальных значениях синтезированных параметров обратной связи при предположении, что замеры проводятся с погрешностями (помехами), а именно:

$$\tilde{u}_s^j = \int_{\mathbb{O}_\varepsilon(\tau_s)} \iint_{\mathbb{O}_\varepsilon(\xi^j)} u(x, t) [1 + \chi^j(t)] \delta(x; \mathbb{O}_{\varepsilon_x}(\xi^j)) \delta(t; \mathbb{O}_{\varepsilon_t}(\tau_s)) dx dt, \quad j = 1, \dots, N_o, \quad s = 1, \dots, N_l.$$

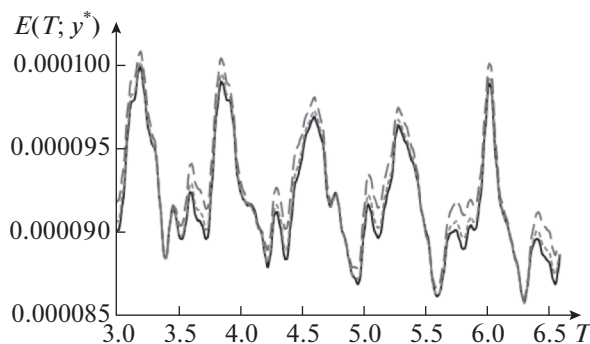
Здесь  $\chi^j(t)$  при каждом  $t$  есть случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[-\zeta; \zeta]$ . В проведенных экспериментах значения  $\zeta$  выбирались равными 0.01; 0.02; 0.05, что соответствовало погрешности замеров в 1%, 2% и 5% от значения измеряемой величины.

В табл. 2 приведены результаты, полученные на шести итерациях решения синтеза параметров обратной связи при наличии погрешности в проводимых замерах. Как видно из сравнения полученных значений параметров обратной связи, ориентировочно они различаются пропорционально погрешностям проводимых замеров.

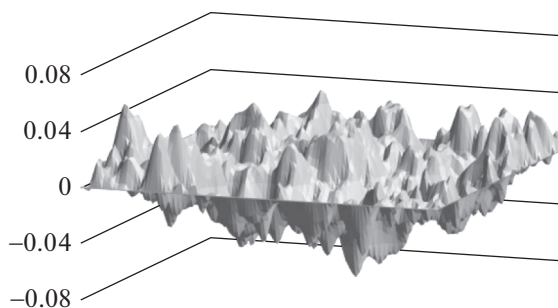
Важным показателем качества управления процессом гашения при параметрах обратной связи  $y$  является функция

$$E(T; y^*) = \int_Q \iiint_{\Theta} \left[ \int_T^{T+\Delta T} \iint_{\Omega} \mu(x) [u(x, t; y^*, q, \theta)]^2 dx dt \right] \rho_\Theta(\theta) \rho_Q(q) d\theta dq, \quad T \geq 0,$$

численно характеризующая результат управления процессом в среднем при всех возможных значениях внешних воздействий. На фиг. 1 приведены графики функции  $E(T; y^*)$ , полученные при



**Фиг. 1.** Графики функции  $E(T; y^*)$  при разных уровнях помех  $\zeta$  (— — 0%, - - - - 2%, - - - - 5%).



Фиг. 2. График функции  $u(x, t)$  при  $t = 3$ .

оптимальных параметрах обратной связи  $y^*$  и  $T_f = 3$  при уровнях погрешности в замерах, равных 0% (без погрешности), 1%, 2% и 5%. Из этих графиков видно, что качество управления процессом стабилизации соответствует величине погрешности проводимых замеров состояния процесса. На фиг. 2 приведен график функции  $u(x, t) = u(x, t; y^*, q, \theta)$ ,  $x \in \Omega$ , определяющий состояние мембраны на момент времени окончания процесса управления при  $t = T_f = 3$  и  $q_1 = 0.52$ ,  $q_2 = 0.49$ ,  $\theta_1 = (0.25, 0.25)$ ,  $\theta_2 = (0.75, 0.75)$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен подход к оптимальному синтезу сосредоточенных управляющих воздействий в системах с распределенными параметрами. В качестве примера рассмотрена задача синтеза управления сосредоточенными стабилизаторами при гашении колебаний мембраны. Режимы функционирования стабилизаторов определяются линейной зависимостью от замеров состояния мембраны в окрестностях точек замера. Оптимизируемыми в задаче являются следующие: 1) параметры линейной обратной связи, определяющей режимы работы стабилизаторов; 2) места размещения стабилизаторов; 3) места размещения точек замера состояния мембраны.

Рассматриваемая задача приведена к параметрической задаче оптимального управления системой с распределенными параметрами. Получены формулы градиента функционала задачи в пространстве синтезируемых параметров. Формулы позволили для численного решения задачи синтеза использовать эффективные методы оптимизации первого порядка.

В работе приводятся результаты численных экспериментов и проведен анализ влияния погрешностей измерения на процесс стабилизации мембраны.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
2. Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М. Об одном подходе к синтезу управления процессами с распределенными параметрами // Автоматика и телемехан. 2012. № 9. С. 3–19.
3. Ray W.H. Advanced Process Control. McGraw-Hill Book Company, 2002. 368 p.
4. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 303 с.
5. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
6. Красовский А.А. (ред.). Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987. 712 с.
7. Антипин А.С., Хорошилова Е.В. О синтезе обратной связи для задачи терминального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 12. С. 1973–1991.
8. Егоров А.И. Основы теории управления. М.: Физматлит, 2004. 504 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.
10. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 372 с.
11. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. М.: Наука, 2012. 232 с.
12. Алиханов А.А., Березгов А.М., Шхануков-Лафшиев М.Х. Краевые задачи для некоторых классов нагруженных дифференциальных уравнений и разностные методы их численной реализации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 9. С. 1619–1628.



13. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 7. С. 1096–1109.
14. *Aida-zade K.R.* An approach for solving nonlinearly loaded problems for linear ordinary differential equations // Proceeding of the Institute Mathematics and Mechanics NAS Azerbaijan. 2018. V. 4. N 2. P. 338–350.
15. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Конечноразностные методы решения нагруженных параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 56. № 1. 2016. С. 99–112.
16. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
17. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.
18. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
19. *Айда-заде К.Р., Багиров А.Г.* О задаче размещения нефтяных скважин и управления их дебитами // АИТ. 2006. № 1. С. 52–62.
20. *Айда-заде К.Р., Абдуллаев В.М.* Оптимизация размещения точек контроля при синтезе управления процессом нагрева // Автоматика и телемехан. № 9. 2017. С. 49–66.
21. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Оптимизация мест нагружения для стационарных систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. Т. 57. № 4. 2017. С. 633–644.
22. *Абдуллаев В.М., Айда-заде К.Р.* Численное решение задачи определения количества и мест замеров состояния при управлении процессом нагрева с обратной связью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 1. С. 83–94.