ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 7, с. 1201–1223

УДК 517.927

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С МАТРИЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ[1)]

© 2020 г. Д. М. Поляков

362027 Владикавказ, ул. Маркуса, 22, Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Россия

e-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

Поступила в редакцию 24.01.2019 г.
Переработанный вариант 02.12.2019 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Рассматривается дифференциальный оператор четвертого порядка с матричными коэффициентами, область определения которого задается квазипериодическими краевыми условиями. Для этого оператора приводится асимптотика среднего арифметического собственных значений. Кроме того, в различных частных случаях выписывается асимптотика собственных значений. Отдельно изучаются спектральные характеристики в случае периодических и антипериодических краевых условий. Полученные результаты являются более точными, чем известные ранее. Библ. 33.

Ключевые слова: дифференциальный оператор четвертого порядка, асимптотика собственных значений, матричные коэффициенты, среднее арифметическое собственных значений.

DOI: 10.31857/S0044466920050130

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2[0,1]$ измеримых и интегрируемых с квадратом на отрезке $[0,1]$ комплексных функций. Через $L_2^k[0,1] = L_2([0,1],\mathbb{C}^k)$ обозначим пространство $L_2^k[0,1] = \underbrace{L_2[0,1]\times\ldots\times L_2[0,1]}_{k\text{ раз}}$ со скалярным произведением

$$(f,g) = \sum_{j=1}^{k}(f_j,g_j),\quad f = (f_1,f_2,\ldots,f_k)\in L_2^k[0,1],\quad g = (g_1,g_2,\ldots,g_k)\in L_2^k[0,1],$$

где $(f_j,g_j) = \int_0^1 f_j(t)\overline{g_j(t)}dt$. Таким образом, норма, порождаемая этим скалярным произведением, задается следующим образом:

$$\|f\|_{L_2} = \left(\sum_{j=1}^{k}\int_0^1 |f_j(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Целью настоящей работы является изучение спектральных характеристик оператора четвертого порядка $L_\theta : D(L_\theta)\subset L_2^k[0,1]\to L_2^k[0,1]$, который определяется дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - \mathfrak{A}(t)y'' - \mathfrak{B}(t)y,$$

где $\mathfrak{A}(t) = (a_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ и $\mathfrak{B}(t) = (b_{pj}(t))_{p,j=1}^k$ – матрицы размера $k\times k$, причем элементы этих матриц a_{pj} и b_{pj} принадлежат пространству $L_2[0,1]$.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых-кандидатов наук (МК-1056.2018.1, соглашения 075-02-2018-433 и 075-15-2019-848).

Через $\mathfrak{A}_0$ обозначим матрицу $\mathfrak{A}_0 = (a_{0,pj})$, где $a_{0,pj} = \int_0^1 a_{pj}(t)dt$, $p, j = 1, \ldots, k$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что матрица $\mathfrak{A}_0$ подобна диагональной матрице, т.е. является матрицей простой структуры (см. [1, Гл. III, § 8]). Область определения $D(L_\theta) = \left\{y \in W_2^4([0,1], \mathbb{C}^k)\right\} \subset L_2^k[0,1]$ оператора L_θ задается квазипериодическими краевыми условиями вида

$$y^{(j)}(1) = e^{i\pi\theta} y^{(j)}(0), \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

где $\theta \in (0, 2)$, $\theta \neq 1$.

Перейдем к описанию истории исследования введенного класса операторов. Изучение асимптотических формул собственных значений для дифференциальных операторов высших порядков с матричными коэффициентами и интегрируемыми элементами, по-видимому, началось со статьи Д. Биркгофа и Р. Лангера [2]. В [2] были выделены регулярные краевые условия и доказаны теоремы о разложении функций из области определения регулярных операторов в ряды по их корневым функциям. Эти результаты в модифицированном виде представлены в книге М.А. Наймарка [3, Гл. III]. В классе регулярных краевых условий выделяется подкласс усиленно регулярных условий. В скалярном случае Н. Данфорд [4] показал, что корневые функции усиленно регулярного обыкновенного дифференциального оператора образуют безусловный базис. А.А. Шкаликов в [5] показал, что для регулярных операторов можно гарантировать только безусловную базисность со скобками. Причем в скобки нужно объединять только члены, отвечающие асимптотически сближающимся собственным значениям. Общие результаты о базисности Рисса обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков и более сложных краевых задач с нелинейным вхождением спектрального параметра в уравнение и краевые условия были получены А.А. Шкаликовым в [6]. Им же было отмечено [7], что метод [6] позволяет доказать безусловную базисность со скобками корневых функций регулярных обыкновенных дифференциальных операторов и в матричном случае. Кроме того, для усиленно регулярного случая гарантируется безусловная базисность без скобок. Обобщение этих результатов выполнено Л.М. Лужиной в [8].

Конечно, наиболее популярным объектом для исследований в спектральной теории дифференциальных операторов является несамосопряженный оператор Штурма–Лиувилля. В матричном случае для этого оператора О.А. Велиев в работе [9] рассмотрел квазипериодические краевые условия и нашел достаточные условия на матричные коэффициенты, гарантирующие усиленную регулярность. В этой же работе он получил асимптотические формулы для собственных значений в случае негладких (интегрируемых) матричных коэффициентов и доказал базисность Рисса корневых функций в пространстве $L_2^k(0,1)$ для усиленно регулярных операторов. Позднее, Н.Б. Усковой в [10] для случая квадратично интегрируемых матричных коэффициентов удалось усилить результаты [9] по оценке остатка в асимптотических формулах для собственных значений. Дальнейшие уточнения и обобщения результатов по асимптотикам собственных значений и безусловной базисности корневых функций были проведены в работах О.А. Велиева [11], [12], [13], Ф. Шерефа и О.А. Велиева [14].

В настоящей статье мы получим асимптотические формулы для собственных значений дифференциального оператора L_θ при $\theta \in (0, 2)$, $\theta \neq 1$, а также сравним эти результаты с ранее известными. Отдельный интерес будет представлять случай $k = 1$. Основным методом исследования данной работы является один из вариантов метода подобных операторов (см. [15]–[17], а также [10]). Однако здесь будет развита новая адаптированная схема этого метода, отличающаяся от схемы в упомянутых работах. Данная модификация позволит усилить известные ранее результаты.

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов настоящей работы, мы введем некоторые обозначения. Напомним, что $\theta \in (0, 2)$, $\theta \neq 1$. Представим оператор L_θ в виде $L_\theta = L_\theta^0 - B$, где $L_\theta^0 : D(L_\theta^0) = D(L_\theta) \subset L_2^k[0,1] \to L_2^k[0,1]$, $L_\theta^0 y = y^{IV}$, и $B : D(B) \subset L_2^k[0,1] \to L_2^k[0,1]$, $(By)(t) = \mathfrak{A}(t)y''(t) + \mathfrak{B}(t)y(t)$. Оператор L_θ^0 будет играть роль невозмущенного оператора, а оператор B – роль возмущения. Спектр оператора L_θ^0 дискретный и его собственные значения имеют вид $\lambda_{n,j} = \pi^4(2n + \theta)^4$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, k$. Соответствующими собственными векторами являются функции $e_{n,j}(t) = e^{i\pi(2n+\theta)t} f_j(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, k$, $t \in [0,1]$, где векторы f_j, $j = 1, \ldots, k$, образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^k$. Кроме этого, для любого $x \in L_2^k[0,1]$ определим проектор Рисса P_n, $n \in \mathbb{Z}$, следующим образом:

$$P_n x = \sum_{j=1}^{k} (x, e_{n,j}) e_{n,j}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{0.1}$$

Определение 1. Для любой ограниченной матрицы A, действующей в $\mathbb{C}^k$, ее среднее арифметическое собственных значений определяется в виде

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j,$$

где λ_j – собственные значения матрицы A.

Отметим, что в некоторых работах (см., например, [10]) приводимое понятие называлось взвешенным средним собственных значений. Однако в статье мы будем употреблять, на наш взгляд, более корректный термин.

Теорема 1. *Существует такое число* $m \in \mathbb{Z}_+$, *для которого спектр оператора* L_θ *представим в виде*

$$\sigma(L_\theta) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \sigma_n \right), \tag{0.2}$$

где $\sigma_{(m)}$ – *конечное множество и* σ_n – *не более чем* k*-точечное множество. Кроме того, каждое из множеств* σ_n *совпадает со спектром сужения оператора* L_θ *на подпространство* $\operatorname{Im} P_n$, $|n| \geq m+1$. *Тогда для* $\hat{\lambda}_n$ *справедливо следующее асимптотическое представление*:

$$\hat{\lambda}_n = \pi^4 (2n+\theta)^4 + \frac{\pi^2 (2n+\theta)^2}{k} \sum_{j=1}^{k} \mu_j + \mathbb{O}(|n|), \quad |n| \geq m+1, \tag{0.3}$$

где μ_j, $j = 1, \ldots, k$, – *собственные значения матрицы* $\mathfrak{A}_0$.

В связи с тем, что собственные значения матрицы $\mathfrak{A}_0$ могут быть кратными, то в данном случае мы можем говорить только об асимптотических формулах для среднего арифметического собственных значений.

Так как сформулированная теорема описывает наиболее общую ситуацию, то далее мы изучим различные частные случаи.

Теорема 2. *Существует такое число* $m \in \mathbb{Z}_+$, *для которого спектр оператора* L_θ *представим в виде* (0.2). *Если собственные значения* μ_j, $j = 1, \ldots, k$, *матрицы* $\mathfrak{A}_0$ *являются простыми, то имеет место следующая асимптотика*:

$$\tilde{\lambda}_{n,j} = \pi^4 (2n+\theta)^4 + \pi^2 (2n+\theta)^2 \mu_j + \mathbb{O}(|n|), \quad j = 1, \ldots, k, \quad |n| \geq m+1.$$

Асимптотические формулы, полученные в теоремах 1 и 2, уточняют соответствующие результаты из [11, теоремы 1, 2].

Всюду далее единым символом $C > 0$ обозначаются различные положительные постоянные.

Теперь пусть матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ оператора L_θ имеют размер 1×1, т.е. каждая матрица состоит из одного элемента. Эти элементы мы будем обозначать через a и b. Каждый из них принадлежит пространству $L_2[0,1]$ и, следовательно, имеют место следующие разложения:

$$a(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} a_s e^{i2\pi st}, \quad b(t) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} b_s e^{i2\pi st}, \quad t \in [0,1],$$

где a_s и b_s – коэффициенты Фурье функций a и b соответственно. Таким образом, в этом случае оператор L_θ является обыкновенным дифференциальным оператором четвертого порядка с негладкими комплексными коэффициентами. Для него имеют место следующие результаты.

Теорема 3. *Пусть элементы a и b принадлежат пространству* $L_2[0,1]$. *Тогда оператор* L_θ *является оператором с дискретным спектром и существует такое число* $m \in \mathbb{Z}_+$, *что его спектр представим в виде* (0.2). *Для собственных значений* $\tilde{\lambda}_{n,1}$, $|n| \geq m+1$, *имеет место следующая оценка*:

$$\left|\tilde{\lambda}_{n,1} - \pi^4(2n+\theta)^4 - \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 + (2n+\theta)^2 \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq n}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s} a_{s-n}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\right| \leq$$
$$\leq \frac{C|n|\gamma_n}{(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2}, \quad |n| \geq m+1, \tag{0.4}$$

где (γ_n) — *некоторая суммируемая последовательность.*

Замечание 1. Асимптотический член со знаком суммы в формуле (0.4) допускает следующую оценку

$$\left|(2n+\theta)^2 \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq n}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s} a_{s-n}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\right| \leq C|n|\alpha_n, \quad |n| \geq m+1,$$

где (α_n) — некоторая суммируемая с квадратом последовательность. Конкретный вид этой последовательности будет приведен при доказательстве теоремы 3. Таким образом, приведенный член асимптотики является вторым приближением.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты a и b являются функциями с ограниченной вариацией. Тогда оператор* L_θ *является оператором с дискретным спектром, причем для некоторого числа* $m \in \mathbb{Z}_+$ *его спектр представим в виде* (0.2). *Собственные значения* $\tilde{\lambda}_{n,1}$, $|n| \geq m+1$, *допускают асимптотическое представление вида*

$$\tilde{\lambda}_{n,1} = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - b_0 -$$
$$- (2n+\theta)^2 \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq n}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s} a_{s-n}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} + \mathbb{O}(|n|^{-1}), \quad |n| \geq m+1.$$

Наконец, перейдем к рассмотрению важного, но не описанного выше случая. Если в краевых условиях положить $\theta = 0$ и $\theta = 1$, то оператор L_θ становится оператором с периодическими и антипериодическими краевыми условиями. Поскольку изучение асимптотики собственных значений в этом случае сопряжено с определенными сложностями (см. [13]), то мы ограничимся здесь только одномерным случаем. При исследовании мы возьмем за основу разрабатываемую в этой статье схему (также с некоторыми модификациями). Чтобы упростить изложение, мы сохраним принятые ранее обозначения. Тогда матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ также имеют размер 1×1 и элементы этих матриц есть функции a, b из пространства $L_2[0,1]$. Оператор L_θ является дифференциальным оператором четвертого порядка с негладкими коэффициентами с периодическими или антипериодическими краевыми условиями. Исследование спектральных свойств этого оператора представляет самостоятельный интерес, который вызван интересными приложениями в различных задачах механики (см. [18, Гл. I, § 2.3]), в оптике и акустике (см. [19]), а также при исследовании проводимости нанотрубок (см. [20]). Кроме того, рассматриваемый оператор описывает колебания балок, пластин, оболочек и сжатого стержня на упругом основании (см. [21], [22]).

Спектральный анализ самосопряженного дифференциального оператора четвертого порядка с негладкими периодическими коэффициентами был проведен в ряде статей А.В. Баданина и Е.Л. Коротяева. В работе [23] были исследованы спектральные зоны, характеристики спектра, а также выписывалась асимптотика собственных значений. Последний результат был позднее уточнен в [24]. Автором в [25] и [26] были исследованы различные спектральные характеристики оператора L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, в том числе и асимптотика собственных значений. В работе [27] О.А. Велиев рассмотрел дифференциальный оператор произвольного порядка, область определения которого задается периодическими и антипериодическими краевыми условиями. В этой работе были выписаны асимптотические формулы для собственных значений, а также условия, при которых собственные и присоединенные функции этого оператора образуют базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Теперь приведем основные результаты этой части. Первая теорема посвящена асимптотике собственных значений оператора L_θ, $\theta \in \{0,1\}$. По сравнению с [25, теорема 1], [26, теорема 1] и [27, теоремы 1, 2], в формулируемой далее теореме уточняется формула второго приближения, а также формула остаточного члена.

Теорема 5. *Оператор L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, является оператором с дискретным спектром и существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что его спектр представим в виде* (0.2). *При этом $\sigma_{(m)}$ — конечное множество с числом точек, не превосходящим $2m+1$, а множество σ_n определяется в виде $\sigma_n = \{\tilde\lambda_n^+\} \cup \{\tilde\lambda_n^-\}$. Собственные значения $\tilde\lambda_n^\pm$, $n \ge m+1$, допускают следующую асимптотическую оценку*:

$$\Bigg|\tilde\lambda_n^\pm - \pi^4(2n+\theta)^4 - \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 + 2(2n+\theta)^2 \sum_{\substack{s=1\\ s\ne n}} \frac{(2s+\theta)^2(a_{n-s}a_{s-n} + a_{n+s+\theta}a_{-n-s-\theta})}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \pm$$

$$\pm (2n+\theta)^2 \left(\pi^2 a_{-2n-\theta} - 2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n, s\ne -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{s-n}a_{-n-s-\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\right)^{1/2} \times \tag{0.5}$$

$$\times \left(\pi^2 a_{2n+\theta} - 2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n, s\ne -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{n+s+\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\right)^{1/2}\Bigg| \le m\eta_n, \quad n \ge m+1,$$

где η_n — некоторая суммируемая последовательность.

Замечание 2. Подробные оценки на асимптотические члены будут приведены при доказательстве этой теоремы.

Как и ранее, рассмотрим несколько частных случаев.

Следствие 1. Пусть элементы a и b являются вещественными. Тогда имеем

$$\Bigg|\lambda_n^\pm - \pi^4(2n+\theta)^4 - \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 + 2(2n+\theta)^2 \sum_{\substack{s=1\\ s\ne n}} \frac{(2s+\theta)^2(a_{n-s}a_{s-n} + a_{n+s+\theta}a_{-n-s-\theta})}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \pm$$

$$\pm (2n+\theta)^2 \left|\pi^2 a_{2n+\theta} - 2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n, s\ne -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{n+s+\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\right|\Bigg| \le m\tilde\eta_n, \quad n \ge m+1,$$

где $(\tilde\eta_n)$ — суммируемая последовательность.

Теорема 6. *Пусть элементы a и b являются функциями с ограниченной вариацией. Тогда спектр $\sigma(L_\theta)$ оператора L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, представим в виде* (0.2) *и для $\tilde\lambda_n^\pm$, $n \ge m+1$, справедливо следующее соотношение*:

$$\tilde\lambda_n^\pm = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - 2(2n+\theta)^2 \sum_{\substack{s=1\\ s\ne n}} \frac{(2s+\theta)^2(a_{n-s}a_{s-n} + a_{n+s+\theta}a_{-n-s-\theta})}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4} \mp$$

$$\mp (2n+\theta)^2 \left(\pi^2 a_{-2n-\theta} - 2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n, s\ne -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{s-n}a_{-n-s-\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\pi^2 a_{2n+\theta} - 2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n, s\ne -n-\theta}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{n+s+\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}\right)^{1/2} - b_0 + \mathcal{O}(n^{-1}), \quad n \ge m+1.$$

Результат теоремы 6 усиливает соответствующий результат из [25, теорема 2], [26, теорема 2].

Известно (см. [26, теорема 8]), что оператор $-L_\theta$, $\theta \in \{0,1\}$ является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов. Там же было выписано асимптотическое представление этой полугруппы. Однако приведенное представление было очень громоздким. На основе уточненной асимптотики собственных значений из теоремы 5, а также вида полугруппы из [28, Гл. 1, разд. 6], в теореме 14 будет выписано более точное и компактное представление указанной полугруппы.

Статья организована следующим образом. В разд. 1 мы проведем исследование абстрактных операторов, которые по своим спектральным свойствам близки к рассматриваемому оператору L_θ. В частности, будет выписана базовая теорема для асимптотики собственных значений. В разд. 2 будет проведено предварительное преобразование подобия оператора L_θ к оператору, спектральные свойства которого были изучены в разд. 1. В разд. 3 будут доказаны основные результаты настоящей работы для $\theta \in (0,2)$, $\theta \neq 1$. Последний разд. 4 посвящен доказательству результатов для оператора L_θ в одномерном случае для периодических и антипериодических краевых условий.

Результаты настоящей работы частично анонсированы в заметке [29].

1. АБСТРАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, БЛИЗКИЕ К ОПЕРАТОРУ L_θ, И ИХ СВОЙСТВА

В настоящем разделе мы будем изучать спектральные свойства абстрактного оператора, который имеет схожую с оператором L_θ структуру. Здесь мы построим адаптированную схему используемого метода, которую ниже непосредственно применим к оператору L_θ. Однако начнем с формулировок основных положений.

Пусть $\mathcal{H}$ — комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $\operatorname{End}\mathcal{H}$ — банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$, с нормой $\|\cdot\|$.

Определение 2. Два линейных оператора $A_j : D(A_j) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $j = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ такой, что $A_1Ux = UA_2x$, $x \in D(A_2)$, $UD(A_2) = D(A_1)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в A_2.

Интерес к изучению подобных операторов связан с тем, что они обладают рядом совпадающих спектральных свойств (см. [17, лемма 1]). В частности, у подобных операторов совпадают их спектры.

Рассмотрим некоторый замкнутый линейный оператор $A : D(A) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Через $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначим спектр и резольвентное множество оператора A соответственно. Символом $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ обозначим банахово пространство операторов, действующих в $\mathcal{H}$ и подчиненных оператору A. Некоторый линейный оператор $B : D(B) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ принадлежит пространству $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, если $D(B) \supseteq D(A)$ и конечна величина $\|B\|_A = \inf\{C > 0 : \|Bx\| \le C(\|x\| + \|Ax\|), x \in D(A)\}$. Эта величина принимается за норму в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$.

Далее мы перейдем к исследованию оператора $A - B$. Как правило, интересующие нас спектральные свойства оператора $A - B$ хорошо изучены для оператора A, но между A и $A - B$ нет подобия. Метод подобных операторов предлагает решить эту проблему следующим образом. Посредством подобия оператор $A - B$ сводится к изучению оператора $A - B_0$, где B_0 имеет несложную структуру, а сам оператор $A - B_0$ достаточно прост для исследования интересующих нас спектральных свойств. Тогда согласно определению 2 теми же свойствами будет обладать и оператор $A - B$. Для того чтобы осуществить указанное подобие операторов, необходим некоторый технический аппарат.

Определение 3 (см. [15], [16]). Пусть $\mathfrak{U}$ — линейное подпространство операторов из $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и $J : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$, $\Gamma : \mathfrak{U} \to \operatorname{End}\mathcal{H}$ — трансформаторы (т.е. линейные операторы в пространстве линейных операторов). Тройка $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ называется допустимой тройкой для оператора A, а $\mathfrak{U}$ — пространством допустимых возмущений, если выполнены следующие условия:

1) $\mathfrak{U}$ — банахово пространство со своей нормой $\|\cdot\|_*$, непрерывно вложенное в $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$;

2) J и Γ — непрерывные трансформаторы, причем J — проектор;

3) $(\Gamma X)D(A) \subset D(A)$, $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX$ для любого $X \in \mathfrak{U}$ и $Y = \Gamma X$ — единственное решение уравнения $AY - YA = X - JX$, удовлетворяющее условию $JY = 0$;

4) $X(\Gamma Y)$, $(\Gamma Y)X \in \mathfrak{U}$ для всех $X, Y \in \mathfrak{U}$ и существует такая постоянная $\gamma > 0$, что $\|\Gamma\| \le \gamma$ и $\max\{\|X(\Gamma Y)\|_*, \|(\Gamma X)Y\|_*\} \le \gamma \|X\|_* \|Y\|_*$;

5) для любого $X \in \mathfrak{U}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_\varepsilon \in \rho(A)$ такое, что $\left\|X(A - \lambda_\varepsilon I)^{-1}\right\| < \varepsilon$.

Поясним введенные здесь объекты. Обычно в качестве пространства $\mathfrak{U}$ выбирается удобное банахово или гильбертово пространство. Оператор J отвечает за оператор, получаемый при подобии (аналог оператора B_0). Введение оператора Γ тесно связано с построением оператора преобразования U из определения 2. Более детально это прояснится после формулировки основной теоремы о подобии. Стоит отметить, что построение допустимой тройки осуществляется не единственным образом. Мы руководствуемся исключительно удобством ее использования, наличием тех или иных свойств у входящих в нее трансформаторов, а также характером итоговых результатов.

Теорема 7 (см. [15], [16]). *Пусть $(\mathfrak{U}, J, \Gamma)$ — допустимая тройка для оператора A и оператор B принадлежит $\mathfrak{U}$. Если выполняется условие*

$$\|J\|_* \|B\|_* \|\Gamma\|_* < 1/4, \tag{1.1}$$

то оператор $A - B$ подобен оператору $A - JX_*$, где оператор $X_* \in \mathfrak{U}$ есть решение нелинейного операторного уравнения

$$X = B + B\Gamma X - (\Gamma X)JB - (\Gamma X)J(B\Gamma X) = \Phi(X). \tag{1.2}$$

Это решение можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$ и т.д. При этом оператор $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \le 3\|B\|_*\}$. Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - JX_*$ осуществляет обратимый оператор $I + \Gamma X_* \in \operatorname{End}\mathscr{H}$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [15, теорема 1.5] или в [16, теорема 19.2]. Условие (1.1) служит условием существования решения у нелинейного уравнения (1.2). Вид указанного уравнения непосредственно связан с оператором преобразования $I + \Gamma X_*$. При этом выполнение условий 3)–5) определения 3 гарантируют его обратимость, а также инвариантность относительно области определения $D(A)$. Таким образом, выполняются все свойства подобных операторов из определения 2.

Отметим, что поскольку J является проектором, то теорему 7 можно рассматривать как теорему о подобии оператора $A - B$ оператору $A - JX_*$ блочно-диагонального вида относительно "базиса" , в котором оператор A имеет диагональный вид. Таким образом, указанная схема позволяет значительно упростить изучение необходимых нам спектральных свойств у исходного оператора $A - B$.

Теперь мы применим описанную выше схему метода к операторам, спектральные свойства которого схожи с оператором L_θ. До конца раздела мы будем считать, что $\theta \in (0, 2)$, $\theta \ne 1$. В роли невозмущенного оператора рассмотрим нормальный линейный оператор $A : D(A) \subset \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ с дискретным спектром. Предположим, что собственные значения этого оператора k-кратны и имеют вид

$$\lambda_{n,j} = \pi^4(2n + \theta)^4, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Таким образом, спектр $\sigma(A)$ оператора A допускает представление вида $\sigma(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n$, где $\sigma_n \cap \sigma_r = \varnothing$, $r \ne n$, $r, n \in \mathbb{Z}$, и σ_n, $n \in \mathbb{Z}$, — конечные множества. Соответствующие собственные функции обозначим через $e_{n,j}$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, k$. Предположим, что они образуют ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Символом P_n, $n \in \mathbb{Z}$, обозначим проектор Рисса, построенный по спектральному множеству σ_n. Для любого $x \in \mathscr{H}$ этот проектор определяется формулой (0.1). Следовательно, $AP_n = \lambda_{n,j} P_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, k$.

Замечание 3. Как мы уже отмечали выше, оператор A обладает точно такими же спектральными свойствами, как и оператор L_θ^0 для $\theta \in (0, 2)$, $\theta \ne 1$. При этом для собственных значений, собственных функций и проекторов будут использоваться те же обозначения, что и для оператора L_θ^0.

Через $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ мы обозначим идеал операторов Гильберта–Шмидта с нормой $\|\cdot\|_2$ (см. [30, Гл. 3, разд. 9]). Каждому оператору $X \in \operatorname{End}\mathcal{H}$ поставим в соответствие блочную матрицу $X = (X_{sr})$, составленную из операторов $X_{sr} = P_s X P_r$, $s, r \in \mathbb{Z}$. Так как проекторы P_s, $s \in \mathbb{Z}$, являются ортопроекторами, то норма в $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ задается формулой $\|X\|_2 = \left(\sum_{s,r\in\mathbb{Z}} \|P_s X P_r\|_2^2\right)^{1/2}$.

Для любого $\alpha \in (-1,0) \cup (0,1)$ рассмотрим нормальный оператор $A^\alpha : D(A^\alpha) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ следующего вида:

$$A^\alpha x = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_{n,j}^\alpha P_n x, \quad j = 1, \ldots, k,$$

с областью определения

$$D(A^\alpha) = \left\{ x \in \mathcal{H} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\lambda_{n,j}|^{2\alpha} \|P_n x\|^2 < \infty \right\}.$$

Теперь у нас есть все необходимые объекты, чтобы перейти к построению допустимой тройки. Согласно определению 3 она будет состоять из пространства допустимых возмущений U, а также двух трансформаторов.

Банахово пространство допустимых возмущений $\mathfrak{U}$ будет состоять из операторов $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, представимых в виде

$$X = X_0 A^{1/2}, \quad X_0 \in \mathfrak{S}_2(\mathcal{H}).$$

В качестве нормы оператора X в пространстве $\mathfrak{U}$ принимается величина $\|X\|_* = \|X_0\|_2$.

Теперь перейдем к построению необходимых трансформаторов, которые мы будем обозначать через J_m и Γ_m. Для этого определим более общие трансформаторы J_0 и Γ_0, которые будут играть вспомогательную роль. Пусть

$$J_0 X = \sum_{s\in\mathbb{Z}} P_s X P_s, \quad X \in \mathfrak{U}. \tag{1.3}$$

Для $X \in \mathfrak{U}$ зададим оператор $\Gamma_0 : \mathfrak{U} \to \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ на операторных блоках $X_{sr} = P_s X P_r = P_s X_0 A^{1/2} P_r = \lambda_{r,j}^{1/2} P_s X_0 P_r$. Для каждого X_{sr}, $s \neq r$, определим трансформатор Γ_0 как $\Gamma_0 X_{sr} = Y_{sr}$, где Y_{sr} – решение уравнения $AY_{sr} - Y_{sr}A = X_{sr}$, $s \neq r$, и $Y_{ss} = 0$ для любого $s \in \mathbb{Z}$. Заметим, что последнее уравнение переписывается в виде

$$A_s Y_{sr} - Y_{sr} A_r = X_{sr}, \tag{1.4}$$

где A_s – сужение оператора A на подпространство $\operatorname{Im} P_s$ для любого $s \in \mathbb{Z}$. Так как $\sigma(A_s) \cap \sigma(A_r) = \varnothing$, $s, r \in \mathbb{Z}$, то каждое из уравнений (1.4) разрешимо, а также

$$\|Y_{sr}\|_* \le C\|X_{sr}\|_* / \operatorname{dist}(\sigma(A_s), \sigma(A_r)), \quad Y_{ss} = 0, \quad s, r \in \mathbb{Z}.$$

Корректность определения операторов $J_0 X$ и $\Gamma_0 X$, а также их ограниченность устанавливаются по схеме [26, лемма 1].

Продолжения трансформаторов J_0 и Γ_0 на пространство $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$, которые в дальнейшем будут обозначаться теми же символами, для любого оператора $X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ будут задаваться в виде

$$J_0 X = (J_0 X A^{-1/2}) A^{1/2}, \quad \Gamma_0 X = (\Gamma_0 X A^{-1/2}) A^{1/2}, \quad X \in \mathfrak{L}_A(\mathcal{H}). \tag{1.5}$$

Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ определим семейство трансформаторов J_m и Γ_m следующим образом:

$$J_m X = J_0(X - P_{(m)} X P_{(m)}) + P_{(m)} X P_{(m)} = P_{(m)} X P_{(m)} + \sum_{|n|\ge m+1} P_n X P_n, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{1.6}$$

$$\Gamma_m X = \Gamma_0 X - \Gamma_0(P_{(m)} X P_{(m)}) = \Gamma_0 X - P_{(m)}(\Gamma_0 X) P_{(m)}, \quad X \in \mathfrak{U}, \tag{1.7}$$

где $P_{(m)} = \sum_{|j|\le m} P_j$. В силу принадлежности X пространству $\mathfrak{U}$ ряды в (1.3), (1.6) и (1.7) являются сходящимися в равномерной операторной топологии.

Поскольку трансформаторы J_m и Γ_m строятся по трансформаторам J_0 и Γ_0, то продолжения трансформаторов J_m и Γ_m на пространства $\mathfrak{L}_A(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{U}$ также осуществляются формулами (1.5).

Замечание 4. По сути трансформаторы J_m и Γ_m образуются "вырезанием" из соответствующих трансформаторов J_0 и Γ_0 конечномерного блока. Таким образом, J_m и Γ_m отличаются от трансформаторов J_0 и Γ_0 на операторы конечного ранга. Зависимость от m в трансформаторах J_m и Γ_m вводится для двух целей. Во-первых, для того чтобы можно было проконтролировать величину $\|\Gamma_m B\|_*$, которая должна быть достаточно малой. Это требование станет более понятным при проведении предварительного преобразования подобия в следующем разделе (см. лемму 5). Во-вторых, для снятия некоторых ограничений на оператор B. Если продолжать работать с трансформатором Γ_0, то несложно доказать оценку $\|\Gamma_0\|_* \le C$. Согласно теореме 7 подобие возможно при выполнении условия (1.1). Следовательно, чтобы осуществлять дальнейшие построения, необходима малость $\|B\|_*$. Соответственно, вводя трансформатор Γ_m и выбирая число m достаточно большим, можно снять это ограничение.

Выпишем некоторые свойства построенных трансформаторов. Непосредственно из (1.6) и (1.7) для любых операторов $X, Y \in \mathfrak{U}$ и при $|n| \ge m+1$ справедливы равенства:

$$(J_m X)P_n = P_n(J_0 X)P_n = P_n X P_n, \quad \Gamma_m(P_n X P_n) = 0, \quad P_n(J_m X)(\Gamma_m Y)P_n = 0. \tag{1.8}$$

Таким образом, тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ построена. Для применения теоремы 7 необходимо, чтобы эта тройка была допустимой. Этот результат будет сформулирован в следующей лемме.

Лемма 1. *Для любого $m \in \mathbb{Z}_+$ тройка $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ является допустимой для оператора A и имеет место оценка*

$$\|\Gamma_m\|_* \le 1/(4\pi^2(2m-1+\theta)).$$

Доказательство проводится аналогичным образом как и [26, лемма 4].

Далее до конца этого раздела мы будем предполагать, что возмущение B принадлежит построенному выше пространству $\mathfrak{U}$. Тогда на основе абстрактной теоремы 7 мы можем сформулировать основную теорему о подобии уже для рассматриваемого оператора $A - B$.

Теорема 8. *Пусть число $m \in \mathbb{Z}_+$ таково, что выполнено условие*

$$\|B\|_* < \pi^2(2m-1+\theta). \tag{1.9}$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_m X_*$, где $X_* \in \mathfrak{U}$ является решением нелинейного уравнения

$$X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m B) - (\Gamma_m X)J_m(B\Gamma_m X) + B = \Phi(X), \tag{1.10}$$

которое можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B$, … . При этом оператор $\Phi : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \mathfrak{U} : \|X - B\|_* \le 3\|B\|_*\}$. Оператором преобразования U является оператор $I + \Gamma_m X_*$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 1 и теоремы 7.

Используя эту теорему, мы перейдем к анализу спектра оператора $A - B$.

Теорема 9. *Пусть выполнено условие* (1.9). *Тогда оператор $A - B$ имеет дискретный спектр, который совпадает со спектром оператора*

$$A - J_m X_* = A - P_{(m)} X_* P_{(m)} - \sum_{|n| \ge m+1} P_n X_* P_n. \tag{1.11}$$

Кроме того, справедливы следующие равенства:

$$\sigma(A - B) = \sigma(A_{(m)}) \bigcup \left(\bigcup_{|n| \ge m+1} \sigma(A_n) \right) = \sigma_{(m)} \bigcup \left(\bigcup_{|n| \ge m+1} \sigma_n \right), \tag{1.12}$$

где $A_{(m)}$ — сужение оператора $A - J_m X_*$ на инвариантное подпространство $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im} P_{(m)}$ и A_n — сужение оператора $A - J_m X_*$ на подпространство $\mathcal{H}_n = \operatorname{Im} P_n$, $|n| \ge m+1$.

Доказательство. Поскольку оператор A является оператором с дискретным спектром, а оператор $J_m X_*$ — ограничен, то оператор $A - J_m X_*$ также является оператором с дискретным спектром. По теореме 8 оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_m X_*$. Тогда из их подобия следует, что

$A-B$ также является оператором с дискретным спектром и имеет место равенство $\sigma(A-B)=\sigma(A-J_mX_*)$.

Непосредственно из формулы (1.6) следует формула (1.11). Кроме того, из теоремы 8 и [17, лемма 1] следует, что оператор $A-J_mX_*$ вида (1.11) перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)}$, P_n, $|n|\geq m+1$. Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(m)}=\operatorname{Im}P_{(m)}$, $\mathcal{H}_n=\operatorname{Im}P_n$, $|n|\geq m+1$, являются инвариантными для оператора $A-J_mX_*$. Если $\mu_0\in\sigma(A-J_mX_*)$, то существует собственный вектор $x_0\in D(A)$ такой, что $(A-J_mX_*)x_0=\mu_0x_0$. Таким образом, из вида оператора J_mX_* следуют равенства

$$A_{(m)}P_{(m)}x_0=\mu_0P_{(m)}x_0,\quad A_nP_nx_0=\mu_0P_nx_0,\quad |n|\geq m+1,\tag{1.13}$$

где $A_{(m)}$ – сужение оператора $A-J_mX_*$ на $\mathcal{H}_{(m)}$, A_n – сужение оператора $A-J_mX_*$ на $\mathcal{H}_n$, $|n|\geq m+1$. Так как $I=P_{(m)}+\sum_{|n|\geq m+1}P_n$, т.е. система проекторов образует разложение единицы, то из (1.13) следует, что хотя бы один из векторов P_nx_0, $|n|\geq m+1$, $P_{(m)}x_0$ ненулевой. Следовательно, μ_0 – собственное значение соответствующего оператора из семейства операторов A_n, $|n|\geq m+1$, $A_{(m)}$. Таким образом, имеет место вложение

$$\sigma(A_{(m)})\cup\left(\bigcup_{|n|\geq m+1}\sigma(A_n)\right)\supset\sigma(A-J_mX_*)=\sigma(A-B).$$

Обратное вложение очевидно. Следовательно, установлено равенство (1.12). Теорема доказана.

Таким образом, теоремы 8 и 9 позволили свести изучение спектральных характеристик оператора $A-B$ к исследованию характеристик оператора $A-J_mX_*$. Следующая теорема посвящена описанию алгоритма нахождения асимптотических формул для среднего арифметического собственных значений оператора $A-B$.

Теорема 10. *Пусть выполнено условие* (1.9) *и спектр оператора $A-B$ представим в виде* (1.12). *Тогда множества σ_n, $|n|\geq m+1$, не более чем k-точечны. При этом среднее арифметическое собственных значений каждого из этих множеств совпадает со средним арифметическим собственных значений матрицы $\mathcal{A}_n$, которая допускает представление вида*

$$\mathcal{A}_n=\pi^4(2n+\theta)^4E-\mathcal{B}_n+\pi^2(2n+\theta)^2\mathcal{C}_n,\tag{1.14}$$

где E – единичная матрица, $\mathcal{B}_n$ – матрица размером $k\times k$, состоящая из элементов $(Be_{n,j},e_{n,j})$, $j=1,\ldots,k$. Кроме того, для числа $n_1=\max\{m+1,3\|B\|_*/(4\pi^2)+(1+\theta)/2\}$ норма матриц $\mathcal{C}_n$ удовлетворяет оценкам

$$\|\mathcal{C}_n\|_*\leq\frac{1}{2\pi^2\,|2|n|-1-\theta|}\|P_nB-P_nBP_n\|_*\|BP_n-P_nBP_n\|_*,\quad |n|\geq n_1.\tag{1.15}$$

Доказательство. Отметим, что при доказательстве мы часто будем использовать равенства (1.8). Применим к уравнению (1.10) с $X=X_*$ слева и справа проектор P_n. Тогда

$$A-P_nX_*P_n=A-P_nBP_n-P_n(B\Gamma_mX_*)P_n.\tag{1.16}$$

Представим оператор $P_n(B\Gamma_mX_*)P_n$, $|n|\geq m+1$, в следующем виде:

$$P_n(B\Gamma_mX_*)P_n=P_n(B-J_mB)(\Gamma_mX_*)P_n=((P_nB-P_nBP_n)A^{-1/2})(A^{1/2}(\Gamma_mX_*)P_n).$$

Умножим справа обе части последнего равенства на оператор $A^{-1/2}$. Тогда

$$\|P_n(B\Gamma_mX_*)P_n\|_*\leq\|P_nB-P_nBP_n\|_*\left\|A^{1/2}(\Gamma_mX_*)P_n\right\|_*,\quad |n|\geq m+1.\tag{1.17}$$

Оценим второй множитель в правой части (1.17). Используя соотношения (1.8), получаем

$$\left\|A^{1/2}(\Gamma_mX_*)P_n\right\|_*=\left\|A^{1/2}\Gamma_m(X_*-P_nX_*P_n)P_n\right\|_*\leq$$

$$\leq\max_{s\neq n}\frac{\lambda_{s,j}^{1/2}}{\operatorname{dist}(\sigma_s,\sigma_n)}\left\|X_*P_n-P_nX_*P_n\right\|_*=d_n\left\|X_*P_n-P_nX_*P_n\right\|_*,\quad |n|\geq m+1,$$

где

$$d_n = \max_{s\neq n} \frac{\lambda_{s,j}^{1/2}}{\operatorname{dist}(\sigma_s, \sigma_n)} \leq \frac{1}{4\pi^2\left|2|n|-1-\theta\right|}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Теперь перейдем к оценке величины $\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_*$. Вновь применим к уравнению (1.10) проекторы P_n. Тогда

$$X_*P_n - P_nX_*P_n = BP_n - P_nBP_n + B\Gamma_m(X_* - P_nX_*P_n)P_n - \\ - \Gamma_m(X_* - P_nX_*P_n)P_nBP_n - P_nB\Gamma_m(X_* - P_nX_*P_n)P_n.$$

Оценивая обе части последнего равенства, получаем

$$\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_* \leq \|BP_n - P_nBP_n\|_* + d_n\|B\|_*\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_* + \\ + d_n\|B\|_*\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_* + d_n\|B\|_*\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_* = \\ = \|BP_n - P_nBP_n\|_* + 3d_n\|B\|_*\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_*.$$

Таким образом, если выполнено условие $3d_n\|B\|_* \leq 1/2$, то имеет место неравенство $\|X_*P_n - P_nX_*P_n\|_* \leq 2\|BP_n - P_nBP_n\|_*$. Следовательно,

$$\left\|A^{1/2}(\Gamma_mX_*)P_n\right\|_* = \left\|A^{1/2}\Gamma_m(X_*P_n - P_nX_*P_n)\right\|_* \leq 2d_n\|BP_n - P_nBP_n\|_*. \tag{1.18}$$

Из неравенств (1.17) и (1.18) следует оценка

$$\|P_n(B\Gamma_mX)P_n\|_* \leq \frac{1}{2\pi^2\left|2|n|-1-\theta\right|}\|P_nB - P_nBP_n\|_*\|BP_n - P_nBP_n\|_*, \quad |n| \geq n_1, \tag{1.19}$$

где $n_1 = \max\{m+1, 3\|B\|_*/(4\pi^2) + (1+\theta)/2\}$. Отметим, что первое значение в n_1 отвечает за представление спектра (1.12), а второе – за выполнение неравенства $3d_n\|B\|_* \leq 1/2$.

Рассмотрим сужения операторов из равенства (1.16) на подпространства $\operatorname{Im} P_n$, $|n| \geq n_1$. Матрицы, отвечающие этим операторам, обозначим соответственно через $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{B}_n$ и $\mathcal{C}_n$. Тогда, учитывая принадлежность оператора $B\Gamma_mX_*$ пространству $\mathfrak{U}$, из формулы (1.16) следует представление (1.14). Кроме того, для матрицы $\mathcal{C}_n$, которая соответствует оператору $P_n(B\Gamma_mX_*)P_n$, в силу (1.19) имеет место неравенство (1.15).

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

Возвращаемся к изучению оператора $L_\theta = L_\theta^0 - B$, где $\theta \in (0,2)$, $\theta \neq 1$. Всюду в дальнейшем в качестве пространства $\mathcal{H}$ мы возьмем пространство $L_2^k[0,1]$. Для исследования оператора L_θ мы применим схему, построенную в разд. 1. В качестве оператора A будет выступать невозмущенный оператор L_θ^0. Далее используем построенную выше допустимую тройку. Для применения описанной ранее схемы необходимо (см. теорему 8), чтобы оператор B принадлежал пространству $\mathfrak{U}$. Однако непосредственный подсчет показывает, что это не так. Оператор B принадлежит только пространству $\mathfrak{L}_{L_\theta^0}(\mathcal{H})$. В связи с этим осуществим предварительное преобразование подобия (см. [17, Предположение]). Оно заключается в том, чтобы посредством подобия свести изучение оператора L_θ к оператору $\tilde{L}_\theta^0 - \tilde{B}$, где оператор $\tilde{B}$ уже принадлежит пространству $\mathfrak{U}$, а оператор $\tilde{L}_\theta^0$ строится по оператору L_θ^0. Конкретный вид этого оператора будет уточнен ниже. Тогда к оператору $\tilde{L}_\theta^0 - \tilde{B}$ мы сможем применить схему, построенную в разд. 1.

Технически предварительное преобразование подобия заключается в проверке пяти свойств (см. [17, Предположение] и лемму 5 настоящей работы), частично похожих на свойства допустимой тройки. Поэтому построение оператора преобразования и конкретный вид оператора $\tilde{B}$ по сути затрагивает те же вопросы разрешимости нелинейных уравнений, что и раньше.

Итак, за основу мы берем допустимую тройку, построенную в разд. 1. Поскольку оператор B принадлежит пространству $\mathfrak{L}_{L_\theta^0}(\mathcal{H})$, то операторы $J_m B$ и $\Gamma_m B$ корректно определены формулами (1.6) и (1.7) с помощью продолжений вида (1.5). Напомним, что спектр оператора L_θ^0 дискретный и его собственные значения имеют вид

$$\lambda_{n,j} = \pi^4(2n+\theta)^4, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Соответствующими собственными векторами являются функции

$$e_{n,j}(t) = e^{i\pi(2n+\theta)t} f_j(t), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, \ldots, k, \quad t \in [0,1],$$

где векторы f_j, $j = 1, \ldots, k$, образуют ортонормированный базис в $\mathbb{C}^k$. Следовательно, собственное подпространство $E_n = \operatorname{Span}\{e_{n,1}, \ldots, e_{n,k}\}$ является k-мерным. Как и ранее, через P_n обозначается проектор Рисса, который для любого $x \in \mathcal{H}$ определяется формулой (0.1).

Предварительное преобразование подобия мы начнем с изучения свойств оператора B. Представим его в виде

$$B = B_1 + B_2, \quad \text{где} \quad (B_1 y)(t) = \mathfrak{A}(t)y(t) \quad \text{и} \quad (B_2 y)(t) = \mathfrak{B}(t)y(t).$$

Так как элементы a_{pj} и b_{pj}, $p, j = 1, \ldots, k$, матриц $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ принадлежат пространству $L_2[0,1]$, то имеют место разложения

$$a_{pj}(t) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{s,pj} e^{i2\pi st}, \quad b_{pj}(t) = \sum_{s\in\mathbb{Z}} b_{s,pj} e^{i2\pi st}, \quad t \in [0,1],$$

где $a_{s,pj}$ и $b_{s,pj}$ – коэффициенты Фурье функций a и b соответственно. Кроме того, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|a\|_{L_2}^2 = \sum_{p,j=1}^{k} \int_0^1 |a_{pj}(t)|^2 dt = \sum_{p,j=1}^{k} \sum_{s\in\mathbb{Z}} |a_{s,pj}|^2.$$

Используя приведенные разложения, оценим элементы $b^1_{l_p,r_j}$, $b^2_{l_p,r_j}$ блоков матричного представления операторов B_1 и B_2 соответственно. Справедливы следующие равенства:

$$b^1_{l_p,r_j} = (B_1 e_{r,j}, e_{l,p}) = -\pi^2(2r+\theta)^2 \int_0^1 a_{pj}(t) e^{i\pi(2r+\theta)t} e^{-i\pi(2l+\theta)t} f_p \overline{f}_j dt =$$

$$= -\pi^2(2r+\theta)^2 \sum_{s\in\mathbb{Z}} a_{s,pj} \int_0^1 e^{i2\pi(s+r-l)t} f_p \overline{f}_j dt = -\pi^2(2r+\theta)^2 a_{l-r,pj}, \quad p, j = 1, \ldots, k.$$

Аналогичным образом получаются соотношения для элементов $b^2_{l_p,r_j}$. Таким образом, имеют место оценки:

$$\left|b^1_{l_p,r_j}\right| \le \pi^2(2r+\theta)^2 \left|a_{l-r,pj}\right|, \quad \left|b^2_{l_p,r_j}\right| \le \left|b_{l-r,pj}\right|, \quad p, j = 1, \ldots, k, \quad r, l \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Далее, используя полученные неравенства, переходим к исследованию операторов, участвующих в предварительном преобразовании подобия.

Лемма 2. *Для любого $q \in \mathbb{Z}_+$ операторы $\Gamma_q B$ принадлежат пространству $\mathfrak{U}$ и для достаточно большого q выполняется неравенство $\|\Gamma_q B\|_* \le 1/2$. Кроме того, для $n \in \mathbb{Z}$ имеют место оценки*

$$\|P_n(\Gamma_q B)\|_* \le 2\left\|P_n(\Gamma_0 B_1)(L_\theta^0)^{-1/2}\right\|_2 \le \frac{\|a\|_{L_2}}{2\pi^4 |\theta-1|(1-|\theta-1|)(2n+\theta)^2 \, |2|n|-3|}, \tag{2.2}$$

$$\|(\Gamma_q B)P_n\|_* \le 2\left\|(\Gamma_0 B_1)P_n(L_\theta^0)^{-1/2}\right\|_2 \le \frac{\|a\|_{L_2}}{2\pi^4 |\theta-1|(1-|\theta-1|)(2n+\theta)^2 \, |2|n|-3|}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Поскольку $B = B_1 + B_2$, то в силу линейности трансформатора Γ_q, получим $\Gamma_q B = \Gamma_q B_1 + \Gamma_q B_2$. Установим, что оператор $\Gamma_q B_1$ принадлежит пространству $\mathfrak{U}$. Для этого сначала покажем, что $\Gamma_0 B_1 \in \mathfrak{U}$. Воспользуемся первым неравенством из (2.1). Тогда имеем

$$\sum_{l,r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|(\Gamma_0 B_1 (L_\theta^0)^{-1/2} e_{r,j}, e_{l,p})\right|^2 = \sum_{\substack{l,r\in\mathbb{Z}\\ l\neq r}}\sum_{p,j=1}^{k}\frac{\left|b^1_{l_p,r_j}\right|^2}{\left|\lambda_{l,p}-\lambda_{r,j}\right|^2\lambda_{r,j}} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi^8}\sum_{\substack{l,r\in\mathbb{Z}\\ l\neq r}}\sum_{p,j=1}^{k}\frac{(2r+\theta)^4\left|a_{l-r,pj}\right|^2}{((2l+\theta)^4-(2r+\theta)^4)^2(2r+\theta)^4} \le$$

$$\le \frac{1}{16\pi^8}\sum_{\substack{l,r\in\mathbb{Z}\\ l\neq r}}\sum_{p,j=1}^{k}\frac{\left|a_{l-r,pj}\right|^2}{(l-r)^2(l+r+\theta)^2(2l+\theta)^4} = \frac{1}{16\pi^8}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{1}{(2l+\theta)^4}\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq 0}}\sum_{p,j=1}^{k}\frac{\left|a_{s,pj}\right|^2}{s^2(2l-s+\theta)^2} \le \tag{2.4}$$

$$\le \frac{\|a\|^2_{L_2}}{16\pi^8(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{1}{(2l+\theta)^4(2|l|-3)^2} \le$$

$$\le \frac{\|a\|^2_{L_2}}{16\pi^8(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2}\sum_{\substack{l\in\mathbb{Z}\\ l\neq 0}}\frac{1}{(2l+\theta)^4}\left(\frac{1}{l^2}+1\right) < \infty.$$

Следовательно, $\Gamma_0 B_1 \in \mathfrak{U}$. Согласно формуле (1.7) оператор $\Gamma_q B_1$ отличается от оператора $\Gamma_0 B_1$ на оператор конечного ранга. Таким образом, $\Gamma_q B_1 \in \mathfrak{U}$. С учетом второго неравенства из (2.1) аналогичным образом показывается, что $\Gamma_q B_2 \in \mathfrak{U}$. Следовательно, $\Gamma_q B$ принадлежит пространству допустимых возмущений. Кроме того,

$$\lim_{q\to\infty}\|\Gamma_q B\|_*^2 = \lim_{q\to\infty}\|\Gamma_0 B - P_{(q)}(\Gamma_0 B)P_{(q)}\|_*^2 = \lim_{q\to\infty}\sum_{\max\{|l|,|r|\}\ge q+1}\|P_l(\Gamma_q B)P_r\|_*^2 = 0.$$

Значит, всегда можно подобрать такое достаточно большое q, для которого выполнено неравенство $\|\Gamma_q B\|_* \le 1/2$.

Вновь применим соотношение (1.7), а также свойства оператора $\Gamma_q B$. Тогда

$$\|P_n(\Gamma_q B)\|_* \le \|P_n(\Gamma_q B_1)\|_* + \|P_n(\Gamma_q B_2)\|_* \le 2\|P_n(\Gamma_q B_1)\|_* \le 2\|P_n(\Gamma_0 B_1)\|_*.$$

Используя эту оценку и полагая $l = n$ в неравенствах (2.4), получим (2.2). Неравенство (2.3) устанавливается по той же схеме, полагая $r = n$ в указанных неравенствах. Лемма доказана.

Непосредственной проверкой легко убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 3. *Для любого $q \in \mathbb{Z}_+$ оператор $J_q B$ является ограниченным оператором.*

Лемма 4. *Для любого $q \in \mathbb{Z}_+$ операторы $B\Gamma_q B$ принадлежат пространству $\mathfrak{U}$ и имеют место следующие оценки*:

$$\|P_n(B\Gamma_q B)\|_* \le \frac{8\sqrt{2}\beta(n)}{\pi^2|\theta-1|(1-|\theta-1|)}, \quad \|(B\Gamma_q B)P_n\|_* \le \frac{8\|a\|_{L_2}\alpha(2n)}{\pi|\theta-1|(1-|\theta-1|)\sqrt{3}}, \tag{2.5}$$

$$\|P_n(B\Gamma_q B)P_n\|_* \le C/\left(|2n+\theta||\theta-1|(1-|\theta-1|)\right), \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{2.6}$$

где $(\alpha(2n))$ и $(\beta(n))$ — суммируемые с квадратом последовательности.

Доказательство. Будем рассуждать таким же образом, как и при доказательстве леммы 2. Сначала докажем утверждение леммы для оператора $B_1\Gamma_0 B_1$. Используя первое неравенство из (2.1), получим следующие соотношения:

$$\sum_{l,r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|(B_1\Gamma_0 B_1(L_\theta^0)^{-1/2}e_{r,j},e_{l,p})\right|^2=\frac{1}{\pi^4}\sum_{l,r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq r}}\sum_{i=1}^{k}\frac{(2r+\theta)^2(2s+\theta)^2a_{l-s,pi}a_{s-r,ij}}{((2s+\theta)^4-(2r+\theta)^4)(2r+\theta)^2}\right|^2\le$$
$$\le\frac{1}{\pi^4}\sum_{l,r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq r}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{l-s,pi}a_{s-r,ij}}{(s-r)(s+r+\theta)}\right|^2. \tag{2.7}$$

Величина в последнем неравенстве конечна. Доказательство этого факта устанавливается аналогичным образом как [26, лемма 7]. Следовательно, оператор $B_1\Gamma_0 B_1$ принадлежит пространству $\mathfrak{U}$. Поскольку оператор B_2 является оператором умножения на функцию b, то операторы $B_2\Gamma_0 B_1$, $B_1\Gamma_0 B_2$ и $B_2\Gamma_0 B_2$ также принадлежат $\mathfrak{U}$. Таким образом, $B\Gamma_0 B\in\mathfrak{U}$. В силу того, что оператор $B\Gamma_q B$ отличается от оператора $B\Gamma_0 B$ на оператор конечного ранга, то $B\Gamma_q B$ также принадлежит пространству допустимых возмущений $\mathfrak{U}$.

Для окончательного доказательства леммы осталось получить оценки (2.5) и (2.6). В формулах (2.7) положим $l=n$ и применим неравенство Гёльдера. Тогда имеем

$$\|P_n(B_1\Gamma_0 B_1)\|_*^2\le\frac{1}{\pi^4}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq r}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{n-s,pi}a_{s-r,ij}}{(s-r)(s+r+\theta)}\right|^2=\frac{1}{\pi^4}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{n-r-h,pi}a_{h,ij}}{h(2r+h+\theta)}\right|^2\le$$
$$\le\frac{1}{\pi^4}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{n-r-h,pi}|^2}{h^2}\right)\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{h,ij}|^2}{(2r+h+\theta)^2}\right)\le$$
$$\le\frac{1}{\pi^4}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{n-r-h,pi}|^2}{h^2}\right)\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq 2r}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{s-2r,ij}|^2}{(s+\theta)^2}\right)\le$$
$$\le\frac{2}{\pi^4}\max_{s\in\mathbb{Z}}\frac{s^2}{(s+\theta)^2}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{n-r-h,pi}|^2}{h^2}\right)\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{s-2r,ij}|^2}{s^2}\right)\le$$
$$\le\frac{8}{\pi^4(\theta-1)^2(2-\theta)^2}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{n-r-h,pi}|^2}{h^2}\right)\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{s-2r,ij}|^2}{s^2}\right)\le$$
$$\le\frac{8}{\pi^4(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2}\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{n-r-h,pi}|^2}{h^2}\right)\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{s-2r,ij}|^2}{s^2}\right).$$

Рассмотрим суммируемую последовательность $f\in l^1(\mathbb{Z})$ вида $f(n)=1/n^2$, если $n\neq 0$, и $f(n)=0$, если $n=0$. Тогда

$$\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a(n-r-h,pi)}{h^2}\right)\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\neq 0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a(s-2r,ij)}{s^2}\right)=$$
$$=\sum_{r\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}(f*a)(n-r)(f*a)(-2r)=\beta^2(n), \tag{2.8}$$

где $a(n-r-h,pi) = \left|a_{n-r-h,pi}\right|^2$, $a(s-2r,ij) = \left|a_{s-2r,ij}\right|^2$ и $(\beta(n))$ — суммируемая с квадратом последовательность. Учитывая равенства (1.7) и полученные соотношения, имеем

$$\begin{gathered}\left\|P_n(B\Gamma_q B)\right\|_* \le \left\|P_n(B\Gamma_0 B)\right\|_* \le \left\|P_n(B_1\Gamma_0 B_1)\right\|_* + \left\|P_n(B_1\Gamma_0 B_2)\right\|_* + \left\|P_n(B_2\Gamma_0 B_1)\right\|_* + \\ + \left\|P_n(B_2\Gamma_0 B_2)\right\|_* \le 4\left\|P_n(B_1\Gamma_0 B_1)\right\|_* \le \frac{8\sqrt{2}\beta(n)}{\pi^2\left|\theta-1\right|(1-\left|\theta-1\right|)}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Что и доказывает первое неравенство из (2.5).

Далее, положим $r = n$ в неравенствах (2.7). Рассмотрим суммируемую с квадратом последовательность вида

$$\alpha(n) = \left(\sum_{\substack{|s|<n\\ s\ne0}}\sum_{p,j=1}^{k}\frac{\tilde a(s-n)+\tilde a(s+n)}{s^2} + \frac{\|a\|_{L_2}^2}{n^2} + \frac{\left|a_{-2n,pj}\right|^2}{\theta^2}\right)^{1/2}, \tag{2.10}$$

где $\tilde a(s) = \max\left\{\left|a_{s,pj}\right|^2, \left|a_{-s,pj}\right|^2\right\}$, $s\in\mathbb{Z}$, $p,j = 1,\ldots,k$.

Применяя неравенство Гёльдера, мы получаем

$$\begin{gathered}\left\|(B_1\Gamma_0 B_1)P_n\right\|_*^2 \le \frac{1}{\pi^4}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{l-s,pi}a_{s-n,ij}}{(s-n)(s+n+\theta)}\right|^2 = \frac{1}{\pi^4}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{h\in Z\\ h\ne0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{l-h-n,pi}a_{h,ij}}{h(h+2n+\theta)}\right|^2 \le \\ \le \frac{1}{\pi^4}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\ne0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\left|a_{l-h-n,pi}\right|^2}{h^2}\right)\left(\sum_{\substack{h\in\mathbb{Z}\\ h\ne0}}\sum_{i=1}^{k}\frac{\left|a_{h,ij}\right|^2}{(h+2n+\theta)^2}\right) \le \\ \le \frac{\|a\|_{L_2}^2}{3\pi^2}\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne2n}}\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\left|a_{s-2n,ij}\right|^2}{(s+\theta)^2}\right) \le \frac{\|a\|_{L_2}^2}{3\pi^2}\max_{s\in\mathbb{Z}}\frac{s^2}{(s+\theta)^2}\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne0,2n}}\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\left|a_{s-2n,ij}\right|^2}{s^2} + \frac{\left|a_{-2n,ij}\right|^2}{\theta^2}\right) \le \\ \le \frac{4\|a\|_{L_2}^2}{3\pi^2(2-\theta)^2(\theta-1)^2}\left(\sum_{\substack{|s|<2n\\ s\ne0}}\sum_{i,j=1}^{k}\frac{\left|a_{s-2n,ij}\right|^2}{s^2} + \frac{\|a\|_{L_2}^2}{4n^2} + \frac{\left|a_{-2n,ij}\right|^2}{\theta^2}\right) \le \frac{4\|a\|_{L_2}^2\,\alpha^2(2n)}{3\pi^2(1-\left|\theta-1\right|)^2(\theta-1)^2}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Рассуждая аналогичным образом, как и в (2.9), для оператора $(B\Gamma_q B)P_n$, получаем вторую оценку из (2.5).

Осталось установить оценку (2.6). Рассмотрим матрицу сужения оператора $B_1\Gamma_0 B_1$ на подпространство $\operatorname{Im}P_n$ в базисе $e_{n,j}$, $n\in\mathbb{Z}$, $j = 1,\ldots,k$. Ее элементы имеют вид

$$(B_1\Gamma_0 B_1 e_{n,j}, e_{n,p}) = (2n+\theta)^2\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s,pi}a_{s-n,ij}}{(2s+\theta)^4-(2n+\theta)^4},\qquad p,j = 1,\ldots,k. \tag{2.12}$$

Положим $l = r = n$ в формулах (2.7). Применяя те же рассуждения, что и при выводе (2.11), мы получаем

$$\begin{gathered}\left\|P_n(B_1\Gamma_0 B_1)P_n\right\|_*^2 = \sum_{p,j=1}^{k}\left|(B_1\Gamma_0 B_1(L_\theta^0)^{-1/2}e_{n,j}, e_{n,p})\right|^2 \le \frac{1}{\pi^4}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{n-s,pi}a_{s-n,ij}}{(s-n)(s+n+\theta)}\right|^2 \le \\ \le \frac{1}{\pi^4(2n+\theta)^2}\sum_{p,j=1}^{k}\left|\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{n-s,pi}a_{s-n,ij}}{s-n} - \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{a_{n-s,pi}a_{s-n,ij}}{s+n+\theta}\right|^2 \le\end{gathered}$$

$$\le \frac{2}{\pi^4(2n+\theta)^2}\sum_{p,j=1}^{k}\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n}}\sum_{i=1}^{k}\frac{|a_{s-n,ij}|^2}{(s-n)^2}\right)\left(\sum_{\substack{s\in\mathbb{Z}\\ s\ne n}}\sum_{i=1}^{k}|a_{n-s,pi}|^2\right)+\frac{8\|a\|_{L_2}^2\alpha^2(2n)}{\pi^4(2n+\theta)^2(2-\theta)^2(\theta-1)^2}\le$$

$$\le \frac{2\|a\|_{L_2}^4}{\pi^4(2n+\theta)^2(\theta-1)^2}+\frac{8\|a\|_{L_2}^2\alpha^2(2n)}{\pi^4(2n+\theta)^2(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2}\le\frac{C}{(2n+\theta)^2(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2}.$$

Пользуясь оценкой (2.9) для оператора $P_n(B\Gamma_qB)P_n$, получим окончательную оценку (2.6). Лемма доказана.

Итак, теперь сформулируем окончательную лемму, в условиях которой будет возможно предварительное преобразование подобия.

Лемма 5. *Существует такое число $q\in\mathbb{Z}_+$, что операторы B, J_qB, Γ_qB удовлетворяют следующим условиям*: (а) $\Gamma_qB\in\operatorname{End}\mathscr{H}$, $\|\Gamma_qB\|_*<1$; (б) $(\Gamma_qB)D(L_\theta^0)\subset D(L_\theta^0)$; (в) $B\Gamma_qB$, $(\Gamma_qB)J_qB\in\mathfrak{U}$; (г) $L_\theta^0(\Gamma_qB)x-(\Gamma_qB)L_\theta^0x=(B-J_qB)x$, $x\in D(L_\theta^0)$; (д) *для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\lambda_\varepsilon\in\rho(L_\theta^0)$ *такое, что* $\left\|B(L_\theta^0-\lambda_\varepsilon I)^{-1}\right\|_*<1$.

Доказательство. По лемме 2 оператор Γ_qB принадлежит $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{S}_2(\mathscr{H})\subset\operatorname{End}\mathscr{H}$, причем существует такое $q\in\mathbb{Z}_+$, что $\|\Gamma_qB\|_*\le 1/2<1$. Таким образом, выполнено свойство (а).

Докажем свойство (в). Первая часть леммы выполнена в силу леммы 4. По лемме 3 оператор J_qB является ограниченным оператором. Тогда, используя лемму 2, получим, что оператор $(\Gamma_qB)J_qB$ принадлежит $\mathfrak{U}$.

Свойства (б), (г) и (д) доказываются аналогичным образом как [26, лемма 4]. Лемма доказана.

На основании этой леммы, а также [17, теорема 9], мы можем сформулировать первую теорему о подобии.

Теорема 11. *Существует число $q\in\mathbb{Z}_+$ такое, что $\|\Gamma_qB\|_*\le 1/2$. Тогда оператор $L_\theta=L_\theta^0-B$ подобен оператору $L_\theta^0-J_qB-\widetilde{B}$ и имеет место равенство*

$$(L_\theta^0-B)(I+\Gamma_qB)=(I+\Gamma_qB)(L_\theta^0-J_qB-\tilde{B}),$$

где оператор $\tilde{B}$ принадлежит пространству $\mathfrak{U}$ и представим в виде

$$\tilde{B}=(I+\Gamma_qB)^{-1}(B\Gamma_qB-(\Gamma_qB)J_qB).\tag{2.13}$$

В этой теореме вид оператора $\tilde{B}$ можно уточнить. Из формулы (2.13) заключаем, что

$$\begin{gathered}\tilde{B}=\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\Gamma_qB)^l\right)(B\Gamma_qB-(\Gamma_qB)J_qB)=B\Gamma_qB-(\Gamma_qB)J_qB-\\ -(\Gamma_qB)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l(\Gamma_qB)^l\right)(B\Gamma_qB-(\Gamma_qB)J_qB)=B\Gamma_qB-(\Gamma_qB)J_qB-\\ -(\Gamma_qB)(I+\Gamma_qB)^{-1}(B\Gamma_qB-(\Gamma_qB)J_qB).\end{gathered}\tag{2.14}$$

Последним равенством мы и будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема 11 позволяет свести исследование оператора L_θ к оператору $L_\theta^0-J_qB-\tilde{B}$, где оператор $\tilde{B}$ уже принадлежит пространству $\mathfrak{U}$. Поэтому для этого оператора можно применить основную схему из разд. 1. В частности, появляется возможность использовать теорему 10. Отметим, что далее в качестве невозмущенного оператора будет выступать оператор $\tilde{L}_\theta^0=L_\theta^0-J_qB$, который уже не является самосопряженным, но является нормальным (см. [31, Гл. 1, § 6]).

Перейдем к формулировке основной теоремы о подобии, которая непосредственно следует из теорем 8 и 11. По существу эта теорема сводит изучение оператора L_θ к оператору блочно-диагонального вида.

Теорема 12. *Существует такое число $m \in \mathbb{Z}_+$, что $m \ge q+1$, для которого выполнено неравенство $\|\tilde{B}\|_* < \pi^2(2m-1+\theta)$. Тогда оператор L_θ подобен оператору вида $\tilde{L}_\theta^0 - J_m X_*$, где X_* — решение нелинейного уравнения*

$$X = \tilde{B} + \tilde{B}\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m\tilde{B}) - (\Gamma_m X)J_m(\tilde{B}\Gamma_m X) \tag{2.15}$$

и оператор $\tilde{B}$ определен формулой (2.14).

Как было отмечено выше, для дальнейшего исследования мы можем применить схему из разд. 1 и, в частности, использовать теорему 10. Теперь мы получим необходимые оценки, используемые в этой теореме. Применим к равенству (2.14) слева и справа проекторы P_n. Как и ранее, будем учитывать соотношения (1.8). Тогда

$$\begin{gathered}\tilde{B}P_n - P_n\tilde{B}P_n = (B\Gamma_m B)P_n - (\Gamma_m B)P_nBP_n - P_n(B\Gamma_m B)P_n + \\ + (P_n(\Gamma_m B) - \Gamma_m B)(I+\Gamma_m B)^{-1}((B\Gamma_m B)P_n - (\Gamma_m B)P_nBP_n), \\ P_n\tilde{B} - P_n\tilde{B}P_n = P_n(B\Gamma_m B) - P_n(\Gamma_m B)J_m B - P_n(B\Gamma_m B)P_n + \\ + P_n(\Gamma_m B)(I+\Gamma_m B)^{-1}(-B\Gamma_m B - (\Gamma_m B)P_nBP_n + (\Gamma_m B)J_m B + (B\Gamma_m B)P_n).\end{gathered}$$

Далее к обеим частям полученных равенств применим справа оператор $(L_\theta^0)^{-1/2}$ и перейдем к их оценкам. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\|\tilde{B}P_n - P_n\tilde{B}P_n\|_* \le \|(B\Gamma_m B)P_n\|_* + \|(\Gamma_m B)P_n\|_*\|P_nBP_n\|_* + \|P_n(B\Gamma_m B)P_n\|_* + \\ + \frac{\|P_n(\Gamma_m B)\|_* + \|\Gamma_m B\|_*}{1-\|\Gamma_m B\|_*}\left(\|(B\Gamma_m B)P_n\|_* + \|(\Gamma_m B)P_n\|_*\|P_nBP_n\|_*\right),\end{gathered} \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\|P_n\tilde{B} - P_n\tilde{B}P_n\|_* \le \|P_n(B\Gamma_m B)\|_* + \|P_n(\Gamma_m B)J_m B\|_* + \|P_n(B\Gamma_m B)P_n\|_* + \\ + \frac{\|P_n(\Gamma_m B)\|_*}{1-\|\Gamma_m B\|_*}(\|B\Gamma_m B\|_* + \|(\Gamma_m B)P_nBP_n\|_* + \|(\Gamma_m B)J_m B\|_* + \|(B\Gamma_m B)P_n\|_*).\end{gathered} \tag{2.17}$$

Отметим, что из теоремы 11 следует, что $\|\Gamma_m B\|_* \le 1/2$, а из формулы (1.6) оценка $\|J_m B\|_* \le \|B\|_*$. Учитывая это, подставим в (2.16) и (2.17) оценки (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6). Тогда

$$\|\tilde{B}P_n - P_n\tilde{B}P_n\|_* \le \frac{C\alpha(2n)}{|\theta-1|(1-|\theta-1|)}, \quad \|P_n\tilde{B} - P_n\tilde{B}P_n\|_* \le \frac{C\beta(n)}{|\theta-1|(1-|\theta-1|)}, \tag{2.18}$$

где величины α и β определяются формулами (2.8) и (2.10).

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ $\theta \in (0,2)$, $\theta \ne 1$

Перейдем к доказательству основных результатов работы анонсированных во введении. В основе доказательств будет лежать полученная теорема 12 о подобии.

Доказательство теоремы 1. Мы предполагаем, что матрица $\mathfrak{A}_0$ подобна диагональной матрице. Таким образом, без ограничения общности мы будем считать, что матрица $\mathfrak{A}_0$ изначально диагональная с собственными значениями $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$. В качестве базиса удобно взять собственные нормированные векторы $f_1, f_2, \ldots, f_k$.

По теореме 12 оператор L_θ подобен оператору $\tilde{L}_\theta^0 - J_m X_*$, где X_* — решение уравнения (2.15). Тогда из теоремы 9 следует, что спектр оператора L_θ представим в виде

$$\sigma(L_\theta) = \sigma(\tilde{L}_\theta^0 - J_m X_*) = \sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup\nolimits_{|n|\ge m+1}\sigma(A_n)\right) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup\nolimits_{|n|\ge m+1}\sigma_n\right),$$

где $A_{(m)}$ — сужение оператора $\tilde{L}_\theta^0 - J_m X_*$ на пространство $\operatorname{Im} P_{(m)}$, $P_{(m)} = \sum_{|j|\le m} P_j$, и A_n — сужение оператора $\tilde{L}_\theta^0 - J_m X_*$ на пространство $\operatorname{Im} P_n$, $|n| \ge m+1$. Поскольку размерность пространства $\operatorname{Im} P_{(m)}$ конечна, то $\sigma(A_{(m)})$ — конечное множество. Следовательно, имеет место представление (0.2).

Представим оператор $\tilde{L}^0_\theta - J_m X_*$ в следующем виде:

$$\begin{gathered}\tilde{L}^0_\theta - J_m X_* = L^0_\theta - J_m B - J_m(X_* - \tilde{B} + \tilde{B}) = \\ = L^0_\theta - J_m B - J_m\tilde{B} - J_m(X_* - \tilde{B}) = L^0_\theta - JB - J\tilde{B} + J(X_* - \tilde{B}) + T.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Оператор $J(X_* - \tilde{B})$ принадлежит пространству $\mathfrak{U}$ в силу принадлежности X_* и $\tilde{B}$ пространству $\mathfrak{U}$. Оператор $T = JB - J_m B + J\tilde{B} - J_m\tilde{B} + J(X_* - \tilde{B}) - J_m(X_* - \tilde{B})$ имеет конечный ранг, а следовательно, принадлежит $\mathfrak{U}$. Используя это представление, перейдем к вычислению асимптотики среднего арифметического собственных значений оператора $\tilde{L}^0_\theta - J_m X_*$.

Поскольку в конечномерном пространстве спектральный след совпадает с матричным, то среднее арифметическое собственных значений оператора $\tilde{L}^0_\theta = L^0_\theta - JB$ определяется как $\pi^4(2n+\theta)^4 + (\pi^2(2n+\theta)^2/k)\sum_{j=1}^k \mu_j$. Тогда из оценок (1.15), (2.6), (2.18), а также равенства $P_n(\tilde{B}\Gamma_m X_*)P_n = P_n(X_* - \tilde{B})P_n$ (см. (1.16)) следует формула (0.3). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что собственные значения μ_j, $j = 1, \ldots, k$, матрицы $\mathfrak{A}_0$ являются простыми. В этом случае уже можно говорить об асимптотике собственных значений для оператора L_θ. Повторяя доказательство теоремы 1, мы получим утверждение теоремы 2.

Вид остаточного члена, полученный в теоремах 1 и 2, уточняет соответствующий результат из [11, теоремы 1 и 2].

Доказательство теоремы 3. Пусть матричные коэффициенты $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют размер 1×1. Элементы этих матриц будем обозначать через a и b, причем $a, b \in L_2[0,1]$. Поскольку в этом случае проекторы P_n, $|n| \geq m+1$, имеют ранг один, то операторы $P_n X_* P_n$ представимы в виде $P_n X_* P_n = (X_* e_{n,1}, e_{n,1})P_n$, $|n| \geq m+1$. По теореме 12 оператор L_θ подобен оператору $\tilde{L}^0_\theta - J_m X_*$, где X_* – решение уравнения (2.15). В этом случае спектр $\sigma(L_\theta)$ оператора L_θ может быть представлен в виде

$$\sigma(L_\theta) = \sigma(\tilde{L}^0_\theta - J_m X_*) = \sigma_{(m)} \cup \left(\bigcup_{|n| \geq m+1} \{\sigma(\tilde{L}^0_\theta) - (X_* e_{n,1}, e_{n,1})\} \right),$$

где $\sigma_{(m)}$ – спектр сужения оператора $\tilde{L}^0_\theta - J_m X_*$ на подпространство $\operatorname{Im} P_{(m)}$ и $\sigma(\tilde{L}^0_\theta)$ – спектр оператора $\tilde{L}^0_\theta = L^0_\theta - J_m B$. Вычислим собственные значения $\tilde{\lambda}_{n,1}$, $|n| \geq m+1$, оператора $\tilde{L}^0_\theta$. Имеют место равенства

$$\begin{gathered}\tilde{\lambda}_{n,1} = \pi^4(2n+\theta)^4 - (Be_{n,1}, e_{n,1}) = \pi^4(2n+\theta)^4 - (B_1 e_{n,1}, e_{n,1}) - (B_2 e_{n,1}, e_{n,1}) = \\ = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2 \int_0^1 a(t)dt - \int_0^1 b(t)dt = \pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - b_0.\end{gathered}$$

Далее, используя (2.14), а также теорему 10, представим $(X_* e_{n,1}, e_{n,1})$ в следующем виде:

$$(X_* e_{n,1}, e_{n,1}) = (\tilde{B}e_{n,1}, e_{n,1}) + ((X_* - \tilde{B})e_{n,1}, e_{n,1}) = (B\Gamma_m B e_{n,1}, e_{n,1}) + \pi^2(2n+\theta)^2\eta(n).$$

Поскольку основной вклад в асимптотику собственных значений вносит оператор B_1, то последнее равенство достаточно рассмотреть для оператора B_1 (асимптотические члены для остальных слагаемых войдут в остаточный член). С учетом формулы (2.12), имеем

$$(B_1\Gamma_m B_1 e_{n,1}, e_{n,1}) = (2n+\theta)^2 \sum_{\substack{s\in\mathbb{Z} \\ s\neq n}} \frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s} a_{s-n}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}, \quad |n| \geq m+1. \tag{3.2}$$

Перейдем к оценке величины η. Применим теорему 10. Из формулы (1.15) теоремы 10 и неравенств (2.18) следует, что

$$|\eta(n)| \le \frac{1}{2\pi^2 \left|2|n|-1-\theta\right|} \|P_n\tilde{B} - P_n\tilde{B}P_n\|_* \|\tilde{B}P_n - P_n\tilde{B}P_n\|_* \le$$
$$\le \frac{C\alpha(2n)\beta(n)}{|n|(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2} = \frac{C\gamma_n}{|n|(\theta-1)^2(1-|\theta-1|)^2}, \quad |n| \ge n_1,$$

где $n_1 = \max\{3\|B\|_*/(4\pi^2) + (1+\theta)/2\}$ и (γ_n) – суммируемая последовательность (как произведение двух суммируемых с квадратом последовательностей).

Из неравенства (2.6) следует, что выражение (3.2) будет вторым приближением в асимптотике собственных значений и не входит в остаточный член. Таким образом, имеет место оценка (0.4). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть в условиях предыдущей теоремы функции a и b являются функциями ограниченной вариации. Тогда для коэффициентов Фурье функций a и b имеют место следующие неравенства (см. [32, Гл. 2, теорема 4.12]):

$$|a_n| \le C/(|n|+1), \quad |b_n| \le C/(|n|+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из формул (2.8) и (2.10) следует, что $\alpha(2n) \le C/(|n|+1)$, $\beta(n) \le C/(|n|+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Применяя теорему 3, получим необходимое утверждение. Теорема доказана.

Очевидно, что утверждение теоремы 4 имеет место и в случае, если функции a и b являются гладкими (с любой степенью).

4. ОДНОМЕРНЫЙ ПЕРИОДИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Настоящий раздел посвящен изучению случая $\theta \in \{0,1\}$. Поскольку исследование многомерной ситуации представляет значительную трудность, то мы ограничимся только одномерным случаем. Здесь мы будем использовать с некоторыми дополнениями абстрактную схему из разд. 1. Однако прежде опишем рассматриваемую ситуацию. Чтобы не нагромождать обозначений, мы будем использовать одни и те же символы для обозначения собственных значений, собственных функций и проекторов, что и выше.

Всюду ниже до конца статьи матрицы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ будут матрицами размера 1×1 с элементами a и b из пространства $L_2[0,1]$. Рассмотрим дифференциальный оператор $L_\theta : D(L_\theta) \subset L_2[0,1] \to L_2[0,1]$, который задается дифференциальным выражением

$$l(y) = y^{IV} - a(t)y'' - b(t)y.$$

Область определения $D(L_\theta) = \{y \in W_2^4([0,1],\mathbb{C})\}$ этого оператора задается либо периодическими краевыми условиями (при $\theta = 0$), либо антипериодическими краевыми условиями (при $\theta = 1$). Как и ранее, оператор L_θ представим в виде $L_\theta = L_\theta^0 - B$. Спектр оператора L_θ^0 дискретный, его собственные значения двукратны (за исключением простого собственного значения $\lambda_0 = 0$) и имеют вид $\lambda_n = \pi^4(2n+\theta)^4$, $n \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Соответствующими собственными векторами являются функции $e_n(t) = e^{i\pi(2n+\theta)t}$, $n \in \mathbb{Z}$, $t \in [0,1]$, которые образуют ортонормированный базис в $L_2[0,1]$. Через $\mathbb{P}_n$ обозначим проектор Рисса, который для любого вектора $x \in L_2[0,1]$ определяется следующим образом:

$$\mathbb{P}_n x = P_{-n-\theta}x + P_n x = (x, e_{-n-\theta})e_{-n-\theta} + (x, e_n)e_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Основная схема исследований в одномерном случае будет совпадать со схемой из разд. 1 и 2. Некоторые общие построения были ранее проведены в работе [26]. В связи с этим мы кратко прокомментируем проведенные исследования.

В качестве допустимой тройки мы возьмем тройку $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$, построенную в разд. 1. При этом трансформаторы J_0 и Γ_0 имеют вид

$$J_0 X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_n X \mathbb{P}_n, \qquad \Gamma_0 X = \sum_{\substack{s,r \in \mathbb{Z} \\ \lambda_s \neq \lambda_r}} \frac{P_s X P_r}{\lambda_s - \lambda_r}.$$

Как и ранее, для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$ трансформаторы J_m и Γ_m задаются формулами (1.6) и (1.7). Сформулируем следующую известную лемму (см. [26, лемма 4]).

Лемма 6. *Тройка* $(\mathfrak{U}, J_m, \Gamma_m)$ *для оператора* L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, *является допустимой.*

Далее для оператора L_θ необходимо сделать предварительное преобразование подобия, т.е. получить аналог теоремы 11. Эта часть была проделана в [26, теорема 6]. После этого можно применить теорему 7. Таким образом, имеет место

Теорема 13. *Существует такое число* $m \in \mathbb{Z}_+$, *для которого* $\|\Gamma_m B\|_* \leq 1/2$ *и оператор* L_θ *подобен оператору вида* $L_\theta^0 - J_m B - J_m X_*$, *где* X_* — *решение нелинейного уравнения* (2.15). *В этом уравнении оператор* $\tilde{B}$ *принадлежит пространству* $\mathfrak{U}$ *и задается формулой* (2.14). *Кроме того, для некоторых суммируемых с квадратом последовательностей* $(\tilde{\alpha}(2n+\theta))$ *и* $(\tilde{\beta}(n))$ *имеют место следующие оценки*:

$$\|\tilde{B}\mathbb{P}_n - \mathbb{P}_n \tilde{B} \mathbb{P}_n\|_* \leq C\tilde{\alpha}(2n+\theta), \qquad \|\mathbb{P}_n \tilde{B} - \mathbb{P}_n \tilde{B} \mathbb{P}_n\|_* \leq C\tilde{\beta}(n). \tag{4.1}$$

Доказательство. Первая часть теоремы доказана в [26, теорема 7]. Необходимые оценки (4.1) устанавливаются аналогичным образом, как и неравенства (2.18).

Замечание 5. Последовательности из предыдущей теоремы имеют вполне конкретный вид. Последовательность $(\tilde{\beta}(n))$, по существу, это частный случай формулы (2.8) для $p = j = 1$, а последовательность $\tilde{\alpha}(n)$ определяется по формуле

$$\tilde{\alpha}(n) = \left(\sum_{\substack{|s|<n \\ s \neq 0}} \frac{\hat{a}(s-n) + \hat{a}(s+n)}{s^2} + \frac{\|a\|_{L_2}^2}{n^2} \right)^{1/2},$$

где $\hat{a}(s) = \max\left\{|a_s|^2, |a_{-s}|^2\right\}$, $s \in \mathbb{Z}$.

Теперь у нас имеются все необходимые построения и оценки. Перейдем к доказательству основной теоремы настоящего раздела.

Доказательство теоремы 5. По теореме 13 для некоторого $m \in \mathbb{Z}_+$ оператор L_θ, $\theta \in \{0,1\}$, подобен оператору $L_\theta^0 - J_m B - J_m X_*$. Так как оператор $L_\theta^0 - J_m B$ является нормальным с дискретным спектром, а оператор $J_m X_*$ — ограниченный, то оператор $L_\theta^0 - J_m B - J_m X_*$ является оператором с дискретным спектром. Таким образом, подобный ему оператор L_θ также является оператором с дискретным спектром. Кроме того, из теоремы 9 следуют равенства

$$\sigma(L_\theta) = \sigma(L_\theta^0 - J_m B - J_m X_*) = \sigma(A_{(m)}) \cup \left(\bigcup_{n \geq m+1} \sigma(A_n) \right),$$

где A_n — сужение оператора $L_\theta^0 - J_m B - J_m X_*$ на подпространство $\operatorname{Im} \mathbb{P}_n$ и $A_{(m)}$ — сужение оператора $L_\theta^0 - J_m B - J_m X_*$ на подпространство $\operatorname{Im} \mathbb{P}_{(m)}$. Здесь $\mathbb{P}_{(m)} = \sum_{j \leq m} \mathbb{P}_j$.

Для того чтобы выписать асимптотику собственных значений оператора L_θ, необходимо описать множества $\sigma(A_n)$, $n \geq m+1$. Подобно рассуждениям, которые мы проводили при доказательстве теоремы 1, получим, что оператор $L_\theta^0 - J_m B - J_m X_*$ представим в виде (3.1). Рассмотрим сужения операторов из правой части представления (3.1) на пространство $\operatorname{Im} \mathbb{P}_n$, $n \geq m+1$. Тогда операторы A_n представимы в виде

$$A_n = (L_\theta^0)_n - B_n - C_n - D_n, \qquad n \geq m+1,$$

где B_n, C_n и D_n – сужения операторов $\mathbb{P}_n B\mathbb{P}_n$, $\mathbb{P}_n\tilde{B}\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n(X_* - \tilde{B})\mathbb{P}_n$ на пространство $\operatorname{Im}\mathbb{P}_n$ соответственно. Матрицы этих операторов удовлетворяют следующему соотношению:

$$\mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} - \mathcal{B}_n - \mathcal{C}_n + \pi^2(2n+\theta)^2\mathcal{D}_n, \tag{4.2}$$

где

$$\mathcal{B}_n = -\pi^2(2n+\theta)^2\begin{pmatrix} a_0 & a_{-2n-\theta} \\ a_{2n+\theta} & a_0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C}_n = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

и $\mathcal{D}_n$ – матрица оператора D_n. Через c_{ij}, $i, j = 1, 2$ обозначаются элементы матрицы $\mathcal{C}_n$, $n \geq m+1$, и для $s \neq n$ и $s \neq -n-\theta$ мы имеем

$$c_{11} = (B_1\Gamma_m B_1 e_{-n-\theta}, e_{-n-\theta}) = (2n+\theta)^2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\frac{(2s+\theta)^2(a_{n-s}a_{s-n} + a_{n+s+\theta}a_{-n-s-\theta})}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}, \tag{4.3}$$

$$c_{12} = (B_1\Gamma_m B_1 e_n, e_{-n-\theta}) = 2(2n+\theta)^2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\frac{(2s+\theta)^2 a_{s-n}a_{-n-s-\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}, \tag{4.4}$$

$$c_{21} = (B_1\Gamma_m B_1 e_{-n-\theta}, e_n) = 2(2n+\theta)^2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\frac{(2s+\theta)^2 a_{n-s}a_{n+s+\theta}}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}, \tag{4.5}$$

$$c_{22} = (B_1\Gamma_m B_1 e_n, e_n) = (2n+\theta)^2\sum_{s\in\mathbb{Z}}\frac{(2s+\theta)^2(a_{n-s}a_{s-n} + a_{n+s+\theta}a_{-n-s-\theta})}{(2s+\theta)^4 - (2n+\theta)^4}. \tag{4.6}$$

Очевидно, что $c_{11} = c_{22}$.

Для дальнейшего исследования нам понадобятся следующие соотношения. Для последовательностей комплексных чисел $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{b}_n$, $n \geq 1$, с $\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n \neq 0$, определим матрицы вида

$$U_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{\mathfrak{b}_n/\mathfrak{a}_n} & \sqrt{\mathfrak{b}_n/\mathfrak{a}_n} \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{\mathfrak{a}_n}/(2\sqrt{\mathfrak{b}_n}) \\ 1/2 & \sqrt{\mathfrak{a}_n}/(2\sqrt{\mathfrak{b}_n}) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$U_n\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{a}_n \\ \mathfrak{b}_n & 0 \end{pmatrix}U_n^{-1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n} \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Теперь применим эти соотношения к рассматриваемой ситуации. Положим $\mathfrak{a}_n = \pi^2(2n+\theta)^2 a_{-2n-\theta} - c_{12}$ и $\mathfrak{b}_n = \pi^2(2n+\theta)^2 a_{2n+\theta} - c_{21}$. Умножая обе части равенства (4.2) слева на U_n и справа на U_n^{-1}, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - c_{11} & 0 \\ 0 & \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - c_{11} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -\sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n} & 0 \\ 0 & \sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n} \end{pmatrix} + \pi^2(2n+\theta)^2 U_n\mathcal{D}_n U_n^{-1}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Перейдем к оценке последнего члена в (4.7). Мы будем использовать теорему 10 для случая $\theta \in \{0, 1\}$. В этом случае непосредственными вычислениями заключаем, что $d_n = 1/(4\pi^2(2n-1+\theta))$. Кроме того, мы будем пользоваться следующим равенством:

$$P_n(\tilde{B}\Gamma_m X_*)P_n = P_n(X_* - \tilde{B})P_n, \tag{4.8}$$

которое непосредственно следует из (1.16) для оператора $\tilde{B}$. Применяя формулы (1.15), (4.1) и (4.8), для $n \geq n_0$ мы получим

$$\begin{aligned} \left\|U_n\mathcal{D}_n U_n^{-1}\right\|_* \leq \|U_n\|_* \left\|U_n^{-1}\right\|_* \|\mathcal{D}_n\|_* \leq C\left\|\mathbb{P}_n(X_* - \tilde{B})\mathbb{P}_n\right\|_* \leq \\ \leq \frac{C}{4\pi^2(2n-1+\theta)}\left\|\mathbb{P}_n\tilde{B} - \mathbb{P}_n\tilde{B}P_n\right\|_* \left\|\tilde{B}\mathbb{P}_n - \mathbb{P}_n\tilde{B}\mathbb{P}_n\right\|_* \leq \frac{C\tilde{\alpha}(2n+\theta)\tilde{\beta}(n)}{n} = \frac{C\eta_n}{n}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $n_0 = \max\{m+1, (3\|B\|_* + 2\pi^2(1-\theta))/(4\pi^2)\}$ и (η_n) – суммируемая последовательность (как произведение двух суммируемых с квадратом последовательностей).

Далее, действуя аналогичным образом как при доказательстве формулы (2.11) леммы 4, имеем $|c_{11}| = |(B_1\Gamma_m B_1 e_{-n-\theta}, e_{-n-\theta})| \le Cn\|a\|_{L_2}\tilde{\alpha}(2n+\theta), \quad n \ge m+1$. Напомним, что последовательность $(\tilde{\alpha}(2n+\theta))$ является суммируемой с квадратом. Аналогичным образом оцениваются элементы c_{12} и c_{21}. В силу того, что коэффициенты Фурье a_s, $s \in \mathbb{Z}$, также суммируемы с квадратом, то $\mathfrak{a}_n$ и $\mathfrak{b}_n$ имеют тот же порядок, что и элемент c_{11}. Таким образом, из оценки (4.9) следует, что $c_{11} \pm \sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n}$ выделяется в отдельное асимптотическое слагаемое.

Наконец, из формул (4.2), (4.7) и (4.9), мы имеем

$$\left|\tilde{\lambda}_n^{\pm} - \lambda_n - \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 + c_{11} \pm \sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n}\right| \le Cm\eta_n,$$

где $\mathfrak{a}_n = \pi^2(2n+\theta)^2 a_{-2n-\theta} - c_{12}$ и $\mathfrak{b}_n = \pi^2(2n+\theta)^2 a_{2n+\theta} - c_{21}$. Это доказывает формулу (0.5). Теорема доказана.

Следствие 1 непосредственно следует из теоремы 5.

Доказательство теоремы 6 проводится аналогичным образом, как и доказательство теоремы 4.

Перейдем к последнему результату, который посвящен асимптотическому представлению полугруппы операторов с генератором $-L_\theta$, $\theta \in \{0,1\}$. Все необходимые понятия теории полугрупп можно найти в [33].

Теорема 14. *Оператор* $-L_\theta$, $\theta \in \{0,1\}$, *является секториальным и генерирует аналитическую полугруппу операторов* $T: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End} L_2[0,1]$. *Эта полугруппа подобна полугруппе вида* $\widetilde{T}(t) = \widetilde{T}_{(m)}(t) \oplus \widetilde{T}^{(m)}(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, *действующей в* $L_2[0,1] = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}$, *где* $\mathcal{H}_{(m)} = \operatorname{Im}\mathbb{P}_{(m)}$, $\mathcal{H}^{(m)} = \operatorname{Im}(I - \mathbb{P}_{(m)})$. *При этом полугруппа* $\tilde{T}^{(m)}: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}^{(m)}$ *допускает следующее асимптотическое представление*:

$$\begin{gathered}\tilde{T}^{(m)}(t)x = \sum_{n\ge m+1} e^{-t(\pi^4(2n+\theta)^4 + \pi^2(2n+\theta)^2 a_0 - c_{11} + (d_1+d_4)n/2)}\left\{\operatorname{ch}\rho t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} -\right.\\ \left. -\frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}\begin{pmatrix}\sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n} + (d_4-d_1)n/2 & nd_2\\ nd_3 & -\sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n} + (d_1-d_4)n/2\end{pmatrix}\right\}\mathbb{P}_n x, \quad x \in L_2[0,1],\end{gathered} \tag{4.10}$$

где $\mathfrak{a}_n = \pi^2(2n+\theta)^2 a_{-2n-\theta} - c_{12}$, $\mathfrak{b}_n = \pi^2(2n+\theta)^2 a_{2n+\theta} - c_{21}$ *и* $\rho = ((\sqrt{\mathfrak{a}_n\mathfrak{b}_n} + (d_4-d_1)n/2)^2 + n^2 d_2 d_3)^{1/2}$. *Кроме того,* c_{ij}, $i,j = 1,2$, *определяются формулами* (4.3)–(4.6) *и* d_i, $i = 1,2,3,4$, *являются суммируемыми последовательностями*.

Доказательство. Первая часть теоремы была установлена в [26, теорема 8]. Докажем асимптотическое представление (4.10). Для этого мы будем использовать следующую формулу для полугруппы, генератором которой является матрица размером 2×2 (см. [28, Гл. 1, разд. 6]):

$$e^{t\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}} = e^{t(a+d)/2}\left\{\operatorname{ch}\rho t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{\operatorname{sh}\rho t}{\rho}\begin{pmatrix}(a-d)/2 & b\\ c & (d-a)/2\end{pmatrix}\right\},$$

где $\rho = \sqrt{(a-d)^2/4 + bc}$.

Непосредственно применяя это представление к формуле (4.7), мы получаем асимптотическое представление (4.10). Теорема доказана.

Замечание 6. Теорема 14 имеет место и в случае $\theta \in (0,2)$, $\theta \ne 1$, и $k = 1$. В этой ситуации представление полугруппы $\tilde{T}^{(m)}: \mathbb{R}_+ \to \operatorname{End}\mathcal{H}^{(m)}$ имеет вид

$$T^{(m)}(t)x = \sum_{|n|\ge m+1} e^{-t\tilde{\lambda}_{n,1}} P_n x,$$

где $x \in L_2[0,1]$ и собственные значения $\tilde{\lambda}_{n,1}$ допускают оценку (0.4).

Автор выражает благодарность А.В. Баданину, С.Е. Пастуховой и А.А. Шкаликову за полезные обсуждения и ценные замечания. Кроме того, автор очень благодарен рецензенту за существенные замечания, позволившие улучшить содержание работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
2. *Birkhoff G.D., Langer R.E.* The boundary-value problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order // Proc. Amer. Acad. 1923. V. 58. P. 51–128.
3. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.
4. *Dunford N.* A survey of the theory of spectral operators // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V. 64. № 5. P. 217–274.
5. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34. № 5. С. 235–236.
6. *Шкаликов А.А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений со спектральным параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И.Г. Петровского. 1983. № 9. С. 190–229.
7. *Шкаликов А.А.* О базисности Рисса собственных и присоединенных функций обыкновенных дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций. М.: Изд-во МГУ, 1984.
8. *Лужина Л.М.* Регулярные спектральные задачи в пространствах вектор-функций // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем. мех. 1988. № 1. С. 31–35.
9. *Велиев О.А.* О несамосопряженных операторах Штурма–Лиувилля с матричными потенциалами // Матем. заметки. 2007. Т. 81. № 4. С. 496–506.
10. *Ускова Н.Б.* О спектральных свойствах оператора Штурма–Лиувилля с матричным потенциалом // Уфимск. матем. журн. 2015. Т. 7. № 3. С. 88–99.
11. *Veliev O.A.* Unifrom convergence of the spectral expansion for a differential operator with periodic matrix coefficients // Bound. Value Probl. 2008. 2008: 628973.
12. *Veliev O.A.* On the differential operators with periodic matrix coefficients // Abstr. Appl. Anal. 2009. Article ID 934905.
13. *Veliev O.A.* On the basis property of the root functions of differential operators with matrix coefficients // Cent. Eur. J. Math. 2011. V. 9. № 3. P. 657–672.
14. *Seref F., Veliev O.A.* On non-self-adjoint Sturm–Liouville operators in the space of vector functions // Math. Notes. 2014. V. 95. № 1–2. P. 180–190.
15. *Баскаков А.Г.* Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов // Сиб. матем. журн. 1983. Т. 24. № 1. С. 21–39.
16. *Баскаков А.Г.* Гармонический анализ линейных операторов. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1987.
17. *Баскаков А.Г., Поляков Д.М.* Метод подобных операторов в спектральном анализе оператора Хилла с негладким потенциалом // Матем. сб. 2017. Т. 208. № 1. С. 3–47.
18. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения с техническими приложениями. М.: Наука, 1968.
19. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972.
20. *Korotyaev E., Lobanov I.* Schrödinger operators on zigzag nanotubes // Ann. Henri Poincare. 2007. V. 8. № 6. P. 1151–1176.
21. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1968.
22. *Баданин А.В., Белинский Б.П.* О колебаниях жидкости в ограниченной полости с пластиной на границе // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1993. Т. 33. № 6. С. 936–944.
23. *Баданин А.В., Коротяев Е.Л.* Спектральные оценки для периодического оператора четвертого порядка // Алгебра и анализ. 2010. Т. 22. № 5. С. 1–48.
24. *Badanin A., Korotyaev E.* Asymptotics for fourth order operators on the circle // J. Math. Anal. Appl. 2014. V. 417. № 2. P. 804–818.
25. *Поляков Д.М.* О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями // Изв. вузов. Матем. 2015. № 5. С. 75–79.
26. *Поляков Д.М.* Спектральный анализ дифференциального оператора четвертого порядка с периодическими и антипериодическими краевыми условиями // Алгебра и Анализ. 2015. Т. 27. № 5. С. 117–152.
27. *Veliev O.A.* On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions // Israel J. Math. 2010. V. 176. P. 195–207.
28. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
29. *Поляков Д.М.* О спектральных характеристиках несамосопряженного оператора четвертого порядка с матричными коэффициентами // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 4. С. 637–642.
30. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
31. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
32. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965.
33. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equation. New-York: Springer-Verlag, 2000.