ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 7, с. 1193–1200

УДК 517.586

АСИМПТОТИКА ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА ПО ИНДЕКСУ В ОКРЕСТНОСТИ $x = 1$. ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ МЕЛЕРА–РЭЛЕЯ

© 2020 г. Л. А. Бакалейников[1,*], Э. А. Тропп[1]

[1] 194021 Санкт-Петербург, Политехническая ул., 26, ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН, Россия

*e-mail: bakal51@mail.ru

Поступила в редакцию 18.10.2019 г.
Переработанный вариант 18.10.2019 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Получена асимптотика полиномов Лежандра $P_n(x)$ по обратным степеням индекса n в окрестности $x = 1$. Показано, что коэффициент асимптотического разложения при n^{-k} представляет собой линейную комбинацию членов вида $\rho^p J_p(\rho)$, $0 \le p \le k$. Продемонстрировано совпадение первых членов полученного разложения с известным разложением полиномов Лежандра вне окрестностей концов интервала $-1 \le x \le 1$ в промежуточном пределе. Полученный результат позволяет записать равномерное разложение полиномов Лежандра по индексу во всем промежутке $[-1,1]$. Библ. 8.

Ключевые слова: полиномы Лежандра, равномерная асимптотика, формула Мелера–Рэлея.

DOI: 10.31857/S0044466920070029

ВВЕДЕНИЕ

Полиномы Лежандра $P_n(x)$ представляют собой важный класс ортогональных систем функций, часто используемый в приложениях. Поведение этих полиномов при $n \to \infty$ представляет значительный интерес. Асимптотическое разложение полиномов Лежандра при больших значениях индекса приведено в монографии Гобсона (см. [1]), первый член разложения дан в книге Н.Н. Лебедева [2]. Однако эти разложения не являются равномерно пригодными на интервале $-1 \le x \le 1$. Они справедливы лишь вне окрестностей концов этого интервала, т.е. при $-1 + \varepsilon \le x \le 1 - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – произвольное малое число. Равномерное разложение функций Лежандра $P_n^{-m}(z)$, $Q_n^{-m}(z)$ при $\alpha = m/(n + 1/2) = \text{const}$, $m \to \infty$, $n \to \infty$ получено в [3], однако эти результаты справедливы лишь при $0 < m < n$. Поведение полинома Лежандра в окрестности края промежутка ортогональности было рассмотрено Мелером в [4], и позднее, независимо от него, Рэлеем в [5]. Они показали, что

$$\lim P_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right) = J_0(\rho), \quad n \to \infty,$$

где J_0 – функция Бесселя порядка 0. В [6] отмечено, что полученная Мелером–Рэлеем формула следует из связи между группой движений плоскости $ISO(2)$ и группой вращений сферы $SO(3)$. Поскольку плоскость можно рассматривать как сферу бесконечного радиуса, то группу $ISO(2)$ можно рассматривать как предел группы $SO(3)$, и функции Бесселя, являющиеся матричными элементами представлений группы $ISO(2)$, должны возникать в результате предельного перехода из матричных элементов $P^l_{m,n}(\cos\theta)$ представлений группы $SO(3)$:

$$\lim P^l_{m,n}\left(\cos\frac{r}{l}\right) = i^{m-n} J_{m-n}(r), \quad l \to \infty.$$

Частным случаем этого равенства при $m = n = 0$ и является формула Мелера–Рэлея.

Исследование поведения ортогональных полиномов вблизи края промежутка ортогональности было предпринято в ряде последующих работ. Так, в [7] результат Мелера–Рэлея был распространен на полиномы Якоби и там же было показано, что похожие асимптотические формулы справедливы для полиномов Лагерра вблизи нуля. В работе [8] формулы похожего типа были получены для полиномов совместной ортогональности. Тем не менее дальнейшие члены асимптотики полиномов Лежандра вблизи края, насколько нам известно, в литературе не приводятся.

В настоящей работе получены следующие члены асимптотики полиномов Лежандра в окрестности $x = 1$, т.е. внутреннее разложение. Показано, что в промежуточном пределе первые два члена асимптотики внутреннего и внешнего разложений совпадают. Найденный результат позволяет записать равномерное разложение $P_n(x)$ во всем промежутке $-1 \le x \le 1$.

1. ПЕРВЫЕ ЧЛЕНЫ ВНУТРЕННЕГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Первые члены асимптотического разложения полиномов Лежандра в окрестности $x = 1$ при больших значениях индекса n можно получить с помощью интегрального представления (см., например, [2])

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Для этого представим $(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n$ в виде

$$(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n = \exp(n\cdot\ln(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)),$$

положим $\theta = \rho/n$, и заменим $\cos(\rho/n)$, $\sin(\rho/n)$ их разложениями. В результате достаточно громоздких выкладок получим

$$(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n = \exp(i\rho\cos\varphi)\exp\left[\frac{1}{n}(-1+\cos^2\varphi)\frac{\rho^2}{2} + \frac{1}{n^2}\frac{1}{3}i\rho^3\cos\varphi(1-\cos^2\varphi) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n^3}\frac{\rho^4}{12}(-1+4\cos^2\varphi - 3\cos^4\varphi) + O(n^{-4})\right].$$

Раскладывая в ряд второй сомножитель, получаем

$$(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n = \exp(i\rho\cos\varphi)\left(w_0(\rho,\varphi) + n^{-1}w_1(\rho,\varphi) + n^{-2}w_2(\rho,\varphi) + n^{-3}w_3(\rho,\varphi) + O(n^{-4})\right),$$

где

$$w_0(\rho,\varphi) = 1,\quad w_1(\rho,\varphi) = \frac{\rho^2}{2}(-1+\cos^2\varphi),\quad w_2(\rho,\varphi) = \frac{i\rho^3}{3}\cos\varphi(1-\cos^2\varphi) + \frac{\rho^4}{8}(-1+\cos^2\varphi)^2,$$

$$w_3(\rho,\varphi) = -\frac{\rho^4}{12}\sin^2\varphi + \frac{\rho^4}{4}\cos^2\varphi\sin^2\varphi - \frac{i\rho^5}{6}\cos\varphi\sin^4\varphi - \frac{\rho^6}{48}\sin^6\varphi.$$

Это дает

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos\theta + i\sin\theta\cos\varphi)^n\,d\varphi = \sum_{k=0}^{3}n^{-k}u_k(\rho) + O(n^{-4}),$$

$$u_k(\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\exp(i\rho\cos\varphi)\,w_k(\rho,\varphi)\,d\varphi.$$

Пользуясь интегральным представлением для функции Бесселя

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)}\int_0^{\pi}\sin^{2\nu}\varphi\cos(z\cos\varphi)\,d\varphi, \tag{1.1}$$

находим

$$u_0(\rho) = J_0(\rho), \tag{1.2}$$

$$u_1(\rho) = -\frac{1}{2}\rho J_1(\rho). \tag{1.3}$$

Коэффициент $u_2(\rho)$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} u_2(\rho) = \frac{\rho^3}{3}\frac{d}{d\rho}\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(i\rho\cos\varphi)\sin^2\varphi d\varphi + \frac{\rho^4}{8\pi}\int_0^\pi \exp(i\rho\cos\varphi)\sin^4\varphi d\varphi = \\ = \frac{\rho^3}{3}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{\rho}J_1(\rho)\right) + \frac{3\rho^2}{8}J_2(\rho) = \frac{\rho^2}{3}\left(-\frac{1}{\rho}J_1(\rho) + J_1'(\rho)\right) + \frac{3\rho^2}{8}J_2(\rho) = \frac{1}{24}\rho^2 J_2(\rho). \end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь использовано свойство

$$-\frac{1}{\rho}J_1(\rho) + J_1'(\rho) = -J_2(\rho),$$

следующее из рекуррентных соотношений для функций Бесселя. Наконец, для $u_3(\rho)$ с учетом (1.1) найдем

$$u_3(\rho) = -\frac{\rho^3}{12}J_1(\rho) - \frac{\rho^4}{4}\frac{d^2}{d\rho^2}\left(\frac{1}{\rho}J_1(\rho)\right) - \frac{\rho^5}{6}\frac{d}{d\rho}\frac{3}{\rho^2}J_2(\rho) - \frac{\rho^6}{48}\frac{15}{\rho^3}J_3(\rho).$$

Выполняя дифференцирование и пользуясь свойствами функций Бесселя, можно показать, что

$$u_3(\rho) = -\frac{1}{12}\rho^2 J_2(\rho) + \frac{1}{48}\rho^3 J_3(\rho). \tag{1.5}$$

Таким образом, формулы (1.2)–(1.5) дают явные выражения для первых коэффициентов разложения полиномов Лежандра по обратным степеням индекса n в окрестности $x = 1$. Видно, что коэффициент $u_0(\rho)$ совпадает с найденным ранее в работах [4], [5].

2. ОБЩИЙ ВИД КОЭФФИЦИЕНТОВ ВНУТРЕННЕГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Для исследования общего вида коэффициентов асимптотического разложения воспользуемся уравнением для полиномов Лежандра, которое имеет вид

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{du}{d\theta} + n(n+1)\sin\theta\cdot u = 0.$$

Перейдем в этом уравнении к переменной $\rho = n\theta$ и представим решение в виде ряда по обратным степеням индекса n

$$u(\rho) = P_n(\cos(\rho/n)) = \sum_{p=0}^\infty u_p(\rho)n^{-p}. \tag{2.1}$$

Раскладывая $\sin\theta = \sin\dfrac{\rho}{n}$ в ряд, получаем

$$\frac{d}{d\rho}\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\rho^{2k+1}}{n^{2k+1}}\frac{d\sum_{p=0}^\infty u_p(\rho)n^{-p}}{d\rho} + \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{\rho^{2k+1}}{n^{2k+1}}\sum_{p=0}^\infty u_p(\rho)n^{-p} = 0. \tag{2.2}$$

Из (2.2) видно, что коэффициенты разложения $u_k(\rho)$ удовлетворяют цепочке уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\rho}\rho\frac{du_k}{d\rho} + \rho u_k = F_k(\rho), \\ F_k(\rho) = -\sum_{i=1}^{[k/2]}\frac{d}{d\rho}\rho^{2i+1}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\frac{du_{k-2i}}{d\rho} - \sum_{i=1}^{[k/2]}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\rho^{2i+1}u_{k-2i} - \sum_{i=0}^{[(k-1)/2]}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\rho^{2i+1}u_{k-1-2i}. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Граничные условия для $u_k(\rho)$ находятся из условий

$$u(0) = P_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right)\Big|_{\rho=0} = 1, \quad u'(0) = -\frac{1}{n}P_n'\left(\cos\frac{\rho}{n}\right)\sin\frac{\rho}{n}\Big|_{\rho=0} = 0$$

и имеют вид

$$u_k(0) = \delta_{k,0}, \quad u_k'(0) = 0. \tag{2.4}$$

Легко проверить, что найденные выражения (1.2)–(1.4) удовлетворяют уравнениям (2.3) с граничными условиями (2.4) для $k = 0,1,2,3$. Полученные результаты позволяют утверждать, что коэффициенты $u_k(\rho)$, $k = 1,2,3$, представляют собой линейные комбинации произведений $\rho^l J_l(\rho)$, т.е.

$$u_k(\rho) = \sum_{l=1}^{k} S_{k,l}\rho^l J_l(\rho). \tag{2.5}$$

Предположим, что этот факт верен для всех $u_k(\rho)$, $k \le r-1$, и докажем, что представление (2.5) справедливо и для $k = r$.

Как видно из (2.3), правая часть является функцией $u_j(\rho)$, $j < r$. Покажем, что $F_r(\rho)$ представляет собой линейную комбинацию членов вида $\rho^{p+1}J_p(\rho)$, $p \le r-1$.

Вычислим правую часть (2.3), используя предположение (2.5). Прежде всего легко показать, что

$$\begin{aligned}\left(\rho^{2i+1}u_{r-2i}'(\rho)\right)' = \sum_{l=2}^{r-2i} S_{r-2i,l}[(2i+2)\rho^{2i+1}\rho^{l-1}J_{l-1}(\rho) + \rho^{2i+2}\rho^{l-1}J_{l-2}(\rho)] + \\ + S_{r-2i,1}[(2i+2)\rho^{2i+1}J_0(\rho) - \rho^{2i+2}J_1(\rho)],\end{aligned} \tag{2.6}$$

т.е. $\left(\rho^{2i+1}u_{r-2i}'(\rho)\right)'$ содержат члены вида $\rho^{2i+1}\rho^p J_p(\rho)$. В свою очередь $\rho^{2i+1}\rho^p J_p(\rho)$ могут быть представлены в виде линейной комбинации

$$\rho^{2i+1}\rho^p J_p(\rho) = \sum_{j=i}^{2i} A_{p,i}^j \rho^{p+j+1}J_{p+j}(\rho). \tag{2.7}$$

Докажем это по индукции. Для $i = 0$ это очевидно, при этом $A_{p,0}^0 = 1$. Пусть равенство (2.7) верно для $i = m$. Покажем, что оно будет верно и для $i = m+1$. Действительно,

$$\begin{aligned}\rho^{2m+3}\rho^p J_p(\rho) = \rho^2\rho^{2m+1}\rho^p J_p(\rho) = \sum_{j=m}^{2m} A_{p,m}^j \rho^{p+j+3}J_{p+j}(\rho) = \\ = \sum_{j=m}^{2m} 2(p+j+1)A_{p,m}^j \rho^{p+j+2}J_{p+j+1}(\rho) - \sum_{j=m}^{2m} A_{p,m}^j \rho^{p+j+3}J_{p+j+2}(\rho).\end{aligned}$$

Здесь использовано равенство

$$J_{p+j}(\rho) = \rho^{-1}2(p+j+1)J_{p+j+1}(\rho) - J_{p+j+2}(\rho).$$

Меняя индексы суммирования в полученных суммах, получаем

$$\begin{aligned}\rho^{2m+3}\rho^p J_p(\rho) = \sum_{j'=m+1}^{2m+1} 2(p+j')A_{p,m}^{j'-1}\rho^{p+j'+1}J_{p+j'}(\rho) - \sum_{j''=m+2}^{2m+2} A_{p,m}^{j''-2}\rho^{p+j''+1}J_{p+j''}(\rho) = \\ = \sum_{j=m+1}^{2m+2} A_{p,m+1}^j \rho^{p+j+1}J_{p+j}(\rho),\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$A_{p,m+1}^j = \begin{cases} 2(p+m+1)A_{p,m}^m, & j = m+1, \\ 2(p+j)A_{p,m}^{j-1} - A_{p,m}^{j-2}, & m+2 \le j \le 2m+1, \\ -A_{p,m}^{2m}, & j = 2m+2. \end{cases}$$

Таким образом, равенство (2.7) справедливо и для $i = m+1$, а следовательно, и для любого значения i. Коэффициенты $A_{p,i}^{j}$ могут быть найдены по рекуррентному соотношению (2.8).

Используем (2.7) для дальнейшего преобразования соотношений (2.6). Подстановка (2.7) в (2.6) дает

$$\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)' = \sum_{l=2}^{r-2i} S_{r-2i,l}\left[(2i+2)\sum_{j=i}^{2i} A_{l-1,i}^{j}\rho^{l-1+j+1}J_{l-1+j}(\rho) + \sum_{j=i+1}^{2i+2} A_{l-2,i+1}^{j}\rho^{l-2+j+1}J_{l-2+j}(\rho)\right] +$$

$$+\left[S_{r-2i,1}(2i+2) - S_{r-2i,0}\right]\sum_{j=i}^{2i} A_{0,i}^{j}\rho^{j+1}J_{j}(\rho) - S_{r-2i,1}\sum_{j=i}^{2i} A_{1,i}^{j}\rho^{j+2}J_{j+1}(\rho) - S_{r-2i,0}2i\sum_{j=i-1}^{2i-2} A_{1,i-1}^{j}\rho^{j+2}J_{j+1}(\rho).$$

Меняя порядок суммирования, получаем

$$\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)' = \sum_{h=i+1}^{r+1}\rho^{h}J_{h-1}\left\{\theta[h-(i+2)]\theta(r-h)(2i+2)\sum_{j=\max(i,h-r+2i)}^{\min(h-2,2i)} A_{h-j-1,i}^{j}S_{r-2i,h-j} +\right.$$

$$+\theta[h-(i+2)]\sum_{j=\max(i+1,h+1-r+2i)}^{\min(h-1,2(i+1))} A_{h-j-1,i+1}^{j}S_{r-2i,h-j+1} + \theta(2i+1-h)\left[S_{r-2i,1}(2i+2) - S_{r-2i,0}\right]A_{0,i}^{h-1} -$$

$$\left. -\theta[h-(i+2)]\theta(2i+2-h)S_{r-2i,1}A_{1,i}^{h-2} - \theta(2i-h)2iS_{r-2i,0}A_{1,i-1}^{h-2}\right\}.$$

Правая часть $F_r(\rho)$ содержит также произведения $\rho^{2i+1}u_{r-2i}$, которые можно записать как линейную комбинацию членов вида $\rho^{h}J_{h-1}$:

$$\rho^{2i+1}u_{r-2i}(\rho) = \sum_{l=0}^{r-2i} S_{r-2i,l}\rho^{2i+1}\rho^{l}J_{l} = \sum_{l=0}^{r-2i} S_{r-2i,l}\sum_{j=i}^{2i} A_{l,i}^{j}\rho^{l+j+1}J_{l+j} = \sum_{h=i+1}^{r+1}\rho^{h}J_{h-1}\sum_{j=\max(i,h-r+2i-1)}^{\min(2i,h-1)} S_{k-2i,h-j-1}A_{h-j-1,i}^{j}.$$

Тогда для $\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)' + \rho^{2i+1}u_{r-2i}(\rho)$ имеем

$$\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)' + \rho^{2i+1}u_{r-2i}(\rho) = \sum_{h=i+1}^{r+1} B_{h}^{i,r}\rho^{h}J_{h-1},$$

$$B_{h}^{i,r} = \theta[h-(i+2)]\theta(r-h)(2i+2)\sum_{j=\max(i,h-r+2i)}^{\min(h-2,2i)} A_{h-j-1,i}^{j}S_{r-2i,h-j} + \theta[h-(i+2)]\times$$

$$\times\sum_{j=\max(i+1,h+1-r+2i)}^{\min(h-1,2(i+1))} A_{h-j-1,i+1}^{j}S_{r-2i,h-j+1} + \theta(2i+1-h)\left[S_{r-2i,1}(2i+2) - S_{r-2i,0}\right]A_{0,i}^{h-1} - \theta[h-(i+2)]\times$$

$$\times\theta(2i+2-h)S_{r-2i,1}A_{1,i}^{h-2} - \theta(2i-h)2iS_{r-2i,0}A_{1,i-1}^{h-2} + \sum_{j=\max(i,h-r+2i-1)}^{\min(h-1,2i)} A_{h-j-1,i}^{j}S_{r-2i,h-j-1}.$$

Покажем теперь, что коэффициент $B_{r+1}^{i,r}$ равен нулю. Действительно, выражение $\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)'$ содержит $\rho^{r+1}J_{r-2i-2}(\rho)$ с коэффициентом $S_{r-2i,r-2i}$ (это второй член в скобках в сумме по l при $l = r-2i$ в выражении (2.6)). Остальные члены содержат ρ в меньшей степени. Используем формулу (2.7) для $\rho^{r+1}J_{r-2i-2}(\rho)$:

$$\rho^{r+1}J_{r-2i-2}(\rho) = \rho^{2i+3}\rho^{r-2i-2}J_{r-2i-2}(\rho) = \sum_{j=i+1}^{2i+2} A_{r-2i-2,i+1}^{j}\rho^{r-2i+j-1}J_{r-2i-2+j}(\rho).$$

Коэффициент при $\rho^{r+1}J_r(\rho)$ в этом выражении есть $A_{r-2i-2,i+1}^{2(i+1)}$, значение которого, как видно из рекуррента для $A_{p,i+1}^{2(i+1)}$, равно $(-1)^{i+1}$. Поэтому коэффициент при $\rho^{r+1}J_r(\rho)$ в $\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)'$ равен $S_{r-2i,r-2i}(-1)^{i+1}$.

С другой стороны, в выражении

$$\rho^{2i+1}u_{r-2i}(\rho) = \sum_{l=0}^{r-2i} S_{r-2i,l}\rho^{2i+1}\rho^l J_l = \sum_{l=0}^{r-2i} S_{r-2i,l}\sum_{j=i}^{2i} A_{l,i}^j \rho^{l+j+1} J_{l+j} = \sum_{h=i+1}^{r+1} \rho^h J_{h-1} \sum_{j=\max(i,h-r+2i-1)}^{\min(2i,h-1)} S_{r-2i,h-j-1}A_{h-j-1,i}^j$$

коэффициент при $\rho^{r+1}J_r(\rho)$ есть

$$\sum_{j=\max(i,2i)}^{\min(2i,r)} S_{r-2i,r-j}A_{r-j,i}^j = S_{r-2i,r-2i}A_{r-j,i}^{2i} = S_{r-2i,r-2i}(-1)^i.$$

Поэтому коэффициент $B_{r+1}^{i,r}$ равен нулю, и

$$\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)' + \rho^{2i+1}u_{r-2i}(\rho) = \sum_{h=i+1}^{r} B_h^{i,r}\rho^h J_{h-1}.$$

Наконец, преобразуем члены вида $\rho^{2i+1}u_{r-2i-1}(\rho)$:

$$\rho^{2i+1}u_{r-2i-1}(\rho) = \sum_{l=0}^{r-2i-1} S_{r-2i-1,l}\rho^{2i+1}\rho^l J_l = \sum_{l=0}^{r-2i-1} S_{r-2i-1,l}\sum_{j=i}^{2i} A_{l,i}^j\rho^{l+j+1}J_{l+j} =$$

$$= \sum_{h=i+1}^{r}\rho^h J_{h-1}\sum_{j=\max(i,h-r+2i)}^{\min(2i,h-1)} S_{r-2i-1,h-j-1}A_{h-j-1,i}^j = \sum_{h=i+1}^{r} C_h^{i,r}\rho^h J_{h-1}.$$

Теперь для вычисления правой части $F_r(\rho)$ надо умножить $\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)' + \rho^{2i+1}u_{r-2i}(\rho)$ и $\rho^{2i+1}u_{r-2i-1}(\rho)$ на $\dfrac{(-1)^i}{(2i+1)!}$ и суммировать в первом случае от 1 до $[r/2]$, во втором – от 0 до $[(r-1)/2]$. При этом получаем

$$\sum_{i=1}^{[r/2]}\left[\left(\rho^{2i+1}u'_{r-2i}(\rho)\right)' + \rho^{2i+1}u_{r-2i}(\rho)\right]\frac{(-1)^i}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^{[(r-1)/2]}[\rho^{2i+1}u_{r-2i-1}(\rho)]\frac{(-1)^i}{(2i+1)!} =$$

$$= \sum_{i=1}^{[r/2]}\sum_{h=i+1}^{r} B_h^{i,r}\rho^h J_{h-1}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!} + \sum_{i=0}^{[(r-1)/2]}\sum_{h=i+1}^{r} C_h^{i,r}\rho^h J_{h-1}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!} =$$

$$= \sum_{h=2}^{r}\rho^h J_{h-1}\left(\sum_{i=1}^{[r/2]}\theta(h-(i+1))\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}B_h^{i,r}\right) + \sum_{h=1}^{r}\rho^h J_{h-1}\left(\sum_{i=0}^{[(r-1)/2]}\theta(h-(i+1))\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}C_h^{i,r}\right).$$

Отсюда следует, что $F_r(\rho)$ представляет собой линейную комбинацию $\rho^h J_{h-1}$:

$$F_r(\rho) = \sum_{h=1}^{r} P_{r,h}\rho^h J_{h-1},$$

$$P_{r,h} = -\theta(h-2)\sum_{i=1}^{[r/2]}\theta[h-(i+1)]\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}B_h^{i,r} - \sum_{i=0}^{[(r-1)/2]}\theta[h-(i+1)]\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}C_h^{i,r}.$$

Легко показать, что уравнение (2.3) с правой частью $\rho^p J_{p-1}(\rho)$ имеет решением функцию

$$u^p = \frac{1}{2p}\rho^p J_p(\rho).$$

В силу линейности уравнения решение $u_r(\rho)$ имеет вид

$$u_r(\rho) = \sum_{h=1}^{r}\frac{P_{r,h}}{2h}\rho^h J_h(\rho).$$

Таким образом, представление (2.5) справедливо для $k = r$, и, следовательно, для всех k. Заметим, что решение в виде (2.5) удовлетворяет граничным условиям.

3. ПОСТРОЕНИЕ РАВНОМЕРНОГО АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

Продемонстрируем совпадение в промежуточном пределе первых двух членов полученного асимптотического разложения (2.1) в окрестности $x = 1$,

$$P_n\left[\cos\left(\frac{\rho}{n}\right)\right] = J_0(\rho) - \frac{1}{2n}\rho J_1(\rho) + O(n^{-2}),$$

с первыми двумя членами разложения, справедливого вне окрестностей концов интервала $[-1,1]$. Первые два члена этого разложения приведены в [1] и имеют вид

$$P_n(\cos\theta) = \left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{1/2}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\theta\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\right\} + O(n^{-5/2}). \tag{3.1}$$

Выберем $\rho \to \infty$, $n \to \infty$, $\theta = \rho / n \to 0$. Подставим $\theta = \rho / n$ в (3.1) и разложим $\sin\dfrac{\rho}{n}$ и $\operatorname{ctg}\dfrac{\rho}{n}$ в ряд. Тогда

$$P_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right) = \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2}\left\{\left(1-\frac{1}{4n}\right)\cos\left(\rho+\frac{\rho}{2n}-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8\rho}\left[1+O\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right)\right]\cos\left(\rho+\frac{\rho}{2n}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\left[1+O\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right)\right].$$

Используя малость $\rho/2n$ в аргументах синуса и косинуса, находим

$$\cos\left(\rho+\frac{\rho}{2n}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\rho}{2n}\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right),$$

$$\sin\left(\rho+\frac{\rho}{2n}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\rho}{2n}\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right),$$

что приводит к

$$P_n\left(\cos\frac{\rho}{n}\right) = \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2}\left[\left(1-\frac{3}{16n}\right)\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{8\rho}-\frac{\rho}{2n}\right)\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)\right][1+o(1)].$$

С другой стороны, используя асимптотику функций Бесселя в виде

$$J_0(\rho) = \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8\rho}\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + O(\rho^{-2})\right],$$

$$J_1(\rho) = \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2}\left[\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{8\rho}\cdot\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) + O(\rho^{-2})\right]$$

находим

$$\begin{aligned}P_n(\cos(\rho/n)) &= J_0(\rho) - \frac{1}{2n}\rho J_1(\rho) + O\left(\frac{\rho^2}{n^2}\right) = \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2}\left\{\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{8\rho}\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) - \right.\\ &\left. - \frac{\rho}{2n}\left[\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{3}{8\rho}\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}[1+o(1)] = \\ &= \left(\frac{2}{\pi\rho}\right)^{1/2}\left[\left(1-\frac{3}{16n}\right)\cos\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{1}{8\rho}-\frac{\rho}{2n}\right)\sin\left(\rho-\frac{\pi}{4}\right)\right][1+o(1)].\end{aligned}$$

Таким образом, первые два члена внутреннего и внешнего асимптотических разложений совпадают в промежуточном пределе.

Заметим, что вследствие свойства

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

легко получить разложение полинома Лежандра в окрестности $x = -1$. При этом θ близко к π и можно ввести $\xi = n(\pi - \theta)$. Тогда получим

$$P_n\left[\cos\left(\pi - \frac{\xi}{n}\right)\right] = P_n\left[-\cos\left(\frac{\xi}{n}\right)\right] = (-1)^n P_n\left[\cos\left(\frac{\xi}{n}\right)\right] = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} u_k(\xi) n^{-k}.$$

Наконец, первые два члена равномерного в интервале $[-1,1]$ разложения можно записать в виде

$$P_n(\cos\theta) = \left(\frac{2}{n\pi\sin\theta}\right)^{1/2} \left\{\left(1 - \frac{1}{4n}\right)\cos\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right] + \frac{1}{8n}\operatorname{ctg}\theta\sin\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta - \frac{\pi}{4}\right]\right\} +$$
$$+ J_0(n\theta) - \frac{1}{2}\theta J_1(n\theta) - \left(\frac{2}{\pi n\theta}\right)^{1/2} \left\{\left(1 - \frac{3}{16n}\right)\cos\left(n\theta - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8n\theta}\right)\sin\left(n\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right\} +$$
$$+ (-1)^n\left\{J_0[n(\pi - \theta)] - \frac{1}{2}(\pi - \theta)J_1[n(\pi - \theta)]\right\} - (-1)^n\left[\frac{2}{\pi n(\pi - \theta)}\right]^{1/2} \times$$
$$\times\left\{\left(1 - \frac{3}{16n}\right)\cos\left[n(\pi - \theta) - \frac{\pi}{4}\right] - \left[\frac{(\pi - \theta)}{2} - \frac{1}{8n(\pi - \theta)}\right]\sin\left[n(\pi - \theta) - \frac{\pi}{4}\right]\right\} + O(n^{-2}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952.
2. *Лебедев Н.Н.* Специальные функции и их приложения. М.: Физматлит, 1963.
3. *Thorne R.C.* The asymptotic expansion of Legendre functions of large degree and order // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1957. V. 249. P. 597–620.
4. *Mehler F.G.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1868. V. 68. P. 134.
5. *Rayleigh J.S.* Proc. London Math. Soc. 1878. V. 9. P. 61.
6. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
7. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматлит, 1962.
8. *Van Assche W.* Mehler–Heine asymptotics for multiple orthogonal polynomials // Proc. Amer. Math. Soc. 2017. V. 145. P. 303–314.