ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 7, с. 1143–1150

УДК 519.85

ЭВРИСТИЧЕСКИЙ АДАПТИВНЫЙ БЫСТРЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ[1)]

© 2020 г. А. В. Огальцов[1], А. И. Тюрин[1,*]

[1] *101000 Москва, ул. Мясницкая, 20, НИУ ВШЭ, Россия*

**e-mail: atyurin@hse.ru*

Поступила в редакцию 07.10.2019 г.
Переработанный вариант 12.11.2019 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

Приводится эвристический стохастический адаптивный ускоренный градиентный метод. Показывается, что на практике предложенный алгоритм имеет высокую скорость сходимости по сравнению с популярными сейчас методами оптимизации. Кроме того, приводится обоснование данного метода и описываются трудности, которые не позволяют на данный момент получить оптимальные оценки для предложенного алгоритма. Библ. 28. Фиг. 1.

Ключевые слова: быстрый градиентный метод, стохастическая оптимизация, адаптивная оптимизация.

DOI: 10.31857/S004446692007008X

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе представлен эвристический алгоритм стохастической оптимизации, который является обобщением быстрого градиентного метода [1]. Методы стохастической оптимизации в последнее время являются популярными по той причине, что они позволяют уменьшать сложность подсчета градиента, что является очень важным, так как существуют примеры функций, в которых невозможно за разумное время подсчитать градиент оптимизируемой функции хотя бы в одной точке [2], [3]. Помимо этого, в задачах стохастической оптимизации [4] в силу формулировки самой задачи единственный разумный способ получить направление спуска – это сэмлирование векторов, которые имеют несмещенные по отношению к истинному градиенту направления. Данный подход также популярен в глубинном обучении [3], в задачах, которые имеют вид суммы функций [4]. Стоит подчеркнуть, что сложность подсчета стохастического градиента, как правило, можно регулировать. Отметим, что неускоренный вариант предложенного алгоритма имеется в работе [5].

Задача по поиску адаптивного быстрого градиентного метода со стохастическим градиентом по-прежнему является актуальной. Насколько нам известно, данная проблема является нерешенной. Отметим, что в данном направлении активно идет работа. В работе [6] предложили метод, который одновременно хорошо работает на гладких и негладких задачах, однако, данный метод не является ускоренным, шаг метода выбирается таким образом, что он не возрастает, в то время, как в нашем методе шаг метода подбирается адаптивно, может возрастать и убывать. В работе [7] предложили объединить стохастический неускоренный градиентный метод и правило Армихо [8], в результате авторы доказали, что их метод имеет скорость сходимости неускоренного градиентного метода, но это им удалось, используя специальные предположения об оптимизационной задаче. В работе [9] предложено доказательство вариации метода Adagrad [10] для случая, когда функция гладкая и невыпуклая, но как и в [6] шаг метода не возрастает, т.е. метод не является полностью адаптивным, не настраивается на локальную гладкость. Аналогичная проблема возникает в работах [11], [12], но только там авторы предлагают ускоренные варианты градиентного метода и более гибкие шаги внутри алгоритмов, в работе [12] методы зависят от оценки расстояния от начальной точки до оптимальной точки (размерности решения). Большую работу по поиску адаптивного стохастического быстрого градиентного метода сделали в работе [13]. В данной работе предложен адаптивный стохастический метод для вариационных неравенств,

[1)]Работа А.И. Тюрина выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 19-31-90062 Аспиранты.

доказательство сходимости которого основано на теории эмпирических процессов [14], [15]. Отметим, что неускоренный градиентный метод является частным случаем метода, решающего вариационные неравенства, в то время как ускоренный градиентный метод получить из работы [13] нельзя. Кроме того, в [13] есть ограничение на максимальное значение шага метода, что немного упрощает анализ предложенных в [13] алгоритмов.

К сожалению, нам пока так и не удалось получить теоретические оценки для предложенного метода. В данной работе приведены эксперименты (см. раздел 4), которые показывают, что в задачах машинного обучения с логистической регрессией, нейронной сетью и сверточной нейронной сетью предложенный алгоритм имеет более быструю скорость сходимости, чем Adagrad [10] и Adam [16]. Кроме того, в разд. 3 мы приводим некоторое обоснование нашего алгоритма и объясняем некоторые детали, которые нам не позволяют до конца доказать сходимость метода в оптимальной форме.

2. АДАПТИВНЫЙ БЫСТРЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД

Опишем сначала общую постановку задачи выпуклой оптимизации [1]. Пусть определена функция $f(x): Q \to \mathbb{R}$ и дана произвольная норма $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$. Сопряженная норма определяется следующим образом:

$$\|\lambda\|_* \overset{\text{def}}{=} \max_{\|v\|\le 1; v\in\mathbb{R}^n} \langle \lambda, v\rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Будем полагать, что

1) $Q \subseteq \mathbb{R}^n$, выпуклое, замкнутое;

2) $f(x)$ – непрерывная, гладкая и выпуклая функции на Q;

3) $f(x)$ ограничена снизу на Q и достигает своего минимума в некоторой точке (необязательно единственной) $x_* \in Q$.

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$f(x) \to \min_{x\in Q}.$$

Введем два понятия: прокс-функция и дивергенция Брэгмана [17].

Определение 1. $d(x)$: $Q \to \mathbb{R}$ называется прокс-функцией, если $d(x)$ непрерывно дифференцируемая на $\operatorname{int} Q$ и $d(x)$ является 1-сильно выпуклой относительно нормы $\|\cdot\|$ на $\operatorname{int} Q$.

Определение 2. Дивергенцией Брэгмана называется

$$V(x,y) \overset{\text{def}}{=} d(x) - d(y) - \langle \nabla d(y), x - y\rangle,$$

где $d(x)$ – произвольная прокс-функция.

Определение 3. Стохастическим (δ, L)-оракулом будем называть оракул, который на запрашиваемую точку $y \in Q$ дает пару $(f_\delta(y), \nabla f_\delta(y;\xi))$ такую, что

$$0 \le f(x) - f_\delta(y) - \langle \nabla f_\delta(y), x - y\rangle \le \frac{L}{2}\|x - y\|^2 + \delta \quad \forall x \in Q,$$

$$\mathbb{E}[\nabla f_\delta(y;\xi)] = \nabla f_\delta(y) \quad \forall y \in Q,$$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{\|\nabla f_\delta(y;\xi) - \nabla f_\delta(y)\|_*^2}{\sigma^2}\right)\right] \le \exp(1) \quad \forall y \in Q,$$

где $\sigma^2 > 0$ и ξ – произвольная случайная величина.

Отметим, что концепция стохастического (δ, L)-оракула основана на концепции (δ, L)-оракула [18]–[20].

Замечание 1. В определении 3 можно дополнительно потребовать случайность не только градиента, но и самой функции, т.е., чтобы стохастический (δ, L)-оракул возвращал вместо неслучайного $f_\delta(y)$ значения функции некоторое случайное значение $f_\delta(y;\xi)$.

Определим константу R_Q такую, что

$$R_Q \geq \max_{x,y\in Q}\|x-y\|.$$

Будем считать, что $R_Q < \infty$.

В методе, который мы предложим далее, будем оценивать истинный градиент на каждом шаге с помощью некоторого количества $\nabla f_\delta(y;\xi_j)$, $j \in [1\ldots m_{k+1}]$, используя технику mini-batch (см., например, [21]).

Обозначим

$$\tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_{k+1}}\sum_{j=1}^{m_{k+1}} \nabla f_\delta(y;\xi_j). \tag{1}$$

Пусть κ – константа регулярности из [22] для $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$. Для некоторых простых случаев верно следующее: если $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_2$, то $\kappa = 1$. Более того, если $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|_q$, $q \in [2,\infty]$, то $\kappa = \min[q-1, 2\ln(n)]$. Сделаем следующее обозначение: $\widetilde{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} 2\kappa + 4\Omega\sqrt{\kappa} + 2\Omega^2$.

Далее будет использоваться в алгоритме константа $L_0 \geq 0$, которая имеет смысл предположительной “локальной”, константы Липшица градиента в точке x_0. Рассмотрим адаптивный зеркальный вариант метода подобных треугольников со стохастическим (a, L)-оракулом.

Алгоритм 1 (Теоретический вариант)

Дано: x_0 – начальная точка, ϵ – желаемая точность решения, δ, L – константы из (δ, L)-оракула, β – доверительный уровень, L_0 $(L_0 \leq L)$, σ^2 – константа из определения 3.

Алгоритм: Возьмем

$$N := \left\lceil \frac{2\sqrt{3}\sqrt{L}R_Q}{\sqrt{\epsilon}} \right\rceil, \quad \Omega := \sqrt{6\ln\frac{N}{\beta}}.$$

0-шаг:

$$y_0 := x_0, \quad u_0 := x_0, \quad \alpha_0 := 0, \quad A_0 := \alpha_0.$$

k + 1-шаг:

$$j_{k+1} := 0.$$

Пока не выполнится неравенство

$$f_\delta(x_{k+1}) \leq f_\delta(y_{k+1}) + \left\langle \tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1}), x_{k+1}-y_{k+1}\right\rangle + \frac{L_{k+1}}{2}\|x_{k+1}-y_{k+1}\|^2 + \frac{3\sigma^2\widetilde{\Omega}}{L_{k+1}m_{k+1}} + \delta \tag{2}$$

повторять:

$$L_{k+1} := 2^{j_{k+1}-1}L_k, \quad \alpha_{k+1} := \frac{1+\sqrt{1+4A_kL_{k+1}}}{2L_{k+1}}, \quad A_{k+1} := A_k + \alpha_{k+1},$$

$$y_{k+1} := \frac{\alpha_{k+1}u_k + A_kx_k}{A_{k+1}}, \quad m_{k+1} := \left\lceil \frac{3\sigma^2\tilde{\Omega}\alpha_{k+1}}{\epsilon} \right\rceil.$$

Сгенерировать i.i.d. ξ_j $(j = 1,\ldots,m_{k+1})$ и посчитать $\tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1})$.

$$\phi_{k+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} V(x,u_k) + \alpha_{k+1}\left(f_\delta(y_{k+1}) + \left\langle \tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1}), x-y_{k+1}\right\rangle\right)$$

$$u_{k+1} := \operatorname*{argmin}_{x\in Q}\phi_{k+1}(x), \quad x_{k+1} := \frac{\alpha_{k+1}u_{k+1} + A_kx_k}{A_{k+1}}, \quad j_{k+1} := j_{k+1}+1.$$

Конец алгоритма.

Гипотеза 1. *Пусть x_* – ближайшая точка минимума к точке x_0 в смысле дивергенции Брэгмана, точность $\delta = \mathbb{O}(\epsilon^{3/2})$. Тогда для предложенного алгоритма с вероятностью $1 - \mathbb{O}(\beta)$ выполнено равенство*

$$f(x_N) - f(x_*) = \mathbb{O}(\epsilon).$$

3. ОБОСНОВАНИЕ АЛГОРИТМА

Приведем обоснование данного алгоритма. Предложенный алгоритм базируется на следующих градиентных методах [5], [20], [23]. Для **адаптивного** быстрого градиентного метода с (δ, L)-оракулом можно получить следующие оценки сходимости [5], [20], [23]:

$$f(x_N) - f(x_*) \leq \mathbb{O}\left(\frac{LR_Q^2}{N^2} + N\delta\right).$$

В то время, как для **стохастического** быстрого градиентного метода с (δ, L)-оракулом можно получить оценки вида [20]:

$$f(x_N) - f(x_*) \leq \mathbb{O}\left(\frac{LR_Q^2}{N^2} + \frac{\sigma R_Q}{\sqrt{N}}\right).$$

Соответственно ожидаемая оценка для **адаптивного стохастического** быстрого градиентного метода с (δ, L)-оракулом должна иметь вид

$$f(x_N) - f(x_*) \leq \mathbb{O}\left(\frac{LR_Q^2}{N^2} + N\delta + \frac{\sigma R_Q}{\sqrt{N}}\right).$$

Основная проблема по доказательству гипотезы 1, которая возникает в данный момент, связана с проблемой “выборки с отклонением” [24]. В доказательствах методов оптимизации со стохастическим градиентом (см. (1)) ключевым образом используется тот факт, что стохастический градиент имеет несмещенное математическое ожижание по отношению к настоящему градиенту. В алгоритме из разд. 2 это не так. Стоит обратить внимание, что наш метод является адаптивным и настраивается на локальную гладкость, делая проверку (2). Получается, что во внутреннем цикле, когда мы подбираем шаг метода, мы сначала генерируем mini-batch, а затем mini-batch проверяем на то, подходит ли он в неравенстве (2). Таким образом, мы неявно делаем процедуру “выборки с отклонением” [24] и соответственно возникает смещение сгенерированного стохастического градиента.

Стоит отметить, что возникали различные попытки перестроения алгоритма, но нам так и не удалось решить проблему “выборки с отклонением”.

В алгоритме 1 из разд. 2 в процедуре подбора параметра L_{k+1} мы каждый раз генерируем мини-батч. Возможный способ решения проблемы “выборки с отклонением” – это генерировать мини-батч один раз до процедуры подбора параметра L_{k+1} (см. алгоритм 2 из разд. 4). К сожалению, данный способ описания алгоритма приводит к другой проблеме. По аналогии с [20] в процессе доказательства возникает выражение вида

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \left\langle \tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1}) - \nabla f_\delta(y_{k+1}), x - u_k \right\rangle.$$

Основной задачей является найти некоторые хорошие оценки сверху на данную сумму. В работе [20] данные оценки получены и доказано, что с “большой вероятностью” верно следующее неравенство:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_{k+1} \left\langle \tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1}) - \nabla f_\delta(y_{k+1}), x - u_k \right\rangle \leq \mathbb{O}\left(\frac{\sigma R_Q}{\sqrt{N}}\right).$$

Для доказательства данного неравенства использовались неравенства типа Азума–Хефдинга ([20], [25], Лемма 7.11) и тот факт, что α_{k+1} являются неслучайными и условное математическое ожидание мини-батча равно настоящему градиенту. Для случая, когда мы один раз фиксируем мини-батч, возникает проблема с тем, что α_{k+1} получаются случайные и скоррелированные с ми-

ни-батчем, поэтому стандартные неравенства типа Азума–Хефдинга ([20], Лемма 7.11) нам применить не удается.

В следующем разделе мы проводим численные эксперименты на различных задачах оптимизации. Мы показываем, что на практике практический вариант предложенного алгоритма (см. алгоритм 2 из разд. 4) работает лучше, чем популярные алгоритмы Adagrad [10] и Adam [16].

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Начнем с описания отличия теоретического варианта (алгоритм 1) и практического варианта (алгоритм 2).

1. На практике мы не всегда можем знать константу L и более того константа R_Q может быть не ограничена, поэтому заранее точно определить N из алгоритма 1 мы не можем, поэтому на практике будем предполагать, что $\tilde{\Omega} = 1$.

2. В практическом варианте константу m_{k+1} мы оцениваем, используя L_k, а не константу L_{k+1}. Это позволяет нам эффективнее делать подбор параметра L_{k+1} за счет того, что количество m_{k+1} слагаемых при подсчете mini-batch не меняется.

3. Для многих классов оптимизируемых функций, которые включают в себя логистическую регрессию, нейронные сети и сверточные нейронные сети, сложность подсчета функции имеет тот же порядок сложности, что и подсчет градиента [26]. Соответственно значение функции так же оценивается, используя технику mini-batch (см. замечание 1):

$$f_\delta^{m_{k+1}}(y) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{m_{k+1}} \sum_{j=1}^{m_{k+1}} \nabla f_\delta(y; \xi_j).$$

Теоретические рассмотрения предыдущих глав статьи приводят к практической версии алгоритма 2. Было проведено три серии экспериментов. Оптимизация всех функций происходила относительно евклидовой нормы $\|\cdot\|_2$ с $V(x,y) = \frac{1}{2}\|x-y\|_2^2$, множество $Q = \mathbb{R}^n$. Начальные параметры алгоритма 2 для всех экспериментов оставались одинаковыми: верхняя оценка дисперсии градиента $\sigma_0^2 = 0.1$, точность $\epsilon = 0.002$, константа $L_0 = 1$. В экспериментах использовались следующие наборы данных.

1. MNIST [27], состоящий из изображений рукописных цифр размера 28×28 пикселей.

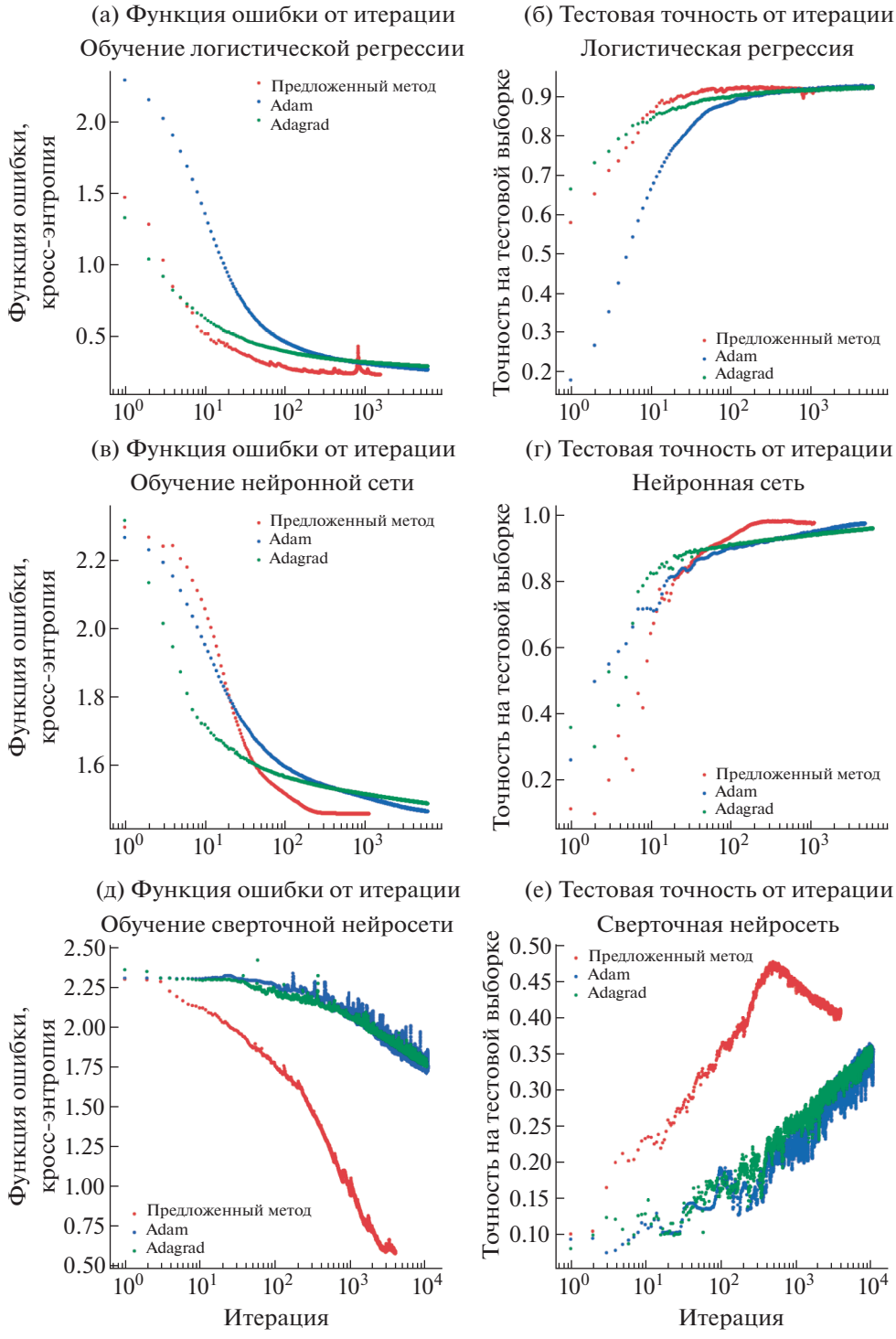
2. CIFAR [28], состоящий из цветных изображений размера $3 \times 32 \times 32$ пикселей, каждое из которых принадлежит к одному из 10 классов.

В первых двух сериях экспериментов использовался набор данных MNIST. Эксперименты заключаются в обучении логистической регрессии (линейный классификатор с выпуклой функцией потерь) и двухслойной нейронной сети с размером скрытых слоев 1000 (нелинейный классификатор с невыпуклой функцией потерь). В случае логистической регрессии количество оптимизируемых параметров равнялось 7850, а в случае двухслойной нейронной сети уже 795010. Оптимизация проводилась при помощи предложенного алгоритма, а также при помощи наиболее распространенных на сегодняшний день адаптивных алгоритмов Adam [16] и AdaGrad [10]. Для Adagrad и Adam использовались стандартные параметры: размер батча 128, $lr = 0.001$. Сравнение проводилось по скорости изменения функции потерь от итерации обучения и по изменению точности классификации на тестовой выборке. Результаты сравнения для логистической регрессии находятся на фиг. 1а, б, а для нейронной сети на фиг. 1в, г. В обоих случаях предложенный метод превосходит упомянутые выше как по скорости сходимости функции ошибки, так и по достигнутой точности.

В третьей серии экспериментов небольшая сверточная нейронная сеть обучалась предсказанию класса картинки на наборе данных CIFAR. Использовалась следующая архитектура сверточной нейросети.

1. По матрице изображения ($3 \times 32 \times 32$) проходим окном свертки размера $3 \times 6 \times 5$. Веса свертки являются настраиваемыми параметрами.

2. После свертки по полученному изображению проходит так называемый MaxPooling – это окно размера 2×2, которое оставляет максимальный попавший в него элемент, а остальные зануляет.



Фиг. 1. Численные эксперименты.

3. Далее снова проходим по результату предыдущего шага окном свертки размера $6 \times 16 \times 5$.

4. Далее идут три последовательных полносвязных слоя с убывающим размером: 400, 120, 84.

Общее число параметров данной нейросети – 62000. В этой серии экспериментов результаты работы предложенного метода также сравнивались с Adagrad и Adam (фиг. 1д, е). Алгоритм 2 также показал лучшие результаты.

Алгоритм 2 (Практический вариант)

Дано: x_0 – начальная точка, константы $\epsilon > 0$, $L_0 > 0$ и $\sigma_0^2 > 0$.

Алгоритм:

0-шаг:

$$y_0 := x_0, \quad u_0 := x_0, \quad \alpha_0 := 0, \quad A_0 := \alpha_0.$$

k + 1-шаг:

$$\tilde{\alpha}_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4A_k L_k}}{2L_k}, \quad m_{k+1} := \left\lceil \frac{3\sigma_0^2 \tilde{\alpha}_{k+1}}{\epsilon} \right\rceil, \quad j_{k+1} := 0,$$

сгенерировать i.i.d. ξ_j $(j = 1, \ldots, m_{k+1})$.

Пока не выполнится неравенство

$$f_\delta^{m_{k+1}}(x_{k+1}) \le f_\delta^{m_{k+1}}(y_{k+1}) + \left\langle \tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1}), x_{k+1} - y_{k+1} \right\rangle + \frac{L_{k+1}}{2}\|x_{k+1} - y_{k+1}\|^2 + \frac{\epsilon}{L_{k+1}\alpha_{k+1}} \tag{3}$$

повторять:

$$L_{k+1} := 2^{j_{k+1}-1} L_k, \quad \alpha_{k+1} := \frac{1 + \sqrt{1 + 4A_k L_{k+1}}}{2L_{k+1}}, \quad A_{k+1} := A_k + \alpha_{k+1},$$

$$y_{k+1} := \frac{\alpha_{k+1} u_k + A_k x_k}{A_{k+1}}.$$

Посчитать $\tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1})$ и $f_\delta^{m_{k+1}}(y_{k+1})$:

$$\phi_{k+1}(x) \overset{\text{def}}{=} V(x, u_k) + \alpha_{k+1}\left(f_\delta^{m_{k+1}}(y_{k+1}) + \left\langle \tilde{\nabla}^{m_{k+1}} f_\delta(y_{k+1}), x - y_{k+1} \right\rangle\right)$$

$$u_{k+1} := \operatorname*{argmin}_{x \in Q} \phi_{k+1}(x), \quad x_{k+1} := \frac{\alpha_{k+1} u_{k+1} + A_k x_k}{A_{k+1}}, \quad j_{k+1} := j_{k+1} + 1.$$

Посчитать $f_\delta^{m_{k+1}}(x_{k+1})$.

Конец алгоритма.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. М.: МЦНМО, 2010. 262 с.
2. *Goodfellow I., Bengio Y., Courville A.* Deep learning. MIT press. 2016.
3. *Krizhevsky A., Sutskever I., Hinton G.* Imagenet classification with deep convolutional neural networks // In Advances in neural information processing systems. 2012. P. 1097–1105.
4. *Гасников А.В., Двуреченский П.Е., Усманова И.Н.* О нетривиальности быстрых (ускоренных) рандомизированных методов // Труды МФТИ. 2016. Т. 8. № 2. С. 67–100.
5. *Гасников А.В.* Современные численные методы оптимизации. Метод универсального градиентного спуска // e-print. arXiv:1711.00394. 2018.
6. *Bach F., Levy K.Y.* A universal algorithm for variational inequalities adaptive to smoothness and noise // COLT, 2019.
7. *Vaswani S., Mishkin A., Laradji I., Schmidt M., Gidel G., Lacoste-Julien S.* Painless Stochastic Gradient: interpolation, line-search, and convergence rates // NIPS, 2019.
8. *Nocedal J., Wright S.* Numerical optimization. Springer Science & Business Media. 2006.
9. *Ward R., Wu X., Bottou L.* AdaGrad stepsizes: sharp convergence over nonconvex landscapes, from any initialization // ICML, 2019.
10. *Duchi J., Hazan E., Singer Y.* Adaptive subgradient methods for online learning and stochastic optimization // Journal of Machine Learning Research. 2011. V. 12. № Jul. P. 2121–2159.
11. *Deng Q., Cheng Y., Lan G.* Optimal adaptive and accelerated stochastic gradient descent // e-print. arXiv:1810.00553. 2018.
12. *Levy K.Y., Yurtsever A., Cevher V.* Online adaptive methods, universality and acceleration // NIPS, 2018.
13. *Iusem A.N., Jofre A., Oliveira R.I., Thompson P.* Variance-based extragradient methods with line search for stochastic variational inequalities // SIAM J. Optimizat. 2019. V. 29. № 1. P. 175–206.

14. *Boucheron S., Lugosi G., Massart P.* Concentration inequalities: A nonasymptotic theory of independence. Oxford University Press. 2013.
15. *Panchenko D.* Symmetrization approach to concentration inequalities for empirical processes // The Annals of Probability. 2003. V. 31. № 4. P. 2068–2081.
16. *Kingma D.P., Ba J.* Adam: a method for stochastic optimization // ICLR, 2015.
17. *Gupta M.D., Huang T.* Bregman distance to l1 regularized logistic regression // ICPR, 2008.
18. *Devolder O., Glineur F., Nesterov Yu.* First-order methods with inexact oracle: the strongly convex case // CORE Discussion Paper 2013/16. 2013. URL: https://www.uclouvain.be/cps/ucl/doc/core/documents/coredp2013_16web.pdf.
19. *Devolder O., Glineur F., Nesterov Yu.* First-order methods of smooth convex optimization with inexact oracle // Math. Program. 2014. V. 146. № 1–2. P. 37–75.
20. *Devolder O.* Exactness, inexactness and stochasticity in first-order methods for largescale convex optimization. PhD thesis. CORE UCL, 2013.
21. *Li M., Zhang T., Chen Y., Smola A.J.* Efficient mini-batch training for stochastic optimization // ACM, 2014.
22. *Juditsky A., Nemirovski A.* Large deviations of vector-valued martingales in 2-smooth normed spaces // e-print. arXiv:0809.0813. 2008.
23. *Gasnikov A., Tyurin A.* Fast gradient descent for convex minimization problems with an oracle producing a (δ, L)-model of function at the requested point // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2019. V. 59. № 7. P. 1085–1097.
24. *Robert C., Casella G.* Monte Carlo statistical methods. Springer Science & Business Media. 2013.
25. *Lan G., Nemirovski A., Shapiro A.* Validation analysis of mirror descent stochastic approximation method // Math. Program. 2012. V. 134. № 2. P. 425–458.
26. *Griewank A.* On automatic differentiation // Mathematical Programming: recent developments and applications. 1989. V. 6. № 6. P. 83–107.
27. *LeCun Y., Bottou L., Bengio Y., Haffner P.* Gradient-based learning applied to document recognition // Proceedings of the IEEE. 1998. V. 86. № 11. P. 2278–2324.
28. *Krizhevsky A.* Learning Multiple Layers of Features from Tiny Images. PhD thesis. University of Toronto, 2009.