

УДК 519.63

НЕВЯЗКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ НЕСЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПОДАТЛИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© 2020 г. И. В. Савенков

119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

e-mail: isavenkov@mail.ru

Поступила в редакцию 19.05.2019 г.
Переработанный вариант 15.12.2019 г.
Принята к публикации 10.03.2020 г.

В рамках асимптотической теории свободного взаимодействия изучена неустойчивость несжимаемого пограничного слоя над податливой пластиной по отношению к невязким возмущениям. Показано, что неустойчивые невязкие возмущения могут существовать только при учете инерционности пластины. Обнаружена важная роль, играемая изгибной жесткостью пластины: при приближении к некоторому значению изгибной жесткости неустойчивость может становиться сколь угодно большой, однако при дальнейшем увеличении изгибной жесткости неустойчивость полностью исчезает, как только изгибная жесткость достигает некоторой пороговой величины. Библ. 18. Фиг. 10.

Ключевые слова: несжимаемый пограничный слой, неустойчивость, волны Толлмина–Шлихтинга, податливая поверхность, инерционность, изгибная жесткость, продольное натяжение, асимптотические разложения, теория свободного взаимодействия.

DOI: 10.31857/S0044466920070091

ВВЕДЕНИЕ

Податливые поверхности стали объектом довольно пристального внимания с ранних экспериментов [1], в которых было показано, что значительное затягивание процесса ламинарно-турбулентного перехода может быть достигнуто путем замены жесткой поверхности на деформируемую. Последовавшие исследования в рамках линейной теории устойчивости (см., например, [2]–[5]) показали, что инкременты нарастания неустойчивых волн в пограничном слое на податливой поверхности действительно могут быть меньше, чем на жесткой поверхности.

Несмотря на прогресс, достигнутый к настоящему времени (см. [6]–[9] и ссылки в них), остается немало вопросов из-за сложности уравнений, описывающих взаимодействие течения с податливой поверхностью. Первая сложность вызвана тем, что характерные числа Рейнольдса, при которых происходит ламинарно-турбулентный переход, довольно высоки, так что в уравнениях движения появляется малый параметр при старшей производной. Вторая сложность связана с большим числом параметров, характеризующим свойства податливой поверхности, к числу которых относятся ее инерционность, упругость, продольное натяжение и изгибная жесткость, так что трудно выявить характерные закономерности при таком обилии параметров.

Первую сложность можно преодолеть, используя концепцию свободно взаимодействующего пограничного слоя (см. [10]–[12]), справедливую при высоких числах Рейнольдса. Чтобы обойти вторую сложность, можно зафиксировать все параметры податливой поверхности (или пренебречь ими), кроме одного, и смотреть, как течение реагирует на изменение этого параметра. В рамках такого подхода в ряде работ и изучалась неустойчивость несжимаемого пограничного слоя на базе концепции свободного взаимодействия: в [13] изучалось влияние упругости, в [14] – продольного натяжения и изгибной жесткости, в [15] – инерционности.

Во всех перечисленных выше работах (см. [13], [14] и [15]) рассматривались локально-вязкие возмущения. В настоящей работе рассматриваются локально-невязкие возмущения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерное обтекание податливой пластины равномерным потоком несжимаемой жидкости плотности ρ_∞^* и вязкости μ_∞^* со скоростью U_∞^* . Введем ортогональную систему координат, поместив ее начало на некотором расстоянии L^* от передней кромки и направив ось x^* вниз по потоку. Введем малый параметр $\varepsilon = R^{-1/8}$, считая число Рейнольдса $R = \rho_\infty^* U_\infty^* L^* / \mu_\infty^*$ очень большим. Здесь и далее звездочками вверху обозначаются размерные величины.

Пусть на пластину локально воздействует внешнее давление $\Delta p^* \sim \delta^2 \rho_\infty^* U_\infty^{*2}$ на участке $\Delta x^* \sim \varepsilon^4 / \delta L^*$ с характерным временем $\Delta t^* \sim \varepsilon^4 / \delta^2 L^* / U_\infty^*$, вызывая локальные деформации стенки высотой $\Delta y^* \sim \varepsilon^4 \delta L^*$, где малый параметр δ таков, что $\varepsilon \ll \delta \ll 1$. Тогда возмущенное движение можно описать с помощью концепции свободного взаимодействия (см. [10]–[12]), развитой применительно к локально-невязким возмущениям (см., например, [16]). Согласно этой теории, вся область течения разбивается на следующие четыре характерные области.

1.1. Основная толща пограничного слоя

В основной толще пограничного слоя, т.е. на расстояниях $y^* = R^{-1/2} L^* Y_m$ от стенки ($Y_m = O(1)$), течение в пограничном слое будет лишь слабозмущенным:

$$u^*/U_\infty^* = U_0 + \delta u_{1m} + \dots, \quad v^*/U_\infty^* = \delta^2 v_{1m} + \dots, \quad (p^* - p_\infty^*)/\rho_\infty^* U_\infty^{*2} = \delta^2 p_{1m} + \dots, \quad (1.1)$$

где $U_0(Y_m)$ – профиль продольной компоненты скорости основного течения и функции с индексами $1m$ зависят от безразмерных переменных

$$t = \delta^2 \varepsilon^{-4} U_\infty^* t^* / L^*, \quad x = \delta \varepsilon^{-4} (x^* - L^*) / L^*, \quad Y_m = \varepsilon^{-4} y^* / L^*.$$

Время t и продольная координата x будут “сквозными” для всех областей взаимодействия, тогда как поперечная координата меняется при переходе между ними.

После подстановки (1.1) в уравнения Навье–Стокса и тривиального интегрирования имеем

$$u_{1m} = A_1(t, x) \frac{dU_0}{dY_m}, \quad v_{1m} = -\frac{\partial A_1}{\partial x} U_0(Y_m), \quad p_{1m} = p_{1m}(t, x), \quad (1.2)$$

где функции $A_1(t, x)$ и $p_{1m}(t, x)$ пока остаются произвольными. Заметим, что функция $A_1(t, x)$ имеет физический смысл мгновенного смещения линий тока в основной толще пограничного слоя.

1.2. Нелинейный слой

В силу предельного поведения $U_0 = \lambda_1 Y_m + \dots$ ($\lambda_1 = \text{const}$) при $Y_m \rightarrow 0$ разложения (1.1) нарушаются вблизи стенки: при $Y_m = O(\delta)$ первые два слагаемых в разложении для u^* становятся величинами одного порядка. Поэтому в нижнем подслое с $Y_a = \delta^{-1} Y_m = \delta^{-1} \varepsilon^{-4} y^* / L^* \sim 1$ возмущения становятся нелинейными, а ряды (1.1) трансформируются в

$$u^*/U_\infty^* = \delta u_{1a} + \dots, \quad v^*/U_\infty^* = \delta^3 v_{1a} + \dots, \quad (p^* - p_\infty^*)/\rho_\infty^* U_\infty^{*2} = \delta^2 p_{1a} + \dots, \quad (1.3)$$

где все функции с индексом $1a$ зависят от аргументов t, x, Y_a . Подстановка (1.3) в уравнения Навье–Стокса ведет к системе

$$\frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial p_{1a}}{\partial Y_a} = 0, \quad \frac{\partial u_{1a}}{\partial t} + u_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial x} + v_{1a} \frac{\partial u_{1a}}{\partial Y_a} = -\frac{\partial p_{1a}}{\partial x}, \quad (1.4)$$

в которой, в отличие от классической системы Прандтля, отсутствует член $\partial^2 u_{1a} / \partial Y_a^2$.

Сращивание разложений (1.1) и (1.3) с учетом решения (1.2) ведет к предельному условию

$$u_{1a} - \lambda_1 Y_a \rightarrow \lambda_1 A_1(t, x) \quad \text{при} \quad Y_a \rightarrow \infty. \quad (1.5)$$

Если предположить, что пограничный слой был изначально невозмущенным, то можно выписать точное решение системы (1.4), удовлетворяющее граничному условию (1.5):

$$u_{1a} = \lambda_1 Y_a + \lambda_1 A_1(t, x), \quad v_{1a} = -\frac{\partial A_1}{\partial t} - \lambda_1 Y_a \frac{\partial A_1}{\partial x} - \lambda_1 A_1 \frac{\partial A_1}{\partial x} - \frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial p_{1a}}{\partial x}. \quad (1.6)$$

Учитывая условие непротекания на стенке

$$v^* = \frac{\partial F^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial F^*}{\partial x^*} \quad \text{при} \quad Y^* = F^*(t^*, x^*) = \varepsilon^4 \delta L^* F_1(t, x),$$

преобразующееся в безразмерных переменных в

$$v_{1a} = \frac{\partial F_1}{\partial t} + u_{1a} \frac{\partial F_1}{\partial x} \quad \text{при} \quad Y_a = F_1(t, x),$$

из (1.6) получаем одно уравнение движения:

$$\frac{\partial(A_1 + F_1)}{\partial t} + \lambda_1(A_1 + F_1) \frac{\partial(A_1 + F_1)}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda_1} \frac{\partial p_{1a}}{\partial x}, \quad (1.7)$$

связывающее три неизвестные функции: $A_1(t, x)$, $p_{1a}(t, x)$ и $F_1(t, x)$.

1.3. Вязкий подслой

Нетрудно видеть, что решение (1.6) не удовлетворяет условиям прилипания на стенке (должно быть $u_{1a} = 0$ при $Y_a = 0$), из-за чего требуется ввести вязкий подслой со своими асимптотическими разложениями следующего вида:

$$u^*/U_\infty^* = \delta u_{1l} + \dots, \quad v^*/U_\infty^* = \delta^3 \left(\frac{\partial F_1}{\partial t} + u_{1l} \frac{\partial F_1}{\partial x} \right) + \delta \varepsilon^2 v_{1l} + \dots, \quad (p^* - p_\infty^*)/\rho_\infty^* U_\infty^{*2} = \delta^2 p_{1l} + \dots,$$

где функции с нижним индексом l зависят от переменных t , x и $Y_l = \delta \varepsilon^{-6} (y^* - F^*)/L^*$. Подстановка этого разложения в уравнения Навье–Стокса ведет к классической системе Прандтля

$$\frac{\partial u_{1l}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1l}}{\partial Y_l} = 0, \quad \frac{\partial p_{1l}}{\partial Y_l} = 0, \quad \frac{\partial u_{1l}}{\partial t} + u_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial x} + v_{1l} \frac{\partial u_{1l}}{\partial Y_l} = -\frac{\partial p_{1l}}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_{1l}}{\partial Y_l^2}. \quad (1.8)$$

Сращивание разложений (1.3) и (1.8) дает

$$p_{1l}(t, x) = p_{1a}(t, x) \quad \text{и} \quad u_{1l}(t, x, Y_l) \rightarrow A_1 \quad \text{при} \quad Y_l \rightarrow \infty,$$

откуда видно, что в данном случае вязкий подслой играет пассивную роль: решение (1.8) с соответствующими граничными условиями ($u_{1l}(t, x, 0) = 0, v_{1l}(t, x, 0) = 0$) определяется после нахождения функций $A_1(t, x)$ и $p_{1a}(t, x)$. Мы оставляем в стороне вопросы существования и единственности полной нелинейной задачи, формулирующейся на базе уравнений (1.8), поскольку в дальнейшем мы будем изучать только линеаризованные уравнения.

1.4. Внешняя область

В этой области течения, примыкающей сверху к пограничному слою, введем следующие асимптотические разложения:

$$u^*/U_\infty^* = 1 + \delta^2 u_{1u} + \dots, \quad v^*/U_\infty^* = \delta^2 v_{1u} + \dots, \quad (p^* - p_\infty^*)/\rho_\infty^* U_\infty^{*2} = \delta^2 p_{1u} + \dots \quad (1.9)$$

с функциями, зависящими от t , x и $Y_u = \delta \varepsilon^{-4} y^*/L^*$.

Подстановка разложений (1.9) в уравнения Навье–Стокса ведет к уравнению Лапласа для давления

$$\partial^2 p_{1u}/\partial x^2 + \partial^2 p_{1u}/\partial Y_u^2 = 0 \quad (1.10)$$

со следующими зависимостями:

$$u_{1u} = -p_{1u}, \quad \partial v_{1u}/\partial x = -\partial p_{1u}/\partial Y_u. \quad (1.11)$$

Сращивание разложений (1.9) и (1.1) с учетом (1.10) и (1.11) дает так называемое условие свободного взаимодействия, связывающее давление $p_{1a}(t, x)$ с функцией $A_1(t, x)$:

$$p_{1a}(t, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A_1(t, \xi) / \partial \xi}{x - \xi} d\xi. \tag{1.12}$$

1.5. Податливая поверхность

Будем считать, что податливая поверхность описывается моделью Крамера (см. [1]), тогда уравнение движения такой поверхности принимает следующий вид:

$$p^* - p_0^* = -K^*F^* + T^*\partial^2 F^* / \partial x^{*2} - B^*\partial^4 F^* / \partial x^{*4} - \rho_s^* h_s^* \partial^2 F^* / \partial t^{*2} - d^* \partial F^* / \partial t^*, \tag{1.13}$$

где K^* , T^* , B^* , d^* , ρ_s^* и h_s^* – коэффициент упругости, продольное натяжение, изгибная жесткость, коэффициент демпфирования, плотность и толщина обтекаемой пластины соответственно, а p_0^* – внешнее давление под пластиной. В данной работе мы будем пренебрегать эффектами демпфирования, положив $d^* = 0$. С учетом этого уравнение движения пластины в безразмерных переменных принимает следующий вид:

$$\gamma_1 \partial^2 F_1 / \partial t^2 - \alpha_1 \partial^2 F_1 / \partial x^2 + \beta_1 \partial^4 F_1 / \partial x^4 + K_1 F_1 = -p_{1a}(t, x) + p_0(t, x), \tag{1.14}$$

где безразмерные коэффициенты определяются следующим образом:

$$\gamma = \delta^3 \varepsilon^{-4} \frac{\rho_s^* h_s^*}{\rho_\infty^* L^*}, \quad \alpha_1 = \delta \varepsilon^{-4} \frac{T^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2} L^*}, \quad \beta_1 = \delta^3 \varepsilon^{-12} \frac{B^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2} L^{*3}}, \quad K_1 = \delta^{-1} \varepsilon^4 \frac{K^* L^*}{\rho_\infty^* U_\infty^{*2}}.$$

В дальнейшем будем считать их величинами порядка единицы.

Таким образом, мы получили три уравнения: (1.7), (1.12) и (1.14) для трех неизвестных функций F_1 , A_1 и p_{1a} . Сделаем еще аффинное преобразование

$$t = \lambda_1^{-3/2} T, \quad x = \lambda_1^{-5/4} X, \quad A_1 = \lambda_1^{-3/4} A, \quad F_1 = \lambda_1^{-3/4} F, \quad p_{1a} = \lambda_1^{1/2} P,$$

позволяющее избавиться от константы λ_1 , после чего эти уравнения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} - \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} + \beta \frac{\partial^4 F}{\partial X^4} + KF = -(P(T, X) - P_0(T, X)), \\ \frac{\partial(A + F)}{\partial T} + (A + F) \frac{\partial(A + F)}{\partial X} = -\frac{\partial P}{\partial X}, \quad P(T, X) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial A(T, \xi) / \partial \xi}{X - \xi} d\xi, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где параметры $\alpha = \lambda_1^{-1/2} \alpha_1$, $\beta = \lambda_1^2 \beta_1$ и $K = \lambda_1^{-3} K_1$.

2. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Изучим собственные малые колебания течения, линеаризовав систему (1.15) по малому амплитудному параметру $\delta_1 \rightarrow 0$ и положив внешнее давление $P_0 = 0$

$$(F, P, A) = \delta_1 (F', P', A'). \tag{2.1}$$

Выделив в явном виде гармоническую зависимость

$$(F', P', A') = (\bar{F}, \bar{P}, \bar{A}) \exp(i\omega t + ikx),$$

получаем следующее уравнение относительно ω :

$$(\omega + k|k|)(\gamma\omega^2 + \Lambda) - |k|\omega = 0,$$

где $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$ зависит только от волнового числа k и является параметром, если рассматривать k в качестве параметра. Нетрудно видеть, что решения этого уравнения обладают свойством $\omega(-k) = c.c.\omega(k)$ (где $c.c.$ означает операцию комплексного сопряжения), в силу чего доста-

точно ограничиться рассмотрением только диапазона $k \geq 0$. Полагая далее $k \geq 0$ и переходя для удобства к переменной $\omega_0 = i\omega$, получаем кубическое уравнение относительно ω_0 :

$$(\omega_0 - k^2)(\gamma\omega_0^2 - \Lambda) + k\omega_0 = 0. \quad (2.2)$$

При $\gamma = 0$ это уравнение вырождается в линейное с явным решением:

$$\omega_0 = k^2 / (1 - k/\Lambda),$$

из которого видно, что в этом случае ω_0 всегда остается действительной величиной, что отвечает нейтральным колебаниям.

Следовательно, неустойчивость может появиться только в случае $\gamma \neq 0$, т.е. инерционность обтекаемой поверхности существенна для возникновения неустойчивости в несжимаемом пограничном слое относительно невязких возмущений. Ранее такой же вывод в рамках теории свободного взаимодействия был сделан при анализе возмущенного движения в трубе с упругими стенками [17]. На важность нестационарных членов в уравнении, описывающем поведение податливой пластины, также было указано в работе [18] применительно к сверхзвуковому пограничному слою, где в рамках теории свободного взаимодействия было получено, что неустойчивость может возникать лишь при учете инерционности и/или демпфирования обтекаемой поверхности.

Итак, для дальнейшего существенно, что $\gamma \neq 0$. Далее, путем аффинного преобразования

$$\begin{aligned} \omega_0 &\rightarrow \gamma^{-2/3}\omega_0, & k &\rightarrow \gamma^{-1/3}k, & \Lambda &\rightarrow \gamma^{-1/3}\Lambda, \\ K &\rightarrow \gamma^{-1/3}K, & \alpha &\rightarrow \gamma^{1/3}\alpha, & \beta &\rightarrow \gamma\beta, \end{aligned} \quad (2.3)$$

можно избавиться от коэффициента γ в уравнении (2.2), которое тогда принимает вид

$$(\omega_0 - k^2)(\omega_0^2 - \Lambda) + k\omega_0 = 0. \quad (2.4)$$

В дальнейшем будем считать такое преобразование выполненным и исследовать решения уравнения (2.4), представляющего собой кубическое уравнение с вещественными коэффициентами. Как хорошо известно, все три корня такого уравнения вещественны в том и только в том случае, если дискриминант $D \geq 0$ (в случае $D = 0$ два корня совпадают), где в данном случае имеем

$$D = 4\left(\frac{1}{3}k^4 - k + \Lambda\right)^3 - 27\left(\frac{2}{27}k^6 - \frac{1}{3}k^3 - \frac{2}{3}\Lambda k^2\right)^2. \quad (2.5)$$

В случае $D < 0$ уравнение (2.4) имеет один вещественный и два комплексно сопряженных корня, один из которых (с $\text{Im } \omega_0 > 0$) будет неустойчивым, а второй (с $\text{Im } \omega_0 < 0$) – устойчивым. Таким образом, неустойчивость течения определяется знаком D : течение неустойчиво при таких и только таких значениях волнового числа k , когда $D(k) < 0$.

2.1. Чисто упругая инерционная пластина

Начнем исследование неустойчивости с более простого случая, когда $\alpha = \beta = 0$, что соответствует чисто упругой инерционной пластине. В этом случае $\Lambda = K$, и уравнение (2.4) принимает вид

$$(\omega_0 - k^2)(\omega_0^2 - K) + k\omega_0 = 0. \quad (2.6)$$

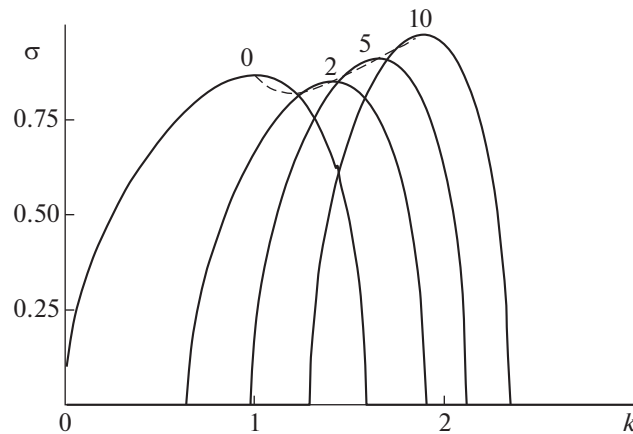
Если теперь положить $K = 0$, то (2.6) вырождается в квадратное уравнение с явными решениями:

$$\omega_{0,1} \equiv 0, \quad \omega_{0,2} = \frac{-k^2 + i\sqrt{4k - k^4}}{2}, \quad \omega_{0,3} = \frac{-k^2 - i\sqrt{4k - k^4}}{2},$$

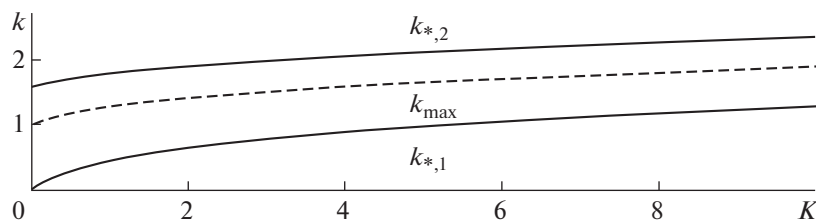
откуда видно, что неустойчивые колебания существуют только в диапазоне $0 < k < k_* = 2^{2/3}$, когда

$$\text{Im } \omega_{0,2} = \sqrt{4k - k^4} > 0,$$

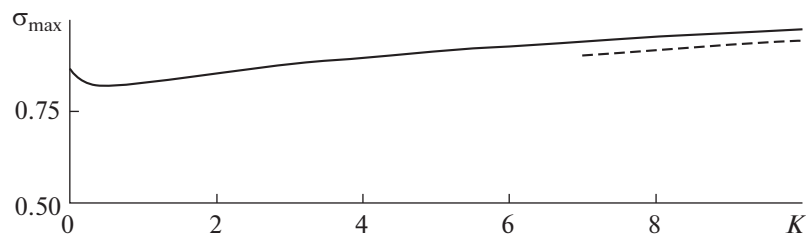
причем в точках функции $\sigma(k) = \text{Im } \omega_{0,2}(k)$ (равно как и $\text{Re } \omega_{0,2}(k)$) претерпевает излом. И, как показывают расчеты, выполненные по формуле Кардано для кубического уравнения, такой харак-



Фиг. 1.



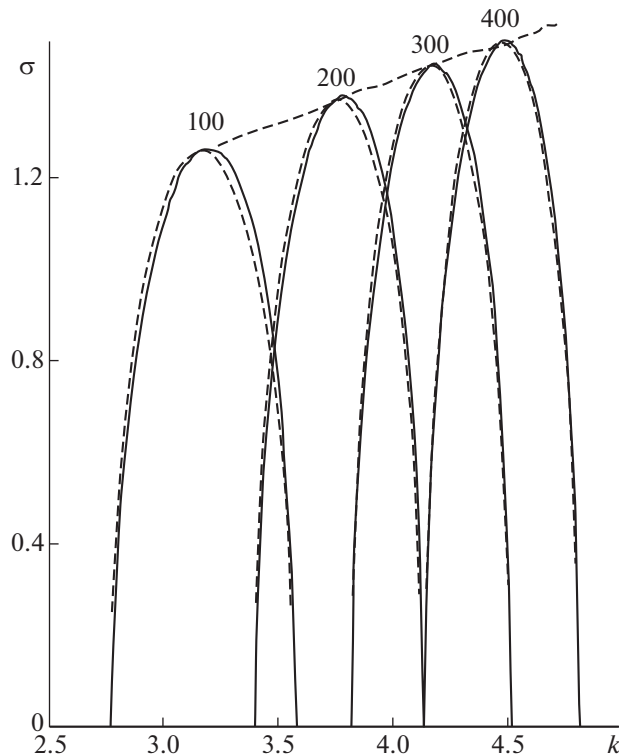
Фиг. 2.



Фиг. 3.

тер поведения сохраняется и при $K > 0$: неустойчивость существует только в некотором диапазоне $k_{*,1} < k < k_{*,2}$, причем в точках $k = k_{*,1}$ и $k = k_{*,2}$ происходит излом функций $\text{Im } \omega_{0,2}(k)$ и $\text{Re } \omega_{0,2}(k)$, что иллюстрирует фиг. 1, на котором представлены зависимости инкремента нарастания $\sigma(k) = \text{Im } \omega_{0,2}(k)$ для $K = 0, 2, 5$ и 10 . Отметим также, что с увеличением K область неустойчивости $k_{*,1} < k < k_{*,2}$ все время смещается в коротковолновую зону со все большими волновыми числами k , что иллюстрирует фиг. 2 с рассчитанными зависимостями $k_{*,1}(K)$ и $k_{*,2}(K)$. При этом наиболее неустойчивые волны из окрестности k_{max} остаются примерно посередине области неустойчивости (фиг. 2).

Что касается максимального инкремента нарастания $\sigma_{\text{max}}(K) = \max_{-\infty < k < \infty} \sigma(k; K = \text{const})$, то с увеличением K он сначала немного проседает до 0.82 (при $K = 0.5$), но затем все время увеличивается вплоть до 0.97 при $K = 10$ (см. фиг. 3). Однако вариация σ_{max} на участке $0 < K < 10$ составляет не более 15%, следовательно, можно говорить о весьма слабой зависимости неустойчивости от коэффициента упругости K в рамках рассматриваемой модели (параметрическая кривая $\sigma_{\text{max}}(k_{\text{max}})$ изображена на фиг. 1 штриховой линией).



Фиг. 4.

Хотя представленная здесь теория справедлива при значениях всех параметров (в частности, коэффициента упругости K) порядка единицы, интересно проследить тенденцию неустойчивости при дальнейшем увеличении $K > 10$ (этот анализ может послужить и базой для других асимптотических теорий). Перейдя к переменной k' по формуле

$$k = K^{1/4} + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{-1/8} k'$$

нетрудно получить следующее асимптотическое решение уравнения (2.6) в пределе $K \rightarrow \infty$:

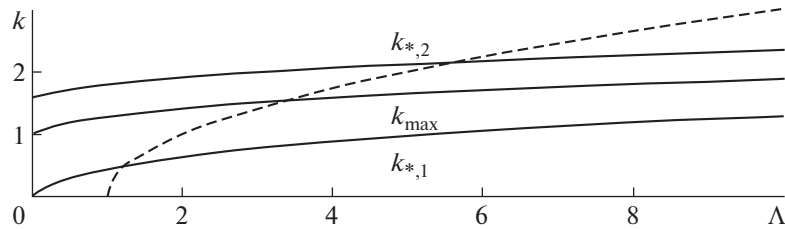
$$\omega_{0,1} = K^{1/2} + \sqrt{2} K^{1/8} k' + \dots, \quad \omega_{0,2,3} = K^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{1/8} k' \pm i \frac{1}{\sqrt{2}} K^{1/8} \sqrt{1 - (k')^2} + \dots, \quad (2.7)$$

откуда видно, что второй корень $\omega_{0,2}$ является неустойчивым при $|k'| < 1$ и имеют место следующие асимптотические оценки при $K \rightarrow \infty$:

$$k_{*,1} \sim K^{1/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} K^{-1/8}, \quad k_{\max} \sim K^{1/4}, \quad k_{*,2} \sim K^{1/4} + \frac{1}{\sqrt{2}} K^{-1/8}, \quad \sigma_{\max} \sim \frac{1}{\sqrt{2}} K^{1/8}. \quad (2.8)$$

Интересно отметить, что тогда как смещение неустойчивости в сторону все больших k продолжает отмеченную ранее тенденцию, зона неустойчивости $k_{*,2} - k_{*,1} \sim \sqrt{2} K^{-1/8}$ все больше сужается с ростом K . Оценка (2.8) также говорит о том, что с ростом K течение становится все более неустойчивым, что соответствует тенденции, прослеживаемой по фиг. 3. Асимптотическая зависимость (2.8) для σ_{\max} отмечена на фиг. 3 штриховой линией.

На фиг. 4 представлены как точные решения уравнения (2.6) для $\sigma(k) = \text{Im } \omega_{0,2}(k)$, так и асимптотические оценки (2.7), видно, что асимптотика (штриховая линия) выходит на точное решение (сплошная линия) при $K \approx 100$, а при $K = 400$ практически сливается с ним. Штриховая линия, соединяющая вершины парабол на фиг. 4, является асимптотической зависимостью $\sigma_{\max}(k_{\max}) = \sqrt{k_{\max}/2}$, следующей из (2.8).



Фиг. 5.

2.2. Общий случай – предварительные замечания

Перейдем теперь к общему случаю, когда учитываются продольное натяжение и изгибная жесткость пластины, т.е. коэффициенты α и β могут быть любыми и не обязательно должны обращаться в ноль. Тогда из сравнения уравнений (2.4) и (2.6) легко заключить, что

$$\omega_0(k; K, \alpha, \beta) = \omega_0(k; \Lambda, 0, 0),$$

где $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$, откуда следует, что достаточно иметь зависимость решения ω_0 от первых двух параметров $(k; \Lambda)$, чтобы получить решение, зависящее от всех четырех параметров. Но эту зависимость от первых двух параметров мы уже изучили в предыдущем разделе (2.1) (где вместо Λ фигурировала K), так что можно воспользоваться ранее полученными результатами.

В частности, на фиг. 2 можно провести кривую $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$ с любыми фиксированными параметрами K , α и β . Тогда точки ее пересечения с кривыми $k_{*,1}(\Lambda)$, $k_{*,2}(\Lambda)$ и $k_{\max}(\Lambda)$ определяют волновые числа $k_{*,1}$ и $k_{*,2}$ нейтральных колебаний, а также точку k_{\max} , в которой инкремент нарастания $\sigma(k) = \text{Im } \omega_{0,2}(k)$ достигает максимума. Для примера на фиг. 5 штриховой линией проведена кривая $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$ при $K = 1$, $\alpha = 1$ и $\beta = 0$.

2.3. Упругая инерционная пластина с учетом продольного натяжения

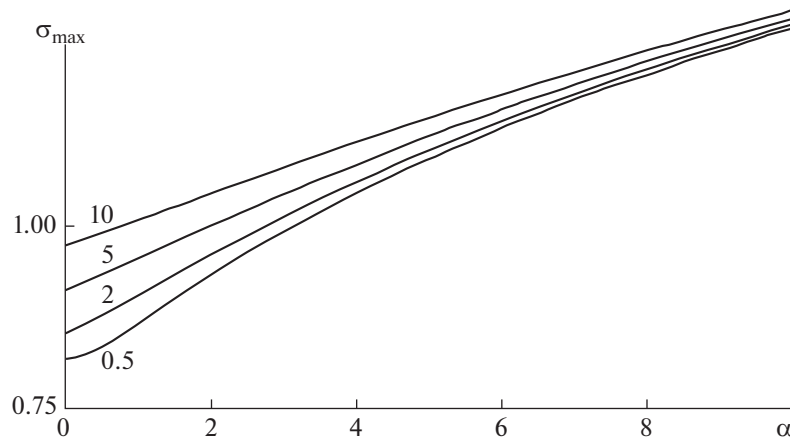
Теперь положим $\beta = 0$ (т.е., не будем учитывать изгибную жесткость). Тогда кривые $\Lambda = K + \alpha k^2$ будут представлять собой классические параболы. Вернемся к фиг. 5, зафиксируем K и будем проводить кривые $\Lambda = K + \alpha k^2$ со все большим значением параметра α . Тогда из фигуры видно, что пересечения кривой $\Lambda = K + \alpha k^2$ с кривыми $k_{*,1}$, $k_{*,2}$ и k_{\max} будут происходить при все больших величинах k , а при достаточно больших k можно воспользоваться асимптотическими оценками (2.8).

В частности, оценка $k_* \sim \Lambda^{1/4}$ говорит о том, что нейтральные величины k_* всегда растут слабее (при $\Lambda \rightarrow \infty$), чем

$$k = \sqrt{(\Lambda - K)/\alpha} \sim \Lambda^{1/2}/\alpha^{1/2},$$

а значит, кривая $\Lambda = K + \alpha k^2$ всегда будет пересекаться с кривыми $k_{*,1}(\Lambda)$, $k_{*,2}(\Lambda)$ и $k_{\max}(\Lambda)$ при сколь угодно большом значении α . Кроме того, легко получить асимптотические оценки $k_{\max} \sim \alpha^{1/2}$ и $\sigma_{\max} \sim \alpha^{1/4}/\sqrt{2}$, говорящие о том, что с ростом α течение становится все более неустойчивым, а область неустойчивости все больше смещается в коротковолновый диапазон.

Наконец, на фиг. 6 приведены расчетные зависимости $\sigma_{\max}(\alpha) = \max_{-\infty < k < \infty} \sigma(k; \alpha = \text{const})$ для ряда значений $K = 0.5, 2, 5$ и 10 . Интересно отметить, что все кривые монотонно возрастают, причем максимальный разброс $\sigma_{\max}(\alpha)$ (порядка 15%) достигается при $\alpha = 0$ и с ростом α он все больше уменьшается по мере того, как $\sigma_{\max}(\alpha)$ стремится к своей асимптотике $\alpha^{1/4}/\sqrt{2}$.



Фиг. 6.

2.4. Упругая инерционная пластина с учетом изгибной жесткости

Теперь положим $\alpha = 0$ (т.е., не будем учитывать продольный изгиб). Опять же, в целях качественного анализа (как и в п. 2.3) будем проводить кривые $\Lambda = K + \beta k^4$ на плоскости (Λ, k) со все большим значением параметра β при фиксированном K (см. фиг. 7, где кривые Λ проведены штриховой линией для указанных значений $\beta = 0.1, 0.3, 0.5, 1, 3$ и 5 при $K = 1$). Тогда из фигуры видно, что точка пересечения кривой

$$k = \sqrt[4]{(\Lambda - K)/\beta}$$

с кривой $k_{*,2}(\Lambda)$ с самого начала значительно смещается лишь при небольших увеличениях β (сравните для примера случаи $\beta = 0.1, 0.3$ и 0.5). Это объясняется одинаковым характером асимптотического поведения $k \sim (\Lambda/\beta)^{1/4}$ и $k_{*,2} \sim \Lambda^{1/4}$ при $\Lambda \rightarrow \infty$. Более того, при $\beta = 1$ эти асимптотики совпадают, а значит, может случиться так, что кривые $k = \sqrt[4]{(\Lambda - K)/\beta}$ и $k_{*,2}(\Lambda)$ вообще не пересекутся. И, действительно, с учетом следующих членов асимптотических разложений мы имеем при $\beta = 1$ в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$k_{*,1} \sim \Lambda^{1/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^{-1/8},$$

$$k \sim \Lambda^{1/4} - \frac{1}{4} K \Lambda^{-3/4},$$

$$k_{*,2} \sim \Lambda^{1/4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^{-1/8},$$

откуда следует, что асимптотически $k_{*,1} < k < k_{*,2}$, а значит, кривая

$$k = \sqrt[4]{(\Lambda - K)/\beta},$$

однажды попав в зону неустойчивости, так и будет оставаться в ней при сколь угодно больших K . А попадает она туда рано или поздно в силу того, что она растет чуть быстрее, чем $k_{*,1}$.

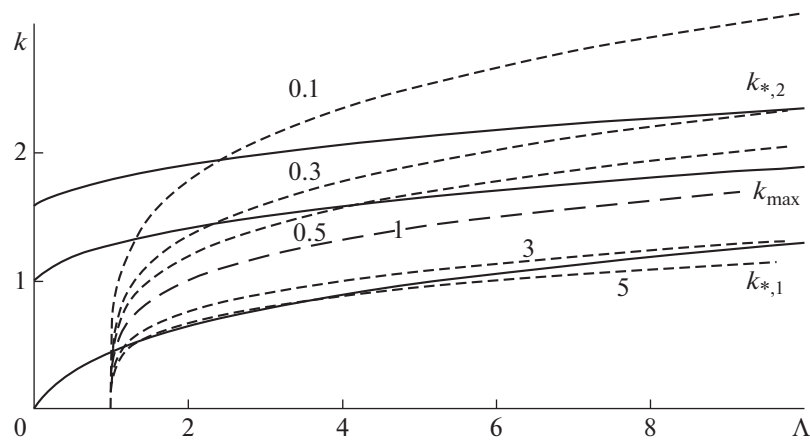
Исходя из (2.8), нетрудно получить следующую асимптотику:

$$\sigma \sim \sqrt{k/2} \quad \text{при} \quad \Lambda \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

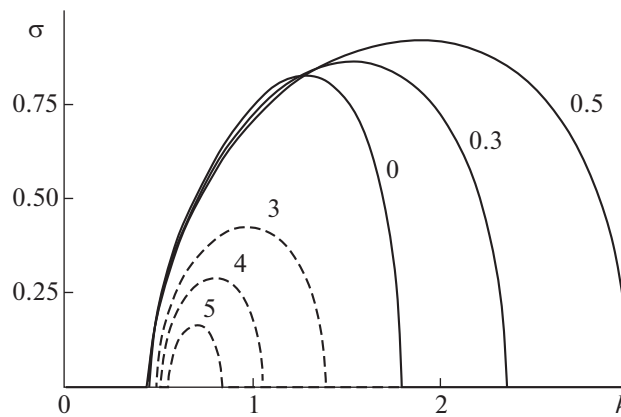
говорящую о том, что инкремент нарастания неустойчивых возмущений может стать сколь угодно большим в коротковолновом диапазоне чисел k .

Далее, при дальнейшем увеличении β , начиная с $\beta = 1$, мы видим, что кривая

$$k = \sqrt[4]{(\Lambda - K)/\beta}$$



Фиг. 7.



Фиг. 8.

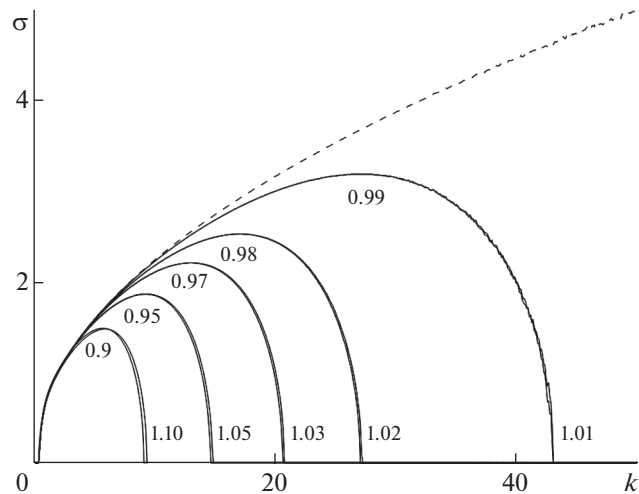
растет уже медленнее кривой $k_{*,1}$ при $\Lambda \rightarrow \infty$, так как в указанном пределе $k \sim (\Lambda/\beta)^{1/4}$, а $k_{*,2} \sim \Lambda^{1/4}$. Значит, если кривая

$$k = \sqrt[4]{(\Lambda - K)/\beta}$$

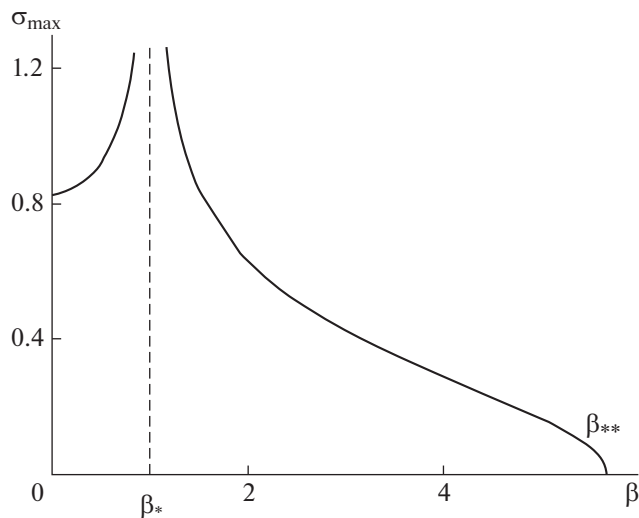
попадет с ростом k в зону неустойчивости, то затем она выйдет из нее рано или поздно. Сказанное иллюстрируют кривые

$$k = \sqrt[4]{(\Lambda - K)/\beta}$$

при $\beta = 3$ и 5 на фиг. 7. Более того, видно, что если при приближении β к величине $\beta_* = 1$ снизу (т.е., $\beta \rightarrow 1$ при условии $\beta < 1$) область неустойчивости $k_{*,1} < k < k_{*,2}$ все время расширяется, а максимальный инкремент нарастания σ_{max} все увеличивается, то при дальнейшем удалении от $\beta_* = 1$ в сторону увеличения β область неустойчивости все время сужается, а максимальный инкремент нарастания σ_{max} все уменьшается, пока не сходит на нет при некотором $\beta = \beta_{**}$ (расчеты показывают, что $\beta_{**} = 5.67$ при $K = 1$). Более детально проследить характер зависимости $\sigma(k)$ можно по фиг. 8, на котором представлены соответствующие кривые для $\beta = 0, 0.3, 0.5, 3, 4$ и 5 при $K = 1$. Взрывной рост неустойчивости при приближении β к величине $\beta_* = 1$ иллюстрирует фиг. 9 с зависимостями $\sigma(k)$ для $\beta = 0.9, 0.95, 0.97, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02, 1.03, 1.05$ и 1.1 при $K = 1$. Интересно отметить, что эти зависимости практически “симметричны” относительно $\beta_* = 1$,



Фиг. 9.



Фиг. 10.

т.е. графики функций практически сливаются друг с другом для пар β , отличающихся от $\beta_* = 1$ на одну и ту же малую величину: 0.9 и 1.1, 0.95 и 1.05, 0.97 и 1.03, 0.98 и 1.02, 0.99 и 1.01. Кроме того, на этой же фигуре штриховой линией приведена зависимость $\sigma(k)$ для $\beta = 1.0$ с асимптотикой (2.9), уходящей в бесконечность.

Наконец, для большей наглядности на фиг. 10 приведена расчетная зависимость $\sigma_{\max}(\beta) = \max_{(-\infty < k < \infty)} \sigma$ при $K = 1$. На этой фигуре четко прослеживаются критические величины: (1) $\beta_* = 1$, при приближении к которой σ_{\max} уходит в бесконечность; и (2) $\beta_{**} = 5.67$, по достижении которой неустойчивость исчезает.

2.5. Общий случай – качественный анализ

Вернемся к общему случаю, когда учитываются продольное натяжение и изгибная жесткость пластины, т.е. коэффициенты α и β могут быть любыми и не обязательно должны обращаться в ноль.

Асимптотический характер поведения кривой $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$ и в общем случае определяется в первом приближении только коэффициентом β : $k \sim (\Lambda/\beta)^{1/4}$ при $\Lambda \rightarrow \infty$, а стало быть, и в общем случае имеется то же самое критическое значение $\beta_* = 1$, при приближении к которому σ_{\max} уходит в бесконечность. Это подтверждается учетом следующих членов асимптотических разложений при $\beta = 1$ в пределе $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} k_{*,1} &\sim \Lambda^{1/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^{-1/8}, \\ k &\sim \Lambda^{1/4} - \frac{1}{4} \alpha \Lambda^{-1/4} - \frac{1}{4} K \Lambda^{-3/4}, \\ k_{*,2} &\sim \Lambda^{1/4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda^{-1/8}, \end{aligned}$$

откуда следует, что асимптотически $k_{*,1} < k < k_{*,2}$, а значит, кривая $k(\Lambda)$, однажды попав в зону неустойчивости, так и будет оставаться в ней при сколь угодно больших K . (А попадает она туда рано или поздно в силу того, что она растет чуть быстрее, чем $k_{*,1}$.) Более того, остается в силе прежняя асимптотика (2.9), полученная ранее для случая $\alpha = 0$. Опять же, при дальнейшем увеличении β от $\beta_* = 1$ область неустойчивости все время сужается, а максимальный инкремент нарастания σ_{\max} все уменьшается, пока не сходит на нет при некотором $\beta = \beta_{**}$, конкретное значение которого зависит от параметров K и α . Так, расчеты показали, что $\beta_{**} = 3.63$ для $K = 1$ и $\alpha = 1$, что меньше величины $\beta_{**} = 5.67$ для $K = 1$ и $\alpha = 0$, что и не удивительно, поскольку $\Lambda = K + \alpha k^2 + \beta k^4$ растет быстрее по k с увеличением α .

Если говорить в целом, то можно сказать, что при всех K и α будет оставаться “взрывной” характер неустойчивости в окрестности $\beta = \beta_* = 1$ (т.е., максимальный инкремент нарастаний возмущений стремится к бесконечности при приближении β к критической величине $\beta_* = 1$), а при достижении параметром β другой пороговой величины β_{**} неустойчивость будет полностью пропадать, причем β_{**} уменьшается с увеличением K и α .

3. ВЫВОДЫ

Итак, в рамках теории свободного взаимодействия показано, что в пределе высоких чисел Рейнольдса невязкая неустойчивость может существовать только за счет инерционности пластины (если инерционность пластины пренебрежимо мала, то течение будет устойчивым по отношению к невязким возмущениям).

Если изгибной жесткостью пластины можно пренебречь, то течение будет неустойчивым в некотором диапазоне волновых чисел k при любых значениях коэффициента упругости и продольного натяжения, причем наблюдается асимптотическая тенденция повышения максимального инкремента нарастания возмущений с ростом коэффициента упругости и продольного натяжения.

Если повышать изгибную жесткость от нуля, то при приближении к некоторому критическому значению (не зависящему от коэффициента упругости и продольного натяжения) максимальный инкремент нарастания может стать сколь угодно большим, но при дальнейшем повышении изгибной жесткости (от критического значения) максимальный инкремент нарастания начинает падать и обращается в ноль при достижении изгибной жесткостью некоторого порогового значения (зависящего от коэффициента упругости и продольного натяжения), после чего неустойчивость течения пропадает.

Как было найдено в рамках принятой теории, критическое значение изгибной жесткости $\beta_* = 1$, что в исходных размерных единицах приводит к равенству

$$\frac{B^*}{\rho_s^* L_s^*} = \frac{\mu_\infty^* U_\infty^* L^*}{\lambda_1^2 \rho_\infty^*},$$

т.е. данное соотношение параметров пластины и течения является наиболее опасным с точки зрения неустойчивости. Заметим, что оно не зависит от коэффициента упругости и продольного натяжения пластины.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kramer M.O.* Boundary-layer stabilization by distributed damping // *J. Aeronaut. Sci.* 1957. V. 24. P. 458–460.
2. *Benjamin T.B.* Effects of a flexible boundary on hydrodynamic stability // *J. of Fluid Mech.* 1960. № 9. P. 513–532.
3. *Benjamin T.B.* The threefold classification of unstable disturbances in flexible surfaces bounding inviscid flows // *J. of Fluid Mech.* 1963. № 16. P. 436–450.
4. *Landahl M.T.* On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // *J. of Fluid Mech.* 1962. № 13. P. 609–632.
5. *Carpenter P.W., Garrad A.D.* The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Part 1. Tollmien-Schlichting instabilities // *J. Fluid Mech.* 1985. V. 155. P. 465–510.
6. *Riley J.J., Gad-el-Hak, Metcalfe R.W.* Compliant coatings // *Annual Review of Fluid Mech.* 1988. № 20. P. 393–420.
7. Flow Past Highly Compliant Boundaries and in Collapsible Tubes // *Proc. of the IUTAM Symposium, University of Warwick, UK, 26–30 March 2001.* Kluwer Academic Publishers, 2003.
8. *Gad-el-Hak M.* Compliant coatings for drag reduction // *Progress in Aerospace Sciences.* 2002. V. 38. Issue 1. January 2002. P. 77–99.
9. *Carpenter P.W.* (2008) Recent Progress in the Use of Compliant Walls for Laminar Flow Control // *Progress in Industrial Mathematics at ECMI 2006* // *Math. in Industry.* 2008. № 12. P. 178–187.
10. *Нейланд В.Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // *Изв. АН СССР. Сер. механ. жидкости и газа.* 1969. № 4. С. 53–58.
11. *Stewartson K., Williams P.G.* Self-induced separation // *Proc. Roy. Soc. A.* 1969. V. 312. № 1509. P. 181–206.
12. *Messiter A.F.* Boundary-layer flow near the trailing edge of a flat plate // *SIAM J. Appl. Math.* 1970. V. 18. № 1. P. 241–257.
13. *Савенков И.В.* Подавление роста нелинейных волновых пакетов упругостью обтекаемой поверхности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995. Т. 35. № 1. С. 95–103.
14. *Савенков И.В.* Об абсолютной неустойчивости несжимаемого пограничного слоя на податливой поверхности // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2018. Т. 58. № 2. С. 281–290.
15. *Савенков И.В.* Влияние инерционности податливой поверхности на вязкую неустойчивость несжимаемого пограничного слоя // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 4. С. 707–715.
16. *Жук В.И.* Волны Толлмина–Шлихтинга и солитоны. М.: Наука, 2001. 167 с.
17. *Савенков И.В.* О нестационарных осесимметричных течениях в трубах с упругими стенками // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1996. Т. 36. № 2. С. 147–163.
18. *Walker J.D.A., Fletcher A., Ruban A.I.* Instabilities of a flexible surface in supersonic flow // *Q. Jl Mech. Appl. Math.* 2006. V. 59. № 2. P. 253–276.