

УДК 539.3, 534.1.2

ДИНАМИКА УПРУГОГО ШТАМПА НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ТРЕЩИН¹⁾

© 2020 г. Л. А. Алексеева^{1,2,*}, Т. Б. Дуйшеналиев^{3,**}, Б. Т. Сарсенов^{2,4,***}

¹ 050010 Алматы, ул. Пушкина, 125, Институт математики и математического моделирования, Казахстан

² 050010 Алматы, ул. Курмангазы, 29, Институт механики и машиноведения
им. У.А. Джолдасбекова, Казахстан

³ 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, Национальный исследовательский университет “МЭИ”, Россия

⁴ 161200 Туркестан, пр-т Саттарханова, 29, Международный казахско-турецкий университет
им. Х.А. Ясави, Казахстан

*e-mail: alexeeva@math.kz

**e-mail: duishenaliev@mail.ru

***e-mail: bakytbek.sarsenov@ayu.edu.kz

Поступила в редакцию 20.11.2019 г.

Переработанный вариант 03.02.2020 г.

Принята к публикации 09.04.2020 г.

Для исследования динамики сооружений в зоне землетрясений рассмотрена модельная краевая задача динамики упругого штампа на упругой полуплоскости при дифракции и преломлении волн, обусловленных сбросом напряжений на трещине. Для решения задачи принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам. Рассмотрены задачи дифракции и преломления волн в упругое включение при сбросе вертикальных и сдвиговых напряжений на горизонтальной трещине в упругой полуплоскости, моделирующие динамику сейсмических процессов при образовании тектонических трещин отрыва и сдвига. Проведены компьютерные эксперименты для сред с разными упругими параметрами и при разном расстоянии штампа от трещины, результаты которых представлены в виде осциллограмм движения дневной поверхности и штампа, а также дифракционных полей скоростей перемещений и инвариантов тензоров напряжений в среде и штампе. Библ. 9. Фиг. 22.

Ключевые слова: контактная краевая задача, упругая полуплоскость, упругое тело, нестационарные упругие волны, дифракция, преломление, напряженно-деформированное состояние.

DOI: 10.31857/S0044466920090045

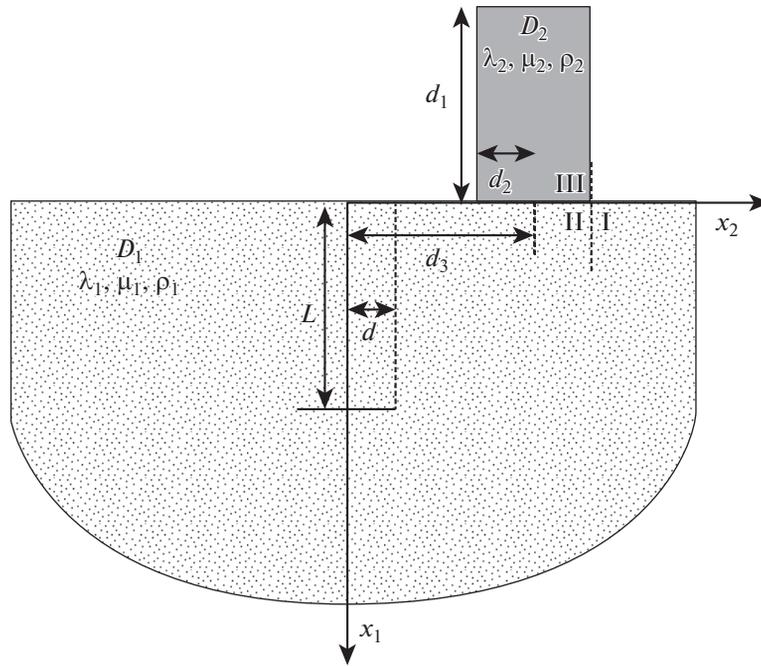
ВВЕДЕНИЕ

Изучение воздействия сейсмических волн при землетрясениях на состояние земной коры, ее поверхности и наземные сооружения методами математического моделирования относится к числу наиболее сложных нестационарных контактных краевых задач механики деформируемого твердого тела и практически мало разработано.

Здесь исследуется напряженно-деформированное состояние поверхностного сооружения при воздействии сейсмических волн в земной коре при землетрясениях. Для этого рассмотрена модельная краевая задача динамики упругого штампа на упругой полуплоскости при дифракции и преломлении упругих волн, обусловленных сбросом напряжений на трещине в упругой полуплоскости.

Задача рассмотрена при условии плоской деформации. Приведены определяющие гиперболические уравнения динамической теории упругости, которые описывают движение среды и штампа, краевые и контактные условия на границах и контактной поверхности. Для решения задачи принята явная разностная схема, построенная на основе метода бихарактеристик [1], [2] с привлечением идеи расщепления по пространственным координатам [3]–[5]. Дано описание точечной расчетной схемы и шаблона для изотропной упругой полуплоскости с прямоуголь-

¹⁾ Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки МОН РК (гранты: 0253-ГФЗ, AP05135494).



Фиг. 1. Расчетная схема краевой задачи.

ным упругим штампом на ее границе. Получены разрешающие разностные уравнения для внутренних, граничных, угловых, особых и контактных точек сопряжения штампа и полуплоскости.

Проведена компьютерная реализация алгоритма решения задач дифракции и преломления волн в упругое включение на упругой полуплоскости при сбросе вертикальных и сдвиговых напряжений на горизонтальной трещине в упругой полуплоскости, моделирующие динамику сейсмических процессов при образовании тектонических трещин отрыва и сдвига. Проведены компьютерные эксперименты для сред с разными упругими параметрами и при разном расстоянии штампа от трещины, результаты которых здесь представлены в виде осциллограмм движения дневной поверхности и штампа, а также дифракционных полей скоростей перемещений и инвариантов тензоров напряжений в среде и штампе.

1. ПОСТАНОВКА КОНТАКТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается полуплоскость $x_1 \geq 0$ упругой однородной изотропной среды (первая среда D_1) с плотностью $\rho^{(1)}$ и упругими коэффициентами Ламе $\lambda^{(1)}$ и $\mu^{(1)}$, на поверхности которого расположено упругое тело (штамп – вторая среда D_2) высотой d_1 и шириной $2d_2$ с плотностью $\rho^{(2)}$ и коэффициентами Ламе $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$.

До начального момента времени среды находились в статическом состоянии, которое здесь не рассматривается. Предполагается, что в начальный момент времени $t = 0$ в упругой полуплоскости на глубине L возникает горизонтальная трещина S ($x_1 = L$, $|x_2| \leq d$) (фиг. 1). При $t > 0$ динамическое состояние сред описывается векторами $\mathbf{u}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) (смещение k -й среды от статического состояния) и тензорами динамических напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$. Следовательно,

$$\mathbf{u}^{(k)} = 0, \quad \dot{\mathbf{u}}^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (1.1)$$

Границы полуплоскости (дневная поверхность) и штампа свободны от нагрузок:

$$\sigma_{1j}^{(1)} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad |x_2 - d_3| > d_2, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{1j}^{(2)} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad \text{при} \quad x_1 = -d_1, \quad |x_2 - d_3| \leq d_2, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{2j}^{(2)} = 0 \quad (j = 1, 2) \quad \text{при} \quad |x_2 - d_3| = d_2, \quad -d_1 \leq x_1 \leq 0. \quad (1.4)$$

Условия на контактной границе отвечают требованиям жесткого контакта (полное сцепление):

$$v_i^{(1)} = v_i^{(2)}, \quad \sigma_{1j}^{(1)} = \sigma_{1j}^{(2)} \quad (i, j = 1, 2) \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad |x_2 - d_3| \leq d_2. \quad (1.5)$$

Так как на бесконечности отсутствуют источники колебания, то очевидным является требование, чтобы на бесконечности выполнялись условия затухания:

$$u_j^{(1)} \rightarrow 0, \quad \sigma_{ij}^{(1)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad \forall t > 0.$$

При описанных условиях необходимо исследовать напряженно-деформированное состояние неоднородной среды $D_1 \cap D_2$ при $t > 0$.

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГИХ ПОЛУПЛОСКОСТИ И ШТАМПА

Для решения поставленной задачи наряду с начальными (1.1) и граничными условиями (1.2)–(1.5) используется система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнений движения упругой среды и закона Гука [6]:

$$\sigma_{i\beta,\beta}^{(k)} + F_i^{(k)} = \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2} \quad (i, k = 1, 2), \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \lambda^{(k)} u_{\beta,\beta}^{(k)} \delta_{ij} + \mu^{(k)} (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (2.2)$$

Здесь $u_i^{(k)}$ – компоненты вектора перемещений, $\sigma_{ij}^{(k)}$ – тензор напряжений, $F_i^{(k)}$ – компоненты объемной силы, δ_{ij} – символ Кронекера.

Компоненты F_i объемной силы F определяются сингулярной обобщенной функцией – простым слоем на трещине S [7]. Здесь они имеют следующий вид:

$$F_i = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta_S(x) = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta(x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i = 1, 2, \quad (2.3)$$

где выражение в квадратных скобках – скачок компонент тензора напряжений на берегах трещины, \mathbf{n} – единичная нормаль к ее поверхности (в данном случае $\mathbf{n} = (n_1, n_2) = (1; 0)$), $H(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – функция Дирака. Предполагается, что скачок напряжений на трещине известен:

$$n_\beta [\sigma_{i\beta}(x)]_S = P_i(x, t), \quad x \in S, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

Здесь в расчетах рассматривается импульс вида

$$P_i(x, t) = P t e^{-at} H(t) \quad (a > 0). \quad (2.5)$$

А для представления δ -функции Дирака используются дельтообразные последовательности $\delta_\varepsilon(x)$ [8]

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x) = \delta(x), \quad \delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} (2\varepsilon)^{-1}, & x \in [-\varepsilon, \varepsilon]; \\ 0, & x \notin [-\varepsilon, \varepsilon]; \end{cases}$$

где $\varepsilon > 0$, т.е. в расчетах

$$F_i = F_i^\varepsilon = n_\beta [\sigma_{i\beta}]_S \delta_\varepsilon(x_1 - L) H(d - |x_2|), \quad i = 1, 2.$$

Для решения поставленной задачи используется метод бихарактеристик [1]–[5], на основе которого разработаны алгоритм и пакет программ на языке Delphi, проведены его отладка, тестирование и численные эксперименты.

3. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ БИХАРАКТЕРИСТИК

Решение задачи удобно строить в безразмерных переменных, которые получаем после введения обозначений:

$$\begin{aligned} c_1^{(k)} &= \frac{c_1^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; & c_2^{(k)} &= \frac{c_2^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; & x_i &= \frac{x_i^*}{L^*}; & t &= \frac{t^* c_1^{(m)*}}{L^*}; \\ \rho^{(k)} &= \frac{\rho^{(k)*}}{\rho^{(m)*}}; & v_i^{(k)} &= \frac{\dot{u}_i^{(k)*}}{c_1^{(m)*}}; & \sigma_{ij}^{(k)} &= \frac{\sigma_{ij}^{(k)*}}{\rho^{(m)*} (c_1^{(m)*})^2}; & F_i^{(k)} &= \frac{F_i^{(k)*} L^*}{\rho^{(m)*} (c_1^{(m)*})^2}; \\ \gamma_{11}^{(k)} &= \gamma_{22}^{(k)} = \rho^{(k)} (c_1^{(k)})^2; & \gamma_{12}^{(k)} &= \gamma_{21}^{(k)} = \rho^{(k)} (c_2^{(k)})^2; & \gamma_{33}^{(k)} &= \gamma_{11}^{(k)} - 2\gamma_{12}^{(k)}. \end{aligned}$$

Здесь индекс * придается размерным величинам; индекс m относится к материалу, в котором скорость продольных волн является наибольшей; L^* – характерный линейный размер;

$$c_1^{(k)*} = \sqrt{\frac{\lambda^{(k)*} + 2\mu^{(k)*}}{\rho^{(k)*}}}, \quad c_2^{(k)*} = \sqrt{\frac{\mu^{(k)*}}{\rho^{(k)*}}}$$

суть скорости распространения продольных и поперечных волн в k -й среде.

После введения безразмерных величин из уравнений (2.1), (2.2) после простых преобразований имеем ($i, j, k = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \rho^{(k)} \dot{v}_i^{(k)} &= \sigma_{i\beta\beta}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} &= \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} + \gamma_{ji}^{(k)} v_{j,i}^{(k)} (1 - \delta_{ij}) + \gamma_{33}^{(k)} (v_{\beta\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)}) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) представляют собой линейную неоднородную гиперболическую систему дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Ее характеристические поверхности в трехмерном пространстве ($x_1; x_2, t$) представляют собой гиперконусы с осями, параллельными оси времени. Система уравнений (3.1) имеет два семейства характеристических конусов. Эти конусы совпадают с бихарактеристиками уравнений (3.1). Вдоль характеристик, лежащих в плоскости $x_\alpha = \text{const}$, уравнения (3.1) являются функциями только двух переменных ($x_j; t$) ($j \neq \alpha$). Это обстоятельство указывает на то, что условия на бихарактеристиках могут быть получены как условия на характеристиках в соответствующей одномерной задаче. Соответствующие преобразования можно выполнить, если в системе уравнений (3.1) поочередно зафиксировать одну из пространственных переменных. При этом система уравнений (3.1) расщепляется на две системы уравнений, соответствующие направлениям $j = 1$ и $j = 2$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \rho^{(k)} \dot{v}_i^{(k)} - \sigma_{ij,j}^{(k)} &= a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}, \\ \dot{\sigma}_{ij}^{(k)} - \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} &= b_{ij}^{(k)}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= \sigma_{i\beta\beta}^{(k)} - \sigma_{ij,j}^{(k)}, \\ b_{ij}^{(k)} &= \gamma_{ji}^{(k)} v_{j,i}^{(k)} (1 - \delta_{ij}) + \gamma_{33}^{(k)} (v_{\beta\beta}^{(k)} - v_{i,j}^{(k)}) \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дифференциальные уравнения характеристик имеют вид ($i, j = 1, 2$):

$$dx_i = \pm \lambda_{ij}^{(k)} dt, \quad (3.4)$$

а условиями на бихарактеристиках являются следующие:

$$d\sigma_{ij}^{(k)} \mp \rho^{(k)} \lambda_{ij}^{(k)} dv_i^{(k)} = (b_{ij}^{(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} [a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}]) dt. \quad (3.5)$$

Здесь $\lambda_{ij}^{(k)} = c_1^{(k)} \delta_{ij} + c_2^{(k)} (1 - \delta_{ij})$. Из (3.4) видно, что на каждой из двух гиперплоскостей имеются две пары семейств характеристик, определяющих продольные $c_1^{(k)}$ и сдвиговые $c_2^{(k)}$ скорости распространения волн. В каждой из двух плоскостей (x_j, t) имеются по два семейства бихарактеристик положительного и отрицательного направлений. Верхний знак соответствует характеристикам положительного, а нижний – отрицательного направлений. Уравнения (3.4) и (3.5) соот-

ветствуют друг другу при одинаковой паре индексов и при одинаковом расположении знаков. Уравнения (3.2) и условия (3.5) используются для отыскания решения задачи [1]–[7].

Расчетная схема среды и штампа такова, что допускает систему координат x_i ($i = 1, 2$), в которой граничные поверхности являются координатными. Для построения алгоритма D_1 и D_2 разбиваются на ячейки, образуемые пересечениями координатных поверхностей $x_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$). Линейные размеры этих ячеек в направлении осей x_1 и x_2 считаются равномерными и равными h . Пересечения линий $x_i = \text{const}$ ($i = 1, 2$) образуют узлы. В этих узловых точках отыскиваются значения искомых функций $v_i^{(k)}$, $\sigma_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2$) в различные моменты времени $t_n - \tau$, t_n , $t_n + \tau$ ($n = 1, 2, \dots, N$) с шагом по времени τ . Получившаяся сетка является трехмерной. Точечная сетка, на основе которых строится разностная схема, помимо упомянутых узловых точек, содержит точки, образованные пересечениями бихарактеристик с гиперплоскостями $t = \text{const}$. Использование явной разностной схемы второго порядка точности позволяет установить значения неизвестных величин в узловых точках плоскости t_{n+1} временного слоя по известным их значениям в узлах предыдущего слоя t_n . Принимается шаблон, состоящий из узла O и точек $E_{ij}^{\pm(k)}$, лежащих на координатных линиях $x_j = \text{const}$ и отстоящих от точки O на расстояния $\lambda_{ij}^{(k)} \tau$. Наклонные прямые, исходящие из точки A , являются бихарактеристиками. В дальнейшем значениям функций в точке O приписывается верхний знак “ O ”; в точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ – нижний (ij) и верхний знак \pm (например, $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$), а в точке A дополнительный индекс не приписывается. Точки O и A представляют собой одну и ту же точку тела в моменты времени, отстоящие друг от друга на один шаг τ по времени.

На основании описанных точечных схем разрабатываемая ниже методика решения динамических задач позволяет определить скорости частиц $v_i^{(k)}$ и компоненты тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(k)}$ в точке A на нечетном слое по времени t_n , если известны их значения на предыдущем слое t_{n-1} ($n = 1, 2, \dots, N$) в точке O и в прилегающих к ней точках $E_{ij}^{\pm(k)}$. Разностные схемы такого типа являются явными и удобны тем, что эти системы решаются последовательно от одного временного слоя к следующему. При этом искомые величины в каждой узловой точке, в отличие от неявной разностной схемы, вычисляются независимо от других.

3.1. Разрешающие разностные уравнения во внутренних точках

Ниже построен расчетный алгоритм второго порядка точности. Интегрирование системы уравнений (3.2) от точки O до точки A и соотношений (3.5) от точки $E_{ij}^{\pm(k)}$ до точки A методом трапеции позволяет получить выражения следующего типа:

$$v_i^{(k)} = v_i^{0(k)} + \frac{\tau}{2\rho^{(k)}} (\sigma_{ij,j}^{0(k)} + a_{ij}^{0(k)} + F_i^{0(k)} + \sigma_{ij,j}^{(k)} + a_{ij}^{(k)} + F_i^{(k)}), \quad (3.6)$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{0(k)} + \frac{\tau}{2} (\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{0(k)} + b_{ij}^{0(k)} + \gamma_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} + b_{ij}^{(k)}),$$

$$\sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{\pm(k)} \mp \rho^{(k)} \lambda_{ij}^{(k)} (v_i^{(k)} - v_i^{\pm(k)}) = \frac{\tau}{2} (b_{ij}^{(k)} + b_{ij}^{\pm(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} [a_{ij}^{(k)} + a_{ij}^{\pm(k)} + F_i^{(k)} + F_i^{\pm(k)}]), \quad (3.7)$$

Значения функций в неузловых точках $E_{ij}^{\pm(k)}$ заменяются величинами, вычисленными по формуле Тейлора с точностью до первого порядка для функций $a_{ij}^{\pm(k)}$ и $b_{ij}^{\pm(k)}$ и с точностью до второго порядка для функций $v_i^{\pm(k)}$ и $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ через их значения в узловых точках $O(x_1^0, x_2^0, t^0)$:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{\pm(k)} &= a_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial a_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \\ b_{ij}^{\pm(k)} &= b_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial b_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{\pm(k)} &= \sigma_{ij}^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 \sigma_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j^2}, \\ v_{i\alpha}^{\pm(k)} &= v_i^{0(k)} \mp \lambda_{ij}^{(k)} \tau \frac{\partial v_{ij}^{0(k)}}{\partial x_j} + \frac{1}{2} (\lambda_{ij}^{(k)} \tau)^2 \frac{\partial^2 v_i^{0(k)}}{\partial x_j^2}.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Подставив соотношения (3.8), (3.9) в (3.7), затем исключив при помощи (3.6) переменные $v_i^{\pm(k)}$ и $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ и учитывая (3.8), можно получить восемь уравнений относительно производных $v_i^{\pm(k)}$ и $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ в расчетном слое времени:

$$\rho_{ij,j}^{(k)} \mp \rho^{(k)} \lambda_{ij}^{(k)} v_{i,j}^{(k)} = \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau [\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,jj}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)}] \mp \lambda_{ij}^{(k)} (\rho^{(k)} v_{i,j}^{0(k)} + \tau [\sigma_{ij,jj}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)}]) + F_i^{\pm(k)} - F_i^{0(k)}. \quad (3.10)$$

Складывая и вычитая поочередно соответствующие пары уравнений (20), можно найти неизвестные производные:

$$\begin{aligned}v_{i,j}^{(k)} &= v_{i,j}^{0(k)} + \frac{\tau}{\rho^{(k)}} (\sigma_{ij,jj}^{0(k)} + a_{ij,j}^{0(k)}) + \frac{1}{2\rho^{(k)} \lambda_{ij}^{(k)}} (F_i^{-k} - F_i^{+k}), \\ \sigma_{ij,j}^{(k)} &= \sigma_{ij,j}^{0(k)} + \tau (\gamma_{ij}^{(k)} v_{i,jj}^{(k)} + b_{ij,j}^{(k)}) + \frac{1}{2} (F_i^{-k} + F_i^{+k} - 2F_i^{0(k)}).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Систему уравнений (3.11) можно использовать для определения неизвестных производных как во внутренних, так и граничных узловых точках исследуемой области. Однако важно иметь промежуточные соотношения (3.10), которые используются при решении систем уравнений, где заданы граничные функции. Подстановка равенств (3.11) в (3.6) позволяет получить неизвестные функции $v_i^{\pm(k)}$ и $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ во внутренних узловых точках неоднородного тела в момент времени $t_n + \tau$ ($n = 1, 2, \dots, N$).

3.2. Разностные уравнения в граничных точках

На граничных линиях $x_j = \text{const}$ заданы две компоненты тензора напряжений (см. (1.2)–(1.4)). В расчетах не могут быть использованы два условия из (3.10), условия на двух характеристиках, не принадлежащих исследуемой области. Тем самым по сравнению с внутренними точками число уравнений (3.10) сокращается на два. Совокупность оставшихся уравнений (3.10), (3.6) и двух граничных условий из (1.2)–(1.4) является замкнутой линейной системой относительно тринадцати неизвестных (восьми производных и пяти функций). Точки контактных линий также рассматриваются как граничные точки только для отдельных областей D_1, D_2 . В каждой из этих точек сопряжения число уравнений (3.10), (3.6) равно 22, а неизвестных 26. Замкнутая система уравнений получается, если использовать наряду с уравнениями (3.6), (3.10) четыре условия жесткого сцепления штампа и полуплоскости (1.5).

3.3. Разностные уравнения в неособых и особых угловых точках

В угловых точках, образовавшихся пересечением двух границ, все условия, заданные на двух границах, должны выполняться. Поэтому в угловых точках задаются четыре условия вместо четырех условий на четырех бихарактеристиках, не принадлежащих области $D_1 \cap D_2$, которые замыкают систему линейных уравнений относительно тринадцати неизвестных.

В верхних угловых точках тела D_2 (см. фиг. 1) заданы четыре компоненты тензора напряжений. В силу закона парности касательных напряжений только три из них являются линейно независимыми. Число неизвестных производных можно сократить непосредственным дифференцированием граничных функций $\sigma_{ij}^{\pm(k)}$ ($i \neq j$) в (1.3), (1.4). Тем самым получаем производные $\sigma_{21,1}^{\pm(k)}$ и $\sigma_{12,2}^{\pm(k)}$. Остальные неизвестные вычисляются при последовательном решении уравнений (3.10) и (3.6).

Разностные уравнения в особых угловых точках строятся иначе. Нижние угловые точки тела D_2 являются контактными точками неоднородной среды $D_1 \cap D_2$, которые имеют особенности. Развивая идеи, впервые описанные в [5], вычисляются разностные уравнения в особых уг-

ловых точках исследуемого тела. В этих особых точках из физических соображений принимается, что компоненты напряжений $\sigma_{12}^{(2)} = 0$ и $\sigma_{22}^{(2)} = 0$ и используются условия контакта (1.5).

В этих особых точках производные $v_{i,2}^{(1)}$ и $\sigma_{i,2}^{(2)}$ могут терпеть разрывы. Поэтому предполагается, что область D_1 по линии продолжения боковых сторон тела D_2 мысленно разделяется на подобласти (I), (II). Тем самым около особых точек рассматриваются три подобласти (I), (II), (III) (см. фиг. 1). Для подобластей (I) и (II) принимаются условия непрерывности функций

$$v_i^{(I)} = v_i^{(II)}, \quad \sigma_{ij}^{(I)} = \sigma_{ij}^{(II)} \quad (i, j = 1, 2) \quad (3.12)$$

и их производных

$$v_{i,1}^{(I)} = v_{i,1}^{(II)}, \quad \sigma_{i,1}^{(I)} = \sigma_{i,1}^{(II)} \quad (i, j = 1, 2). \quad (3.13)$$

Двенадцать производных для первой среды и восемь производных для второй среды вычисляются по формуле (3.11). Подставляя в уравнение (3.6) производные, найденные таким образом, для каждой подобласти и выполняя условия (1.5), (3.12) и (3.13), вычисляются неизвестные функции в этих точках, как многосвязных узлах совокупности подобластей (I), (II), (III):

$$\begin{aligned} v_1^{(I)} = v_1^{(2)} = v_1^{0(I)} + \frac{\tau}{2} & \left(\frac{\sigma_{11,1}^{0(I)} + \sigma_{11,1}^{(I)}}{2} + \frac{\sigma_{11,1}^{0(2)} + \sigma_{11,1}^{(2)}}{2} + \frac{\sigma_{12,2}^{0(I)} + \sigma_{12,2}^{(I)} + \sigma_{12,2}^{0(II)} + \sigma_{12,2}^{(II)}}{4} + \frac{\sigma_{12,2}^{0(III)} + \sigma_{12,2}^{(III)}}{2} \right), \\ v_2^{(I)} = v_2^{(2)} = v_2^{0(I)} + \frac{\tau}{2} & \left(\frac{\sigma_{21,1}^{0(I)} + \sigma_{21,1}^{(I)}}{2} + \frac{\sigma_{21,1}^{0(2)} + \sigma_{21,1}^{(2)}}{2} + \frac{\sigma_{22,2}^{0(I)} + \sigma_{22,2}^{(I)} + \sigma_{22,2}^{0(II)} + \sigma_{22,2}^{(II)}}{4} + \frac{\sigma_{22,2}^{0(III)} + \sigma_{22,2}^{(III)}}{2} \right), \\ \sigma_{11}^{(I)} = \sigma_{11}^{(2)} = \sigma_{11}^{0(I)} + \frac{\tau}{2} & \left(\gamma_{11}^{(I)} \frac{v_{1,1}^{0(I)} + v_{1,1}^{(I)}}{2} + \gamma_{11}^{(2)} \frac{v_{1,1}^{0(2)} + v_{1,1}^{(2)}}{2} + \gamma_{33}^{(I)} \frac{v_{2,2}^{0(I)} + v_{2,2}^{(I)} + v_{2,2}^{0(II)} + v_{2,2}^{(II)}}{4} + \gamma_{33}^{(2)} \frac{v_{2,2}^{0(III)} + v_{2,2}^{(III)}}{2} \right), \\ \sigma_{12}^{(I)} = \sigma_{12}^{(2)} & = 0. \end{aligned}$$

Функции $\sigma_{22}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) терпят разрыв в этих точках и имеют вид

$$\sigma_{22}^{(I)} = \sigma_{22}^{0(I)} + \frac{\tau}{2} \left(\gamma_{11}^{(I)} \frac{v_{2,2}^{0(I)} + v_{2,2}^{(I)} + v_{2,2}^{0(II)} + v_{2,2}^{(II)}}{2} + \gamma_{33}^{(I)} (v_{1,1}^{0(I)} + v_{1,1}^{(I)}) \right),$$

где верхние арабские цифры означают принадлежность соответствующих параметров k -й среде ($k = 1, 2$), а римские цифры – для i -й подобласти.

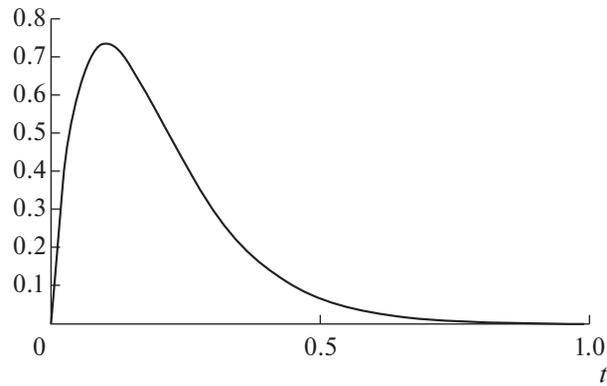
Относительно сказанного в пп. 3.1–3.3 можно заметить, что значения производных в узловых точках исследуемой области на нижнем слое по времени вычисляются с использованием центральной разности во внутренних узловых точках, а в граничных точках соответствующим аппроксимациями “вперед” и “назад”.

Проведена компьютерная реализация алгоритма, отладка программы и на ее основе выполнен ряд численных экспериментов, результаты некоторых из них приведем ниже.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ УПРУГОГО МАССИВА ПРИ ОБРАЗОВАНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ТРЕЩИН РАЗРЫВА

При образовании трещин разрыва происходит сброс напряжений, перпендикулярных поверхности трещины. При этом в среде в окрестности трещины формируются две ударные упругие волны объемной и сдвиговой деформации, которые распространяются со скоростями продольных и поперечных волн и дифрагируют на дневной поверхности, отражаясь от нее и порождая поверхностные волны.

Здесь моделируется горизонтальная трещина разрыва, параллельная дневной поверхности. Расчеты произведены для среды с безразмерными параметрами: $\rho = 1$, $c_1 = \sqrt{\gamma_{11}} = 1$, $c_2 = \sqrt{\gamma_{12}} = 0.577$ при глубине и ширине трещины соответственно $L = 1$, $d = 0.1$, на интервале времени (0, 6).



Фиг. 2. Скачок напряжений на трещине.

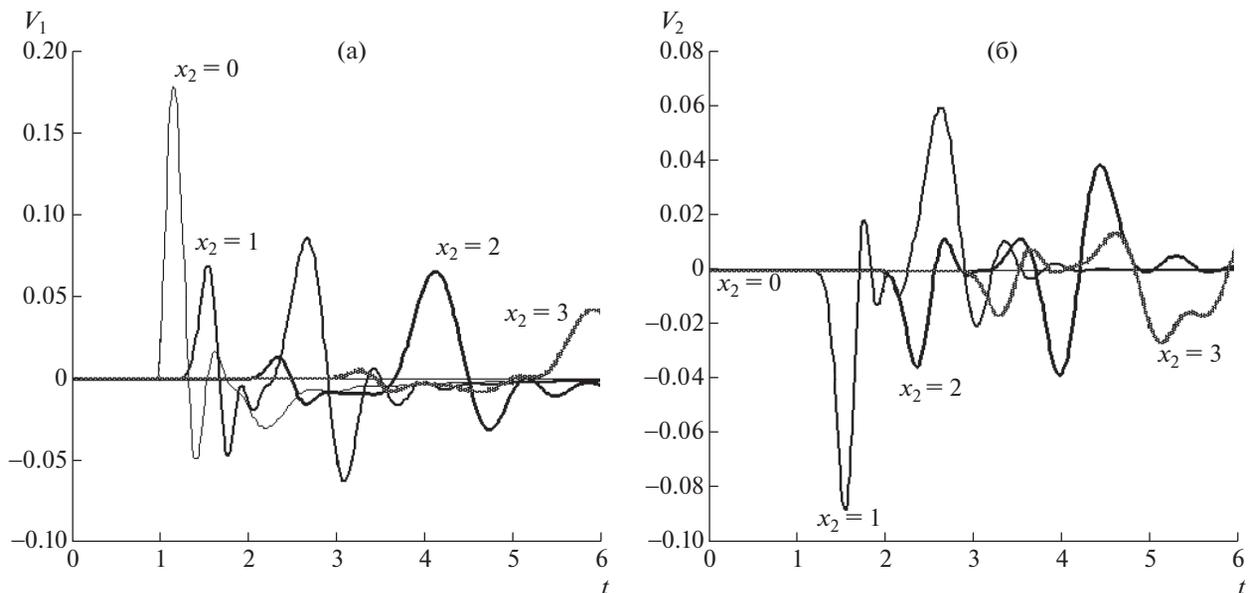
Скачок напряжений на трещине задается в виде вертикального импульса (см. фиг. 2):

$$P_1(x, t) = 20te^{-10t}H(t), \quad P_2(x, t) = 0.$$

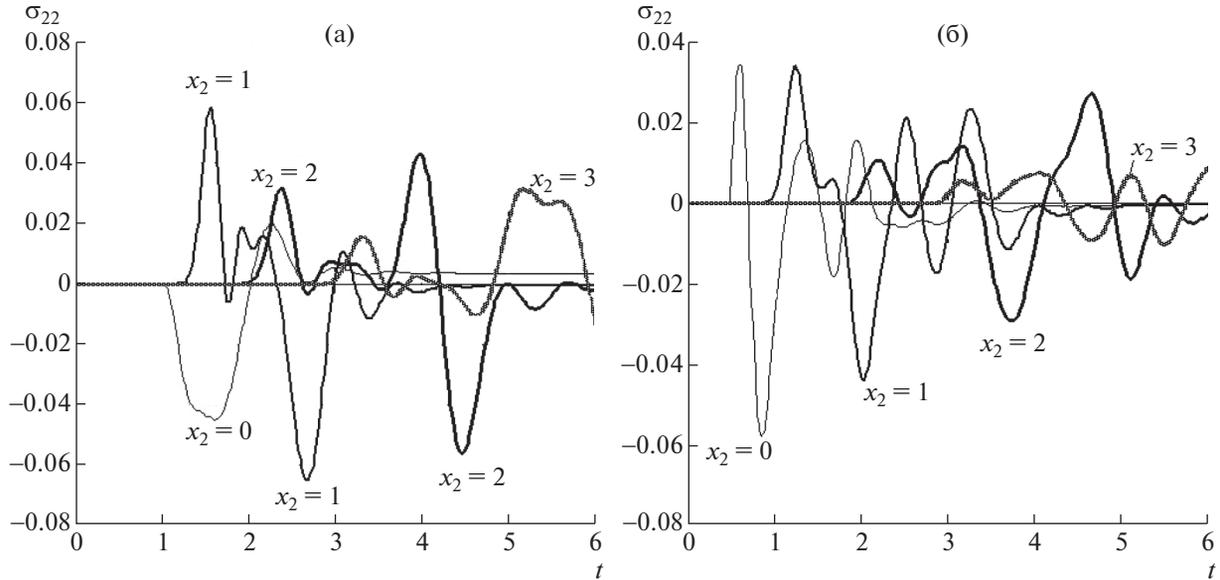
В расчетах шаги по пространственной сетке $h_1 = h_2 = h = 0.05$, по времени $\tau = 0.025$, а параметр дельтаобразной функции $\epsilon = h$.

4.1. Осциллограммы скоростей и напряжений на дневной поверхности

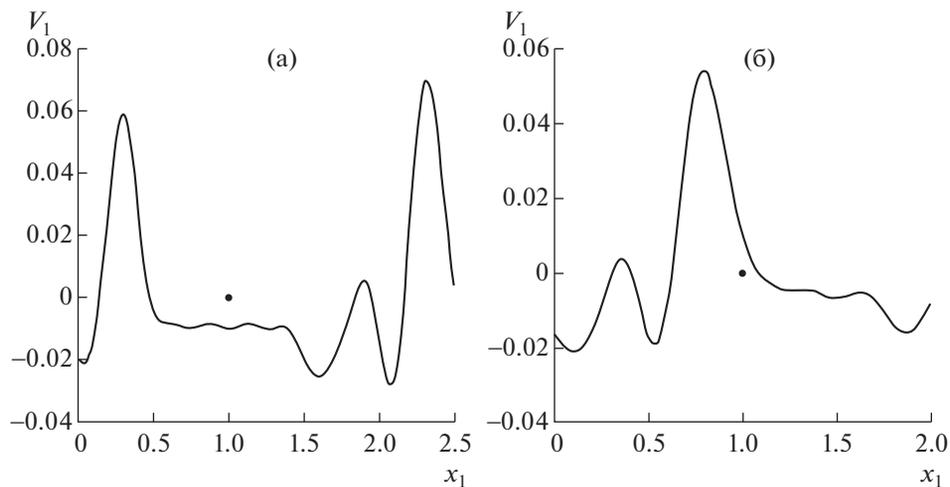
На фиг. 3 представлены графики изменения с течением времени вертикальных и горизонтальных компонент скорости движения разных точек дневной поверхности. Скорости распространения продольных и поперечных волн в безразмерных величинах составляют $c_1 = 1$ и $c_2 = 0.577$ соответственно. Отсюда следует, что объемные (продольные) и сдвиговые (поперечные) волны от трещин к точке $O(0, 0)$ придут за время $t_1 = 1$ и $t_2 = 73$ соответственно, а в точку $A(0, 1)$ за $t_1 = 35$ и $t_2 = 2.33$, в точку $B(0, 2)$ за $t_1 = 2.15$ и $t_2 = 3.71$ и в точку $C(0, 3)$ за $t_1 = 3.07$ и $t_2 = 5.3$. До момента прихода упругих волн среда покоится. Затем в расчетные моменты времени возни-



Фиг. 3. Осциллограммы скоростей v_1 (а) и скоростей v_2 (б) дневной поверхности при $x_1 = 0$, $x_2 = 0; 1; 2; 3$ (трещина отрыва).



Фиг. 4. Осциллограммы напряжений σ_{22} на поверхности $x_1 = 0$ (а) и на глубине $x_1 = 0.5$ (б), при $x_2 = 0; 1; 2; 3$ (трещина отрыва).

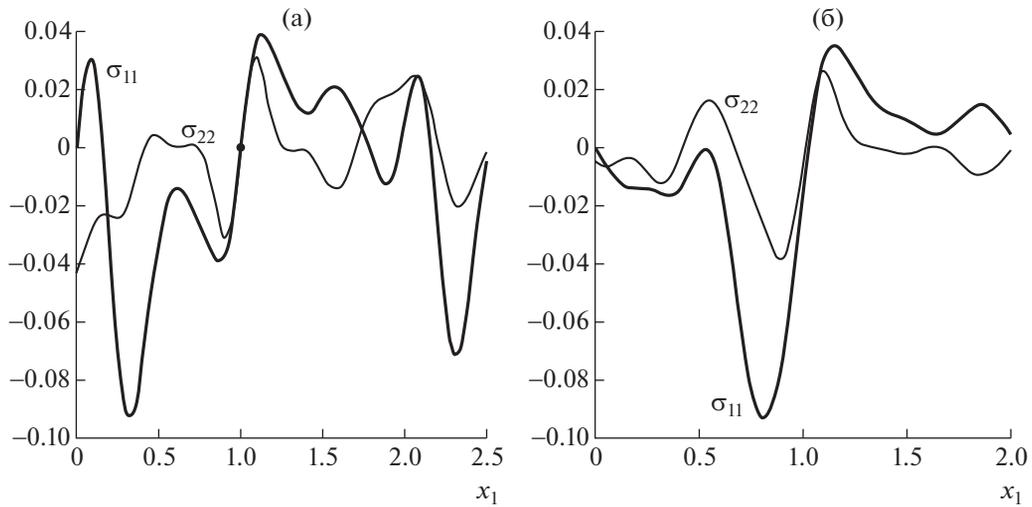


Фиг. 5. Срез скоростей v_1 на плоскости $x_2 = 0$ при $t = 1,5$ (а), $t = 2$ (б) (трещина отрыва).

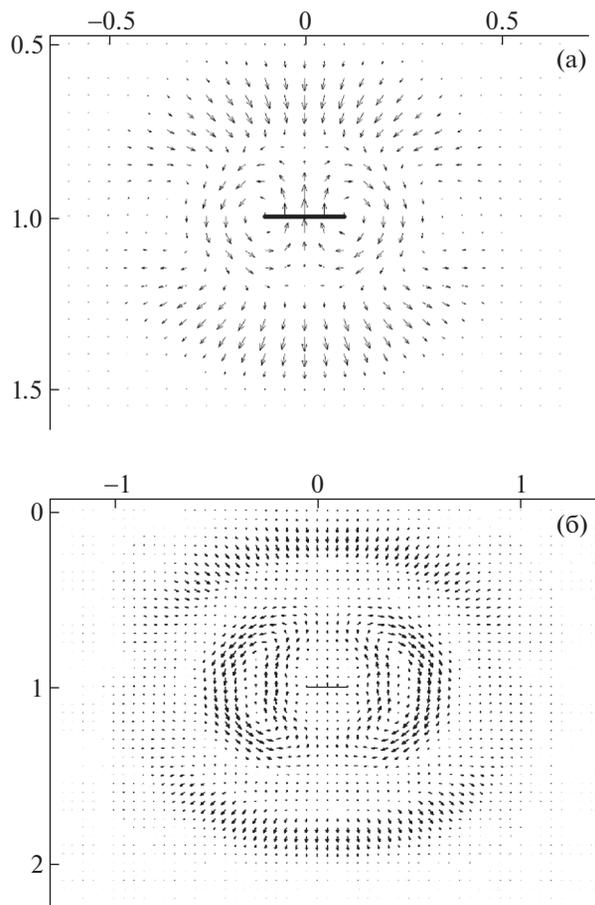
кает всплеск скорости колебания и начинается естественный колебательный характер движения среды. Картина симметрична относительно эпицентра O ($x_1 = 0, x_2 = 0$), так как сброс напряжений происходит симметрично и параллельно вертикальной оси. Максимальные вертикальные скорости в эпицентре, а с удалением от него они убывают.

На фиг. 4 представлены осциллограммы напряжений σ_{22} на поверхности $x_1 = 0$ (фиг. 4а) и на глубине $x_1 = 0.5$ (фиг. 4б) в точках $x_2 = 0; x_2 = 1; x_2 = 2; x_2 = 3$. Напряжения меняют знак: в эпицентре в основном это растягивающие напряжения. А вдали от него на дневной поверхности происходит колебательный процесс со сменой сжимающих напряжений на растягивающие и наоборот.

На фиг. 5 и 6 показаны срезы скорости v_1 и напряжений σ_{11} и σ_{22} на плоскости $x_2 = 0$ в упругой полуплоскости (в силу симметричности воздействия в данной плоскости $v_2 = 0$) в момент времени $t = 1, t = 1.5$ и $t = 2$. Можно заметить, что в момент времени $t = 1$ волна только добегает до дневной поверхности (нет еще отраженной волны) и скорость v_1 так же симметрична, а напря-

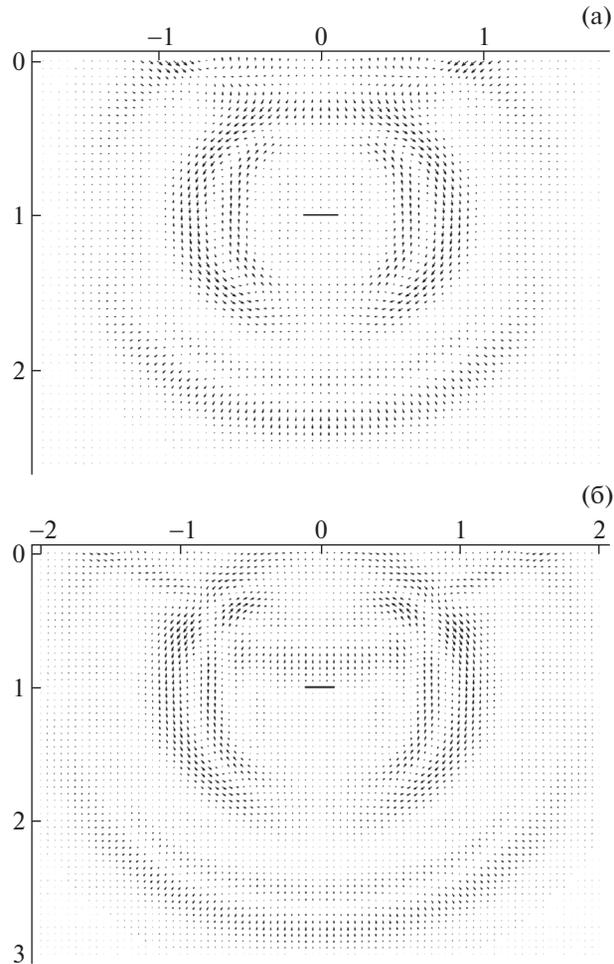


Фиг. 6. Срез напряжения σ_{11} и σ_{22} на плоскости $x_2 = 0$, в моменты времени $t = 1.5$ (а), $t = 2$ (б) (трещина отрыва).



Фиг. 7. Векторное поле скоростей до отражения ударных волн: $t = 0.5$ (а); $t = 1$ (б) (трещина отрыва).

жения σ_{11} и σ_{22} антисимметричны относительно оси, проходящей вдоль трещины, что соответствует данному воздействию. А также этот момент соответствует моменту когда, внешнее воздействие снято, и среда начинает свободно противодействовать. Это видно по изменению на-



Фиг. 8. Векторное поле скоростей после отражения ударных волн: $t = 1.5$ (а); $t = 2$ (б) (трещина отрыва).

правления скорости v_1 и напряжениям рядом с трещиной, которые перешли из сжимающих напряжений в растягивающие и, наоборот, из растягивающих напряжений в сжимающие.

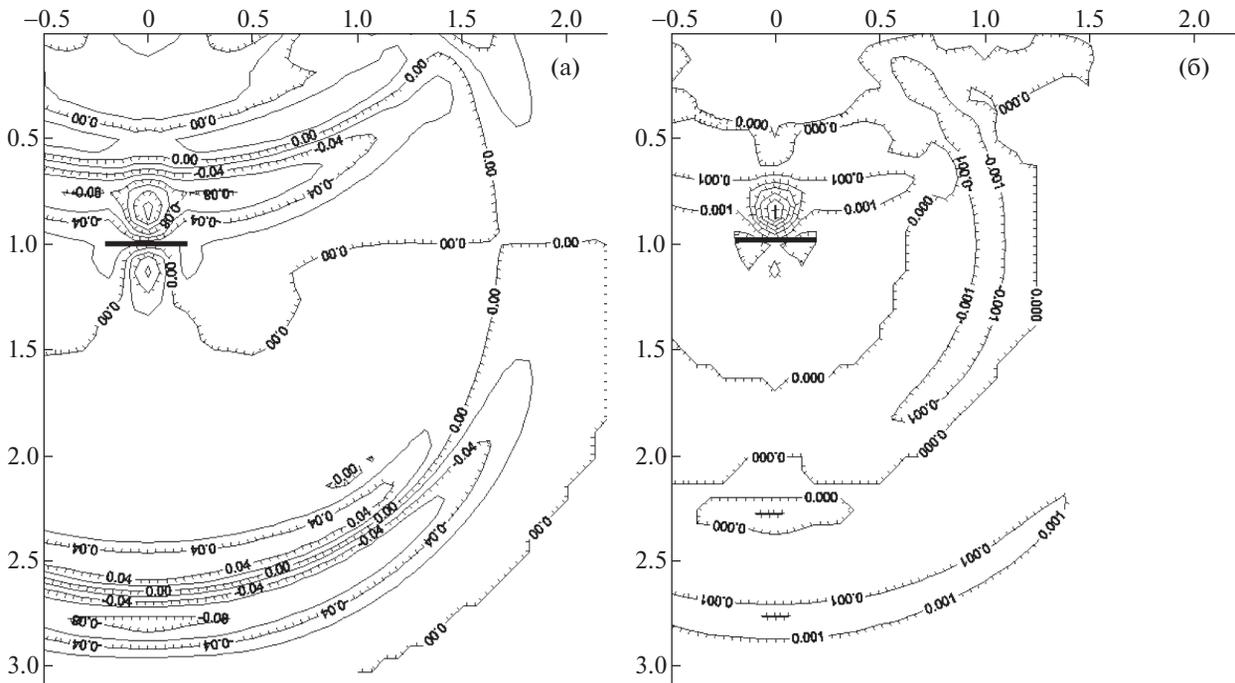
В момент времени $t = 1.5$ отраженная от дневной поверхности волна добегает до середины расстояния до трещины, а в момент $t = 2$ добегает до трещины, при этом теряется симметричность графика. Сравнивая на фигурах амплитуды колебания, можно заметить, что с течением времени амплитуда убывает. Это связано с тем, что в эти моменты нет внешнего воздействия, а среда противодействует, заставляя волну гаснуть (волна теряет энергию).

4.2. Векторные поля скоростей в среде при образовании трещины отрыва

На фиг. 7 представлены векторные поля скоростей в среде. В начальный момент на трещине возникают две ударные волны: объемная сжатия-расширения, которая движется со скоростью c_1 , и сдвиговая, скорость которой c_2 . Объемные волны опережают сдвиговые. На фигуре им соответствуют кольцевые зоны в окрестности трещины. На фронтах ударных волн должны выполняться условия на скачки [9]:

$$[v_j]_{Fr_k} = -(\rho c_k)^{-1} [\sigma_{ij}] n_i, \quad k = 1, 2.$$

В данном случае они равны нулю, поскольку волны слабые ударные, так как сброс напряжений непрерывен и начинается с нуля (см. фиг. 2). Перед фронтом первой ударной волны среда покоится.



Фиг. 9. Изолинии первых (а) и вторых (б) инвариантов напряжения при $t = 1.5$ (трещина отрыва).

В момент времени $t = 0.5$ объемная волна пробегает расстояние 0.5, а сдвиговая волна 0.29, что и видим на фиг. 7а. Можно заметить, что на концах трещины образовалось вихревое поле, что характеризует сдвиговые волны. Края трещины работают как источники цилиндрических сдвиговых волн. На фиг. 8б показан момент, когда отраженная объемная волна добежала до трещины, а сдвиговая, пройдя сквозь эту отраженную волну (с некоторыми искажениями), добежала до дневной поверхности и начался процесс отражения. Возникает сложная дифракционная картина взаимодействия падающих и отраженных ударных волн и формируется сложное напряженно-деформированное состояние среды.

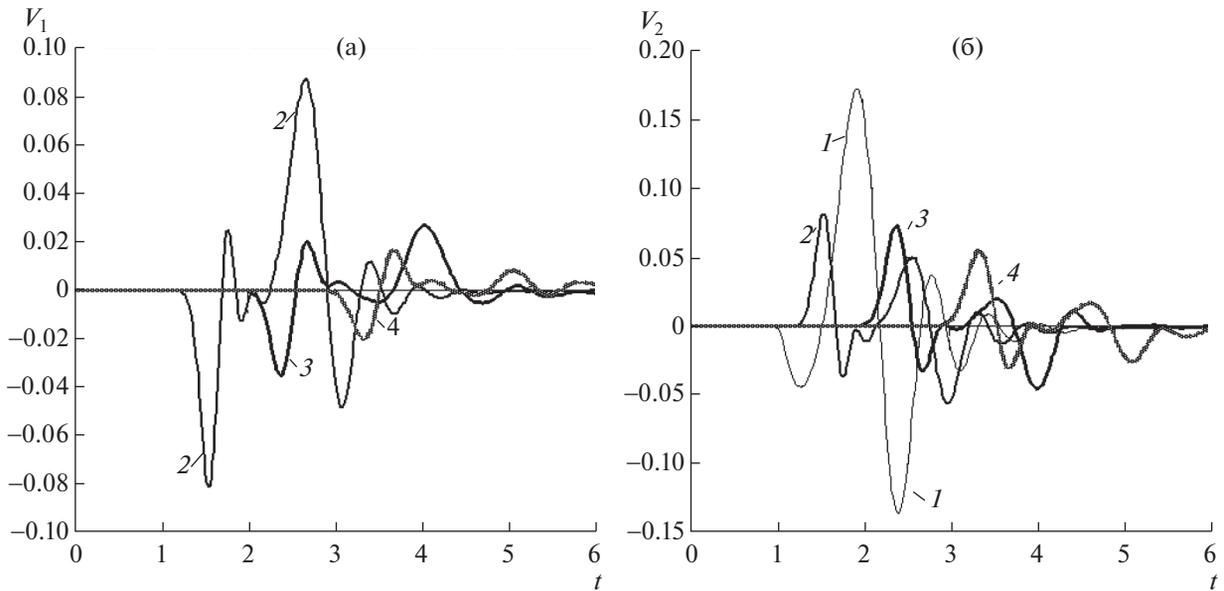
4.3. Напряженное состояние породного массива

На фиг. 9 представлены изолинии первых (фиг. 9а) и вторых (фиг. 9б) инвариантов тензора напряжения в момент времени $t = 1.5$. Первый инвариант определяет давление в среде, второй – интенсивность касательных напряжений. Как видим, напряжения в верхней зоне от дифракции волн на дневной поверхности в полтора раза превышают напряжения в свободной нижней зоне рассеивания упругих волн (0.12 и 0.8 для фиг. 9а и 0.0045 и 0.0030 для фиг. 9б). При переходе к размерным величинам используем формулы:

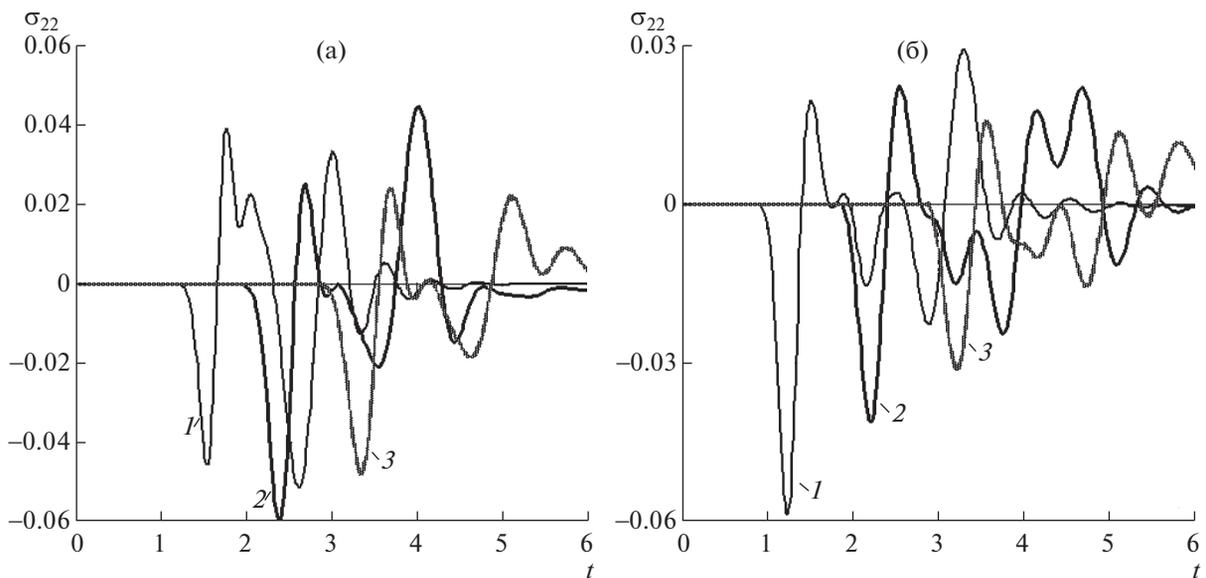
$$t = \frac{\bar{t}L}{c_1}; \quad x_i = \bar{x}_i L; \quad v_i = \bar{v}_i u_i c_1; \quad \sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} \rho c_1^2; \quad F_i = \frac{\bar{F}_i \rho c_1^2}{L},$$

где черта указывает на безразмерные величины.

Обычно в сейсмологии для грунтов используют следующие параметры: $\rho = 1600 \text{ кг/м}^3$, $c_2 = 200 \text{ м/с}$, $c_1 = 346.41 \text{ м/с}$. Учитывая эти параметры, если взять глубину расположения трещины $L = 100 \text{ м}$, расчетный безразмерный интервал времени (0, 6) окажется в реальности (0, 73с), длина трещины $2d = 20 \text{ м}$, то в эпицентре $O(0, 0)$ максимальная по абсолютной величине скорость $v_1 = 62.28 \text{ м/с}$, а напряжение $\sigma_{22} = 7.66 \text{ МН/м}^2$.



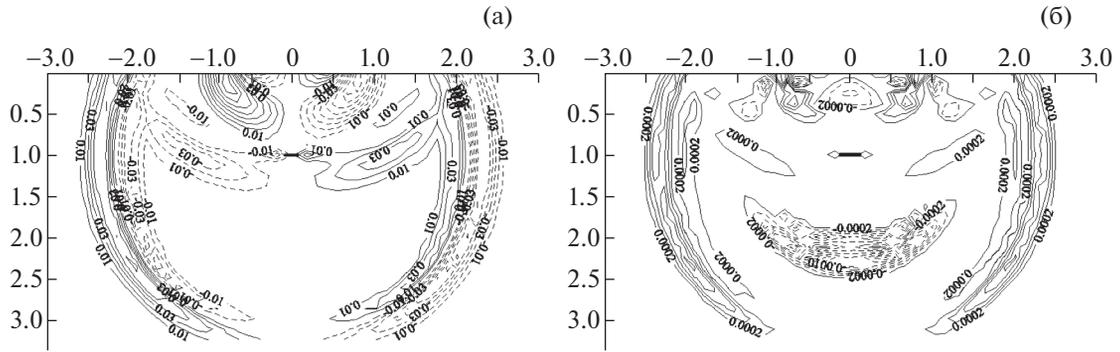
Фиг. 10. Осциллограммы скоростей v_1 (а) и скоростей v_2 (б) на дневной поверхности $x_1 = 0$, при 1) $x_2 = 0$; 2) $x_2 = 1$; 3) $x_2 = 2$; 4) $x_2 = 3$ (трещина сдвига).



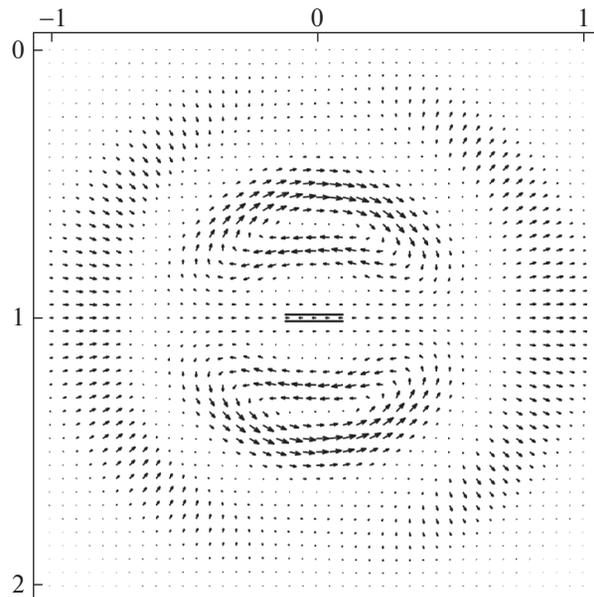
Фиг. 11. Осциллограммы напряжения σ_{22} на дневной поверхности $x_1 = 0$ (а) и на глубине $x_1 = 0.5$ (б), при 1) $x_2 = 1$; 2) $x_2 = 2$; 3) $x_2 = 3$ (трещина сдвига).

5. ДИНАМИКА СРЕДЫ ПРИ СБРОСЕ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ НА ТРЕЩИНЕ

При образовании сдвиговой трещины происходит сброс горизонтальных напряжений. На фиг. 10, 11 представлены осциллограммы скоростей и напряжений в эпицентре и фиксированных точках поверхности и среды. Скорости распространения продольных и поперечных волн в безразмерных величинах составляют $c_1 = 1$ и $c_2 = 0.577$ соответственно. Отсюда следует, что объемные (продольные) и сдвиговые (поперечные) волны от трещины к точке $O(0, 0)$ придут за время $t_1 = 1$ и $t_2 = 73$ соответственно, а в точку $A(0, 1)$ за $t_1 = 35$ и $t_2 = 2.33$, в точку $B(0, 2)$ за



Фиг. 12. Изолинии первых (а) и вторых (б) инвариантов напряжения $t = 1.5$ (трещина сдвига).



Фиг. 13. Векторное поле скоростей при подходе ударной волны к поверхности: $t = 1$ (трещина сдвига).

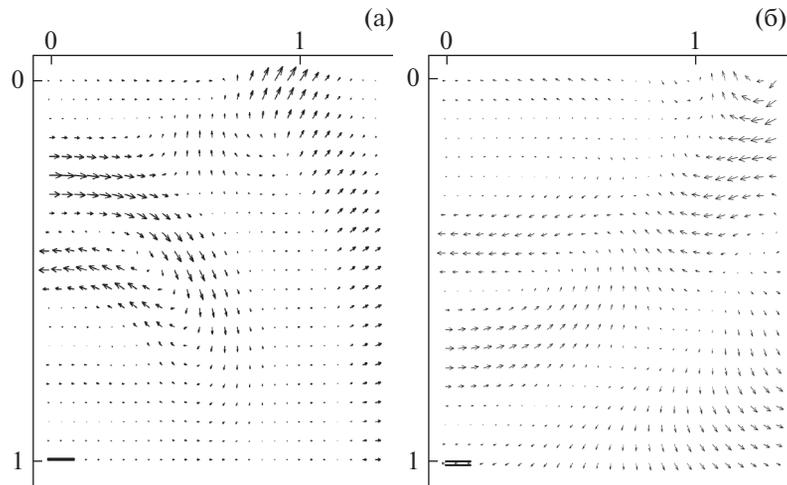
$t_1 = 2.15$ и $t_2 = 3.7$ и в точке $C(0, 3)$ за $t_1 = 3.07$ и $t_2 = 5.3$. В указанные моменты времени возникают колебания дневной поверхности. Характер колебаний в эпицентре на поверхности резко отличается от колебаний при образовании трещины отрыва. Преобладают горизонтальные колебания поверхности.

Скорость $v_1 = 0$ в эпицентре O (и по всей прямой $x_2 = 0$) объясняется типом воздействия на трещине. Так как в перпендикулярном направлении к дневной поверхности движется сдвиговая волна, то можно заметить, что чем ближе точка к эпицентру, тем выше амплитуда колебания горизонтальных скоростей точек дневной поверхности. Отрицательное направление скорости v_2 в точке O в промежуток времени (1; 7) объясняется взаимодействием фронтов распространяющихся волн.

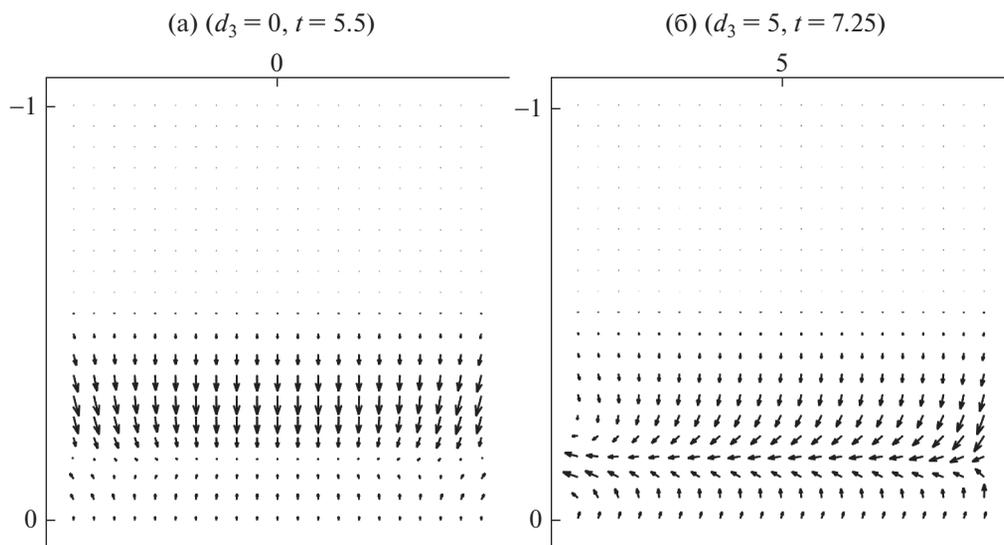
На фиг. 12 представлены изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжений в моменты времени $t = 1.5$ при образовании трещин сдвига. Они характеризуют распределение давления и интенсивности касательных напряжений в окрестности очага землетрясения.

На фиг. 13 представлено векторное поле скоростей в среде при сбросе горизонтальных напряжений на трещине:

$$P_1(x, t) = 0, \quad P_2(x, t) = 20t \exp(-10t)H(t)$$



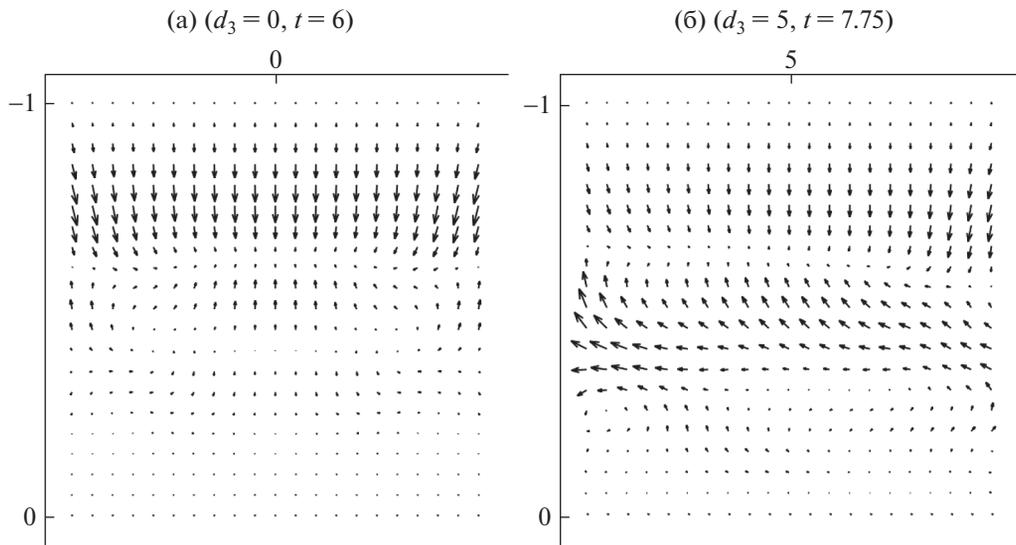
Фиг. 14. Формирование поверхностной волны Рэлея: $t = 2, 3.25$ (а), (б) (трещина сдвига).



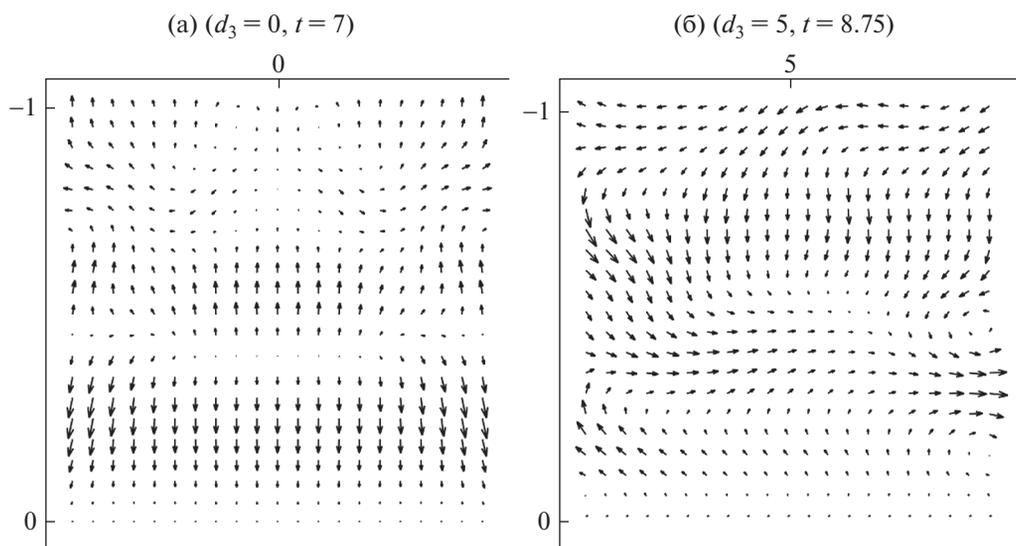
Фиг. 15. Векторное поле скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны распространились до середины штампа.

Поскольку картина антисимметрична относительно вертикальной оси, то далее на фигурах представлена только правая половина (в левой половине направление векторов меняется на противоположное). В момент времени $t = 1$ объемная волна сжатия-расширения пробегает расстояние до поверхности, а сдвиговая волна $0.577L$. Можно заметить вихревую зону, распространяющуюся вверх и вниз от трещины, порождаемую сдвиговыми деформациями на трещине. Ее окаймляет и опережает зона объемных расширений – сжатий, интенсивность скоростей перемещений в которой меньше, чем за фронтом сдвиговой волны.

Взаимодействие объемных и сдвиговых волн с дневной поверхностью и между собой (после отражения) порождают разные волны, среди них поверхностные. На фиг. 14 можно видеть, как начинает формироваться волна вдоль дневной поверхности, образуя поверхностную волну Рэлея. В данной среде она распространяется со скоростью $c_R = 0.918c_2$, т.е. близко к скорости распространения сдвиговой волны. Волны, идущие от трещины вниз, не встречая препятствий, рассеиваются с глубиной и с течением времени.



Фиг. 16. Векторное поле скоростей точек тела D_2 до отражения преломленных волн от верхней границы.



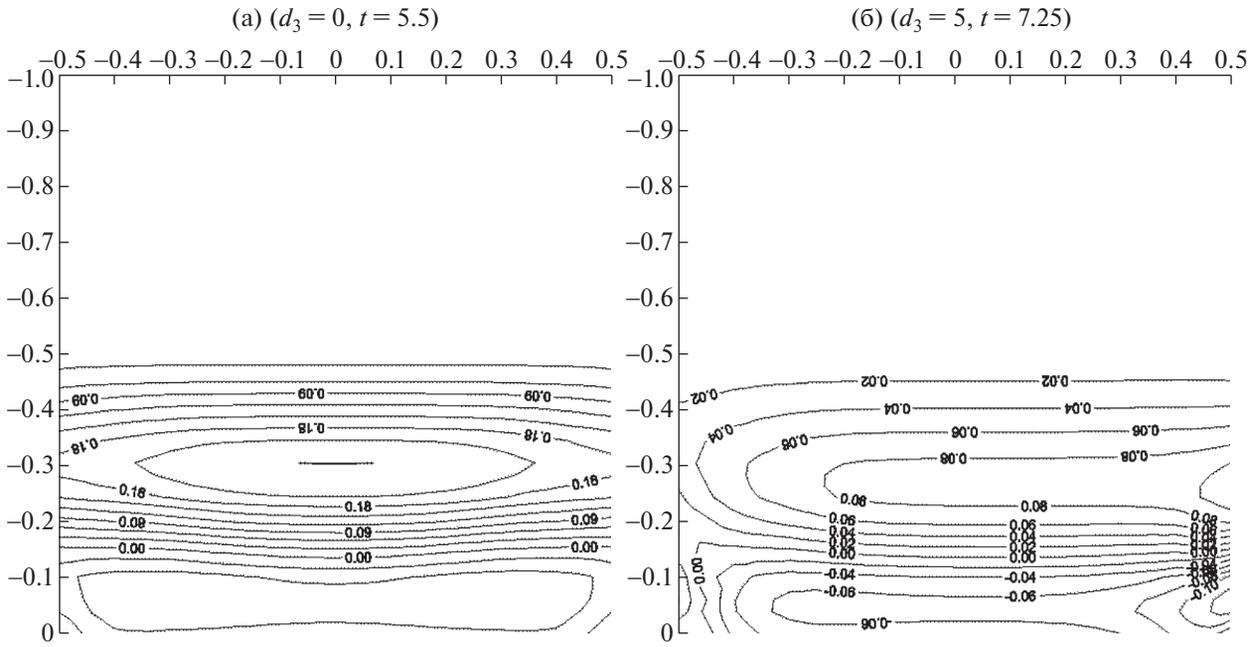
Фиг. 17. Векторное поле скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца.

6. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ШТАМПА ПРИ ПРЕЛОМЛЕНИИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

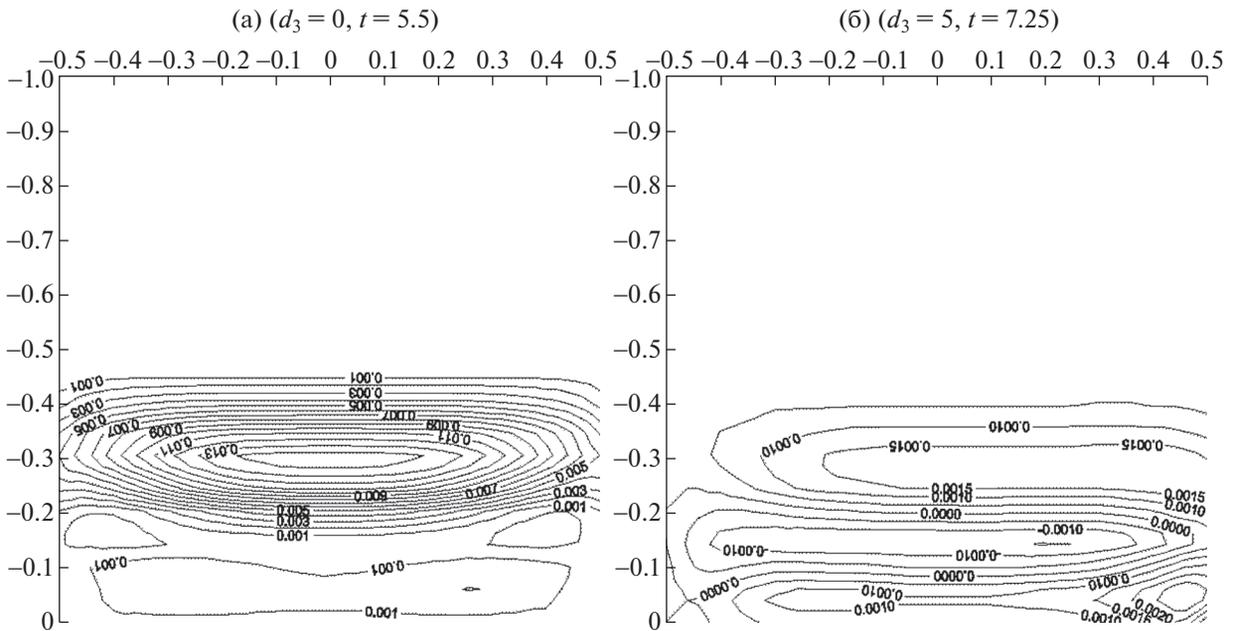
Исследовалось напряженно-деформированное состояние штампа при преломлении сейсмических волн, при образовании трещин отрыва и сдвига. Проводился сопоставительный анализ в зависимости от расстояния штампа до эпицентра. Здесь на фиг. 15–19 представлены результаты расчетов для штампа, расположенного в эпицентре (фиг. 15а–19а) и на некотором расстоянии от него (фиг. 15б–19б), при образовании трещины разрыва в опорном массиве.

В качестве материала для штампа взят бетон с параметрами: $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 3593 \text{ м/с}$, $c_2 = 2200 \text{ м/с}$, при следующих размерах штампа: $d_1 = 1$, $d_2 = 0.5$.

Здесь представлены расчеты напряженно-деформированного состояния штампа при образовании в подстилающем пространстве трещины разрыва. На фиг. 15 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны дошли до середины

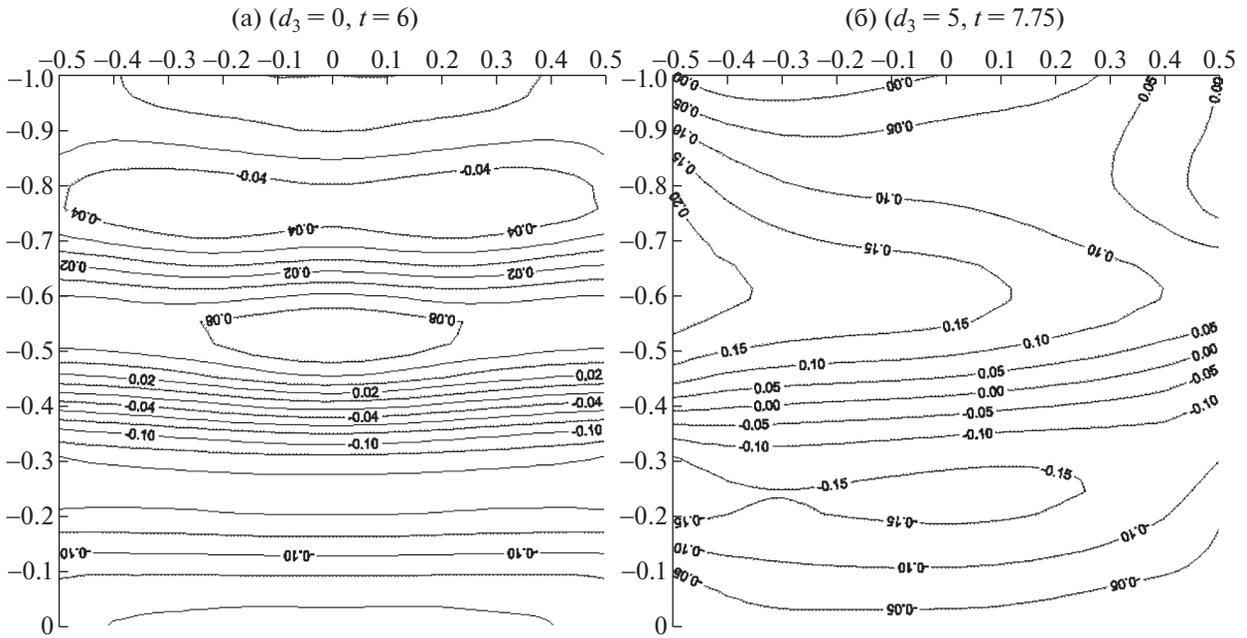


Фиг. 18. Изолинии первого инварианта тензора напряжений штампа в момент времени, когда преломленные волны распространились до середины.

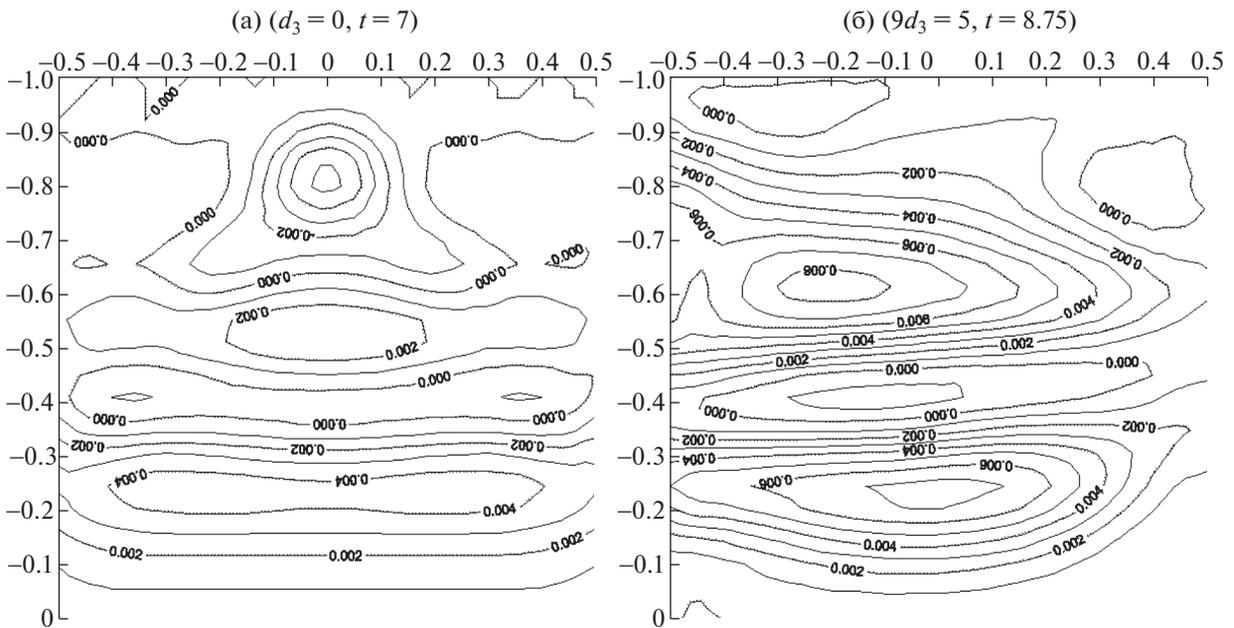


Фиг. 19. Изолинии второго инварианта тензора напряжений штампа в момент времени, когда преломленные волны распространились до середины.

штампа. При $d_3 = 0$ (фиг. 15а) распространяется только продольная волна, и можно заметить эффект взаимодействия с боковой поверхностью. А при $d_3 = 5$ (фиг. 15б) за продольной волной следует и поперечная волна, что соответствует типу воздействия. Здесь тоже замечен эффект взаимодействия, но сильнее с правой стороны. Это объясняется тем, что штамп стоит справа от эпицентра.

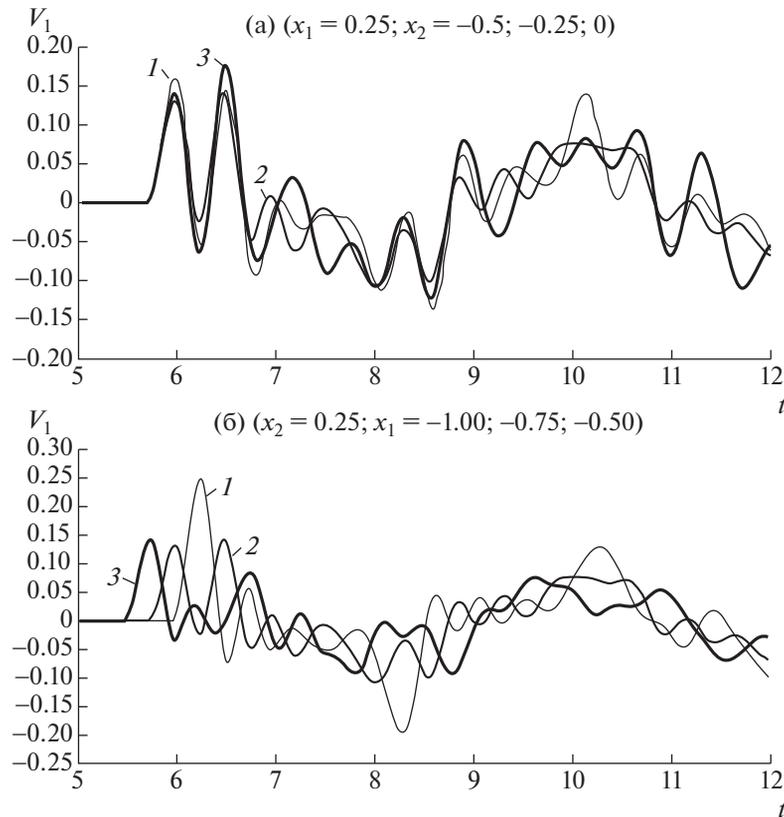


Фиг. 20. Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца.



Фиг. 21. Изолинии первого инварианта напряжения тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца.

На фиг. 16 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленная волна только добежала до верхнего торца штампа. На первой фигуре можно заметить, что за продольной волной начинается образование слабых поперечных волн, а на втором видно, что отраженная с правой боковой стороны волна порождает поперечную волну, которая достигла левой стороны.



Фиг. 22. Осциллограммы скоростей v_1 штампа.

На фиг. 17 представлены векторные поля скоростей точек тела D_2 в момент времени, когда преломленные волны отразились от верхнего торца. Здесь наблюдается сложная дифракционная картина. На фиг. 17а видно, что верхние угловые точки работают как источники продольных и поперечных волн.

На фиг. 18–21 представлены изолинии первого и второго инвариантов тензора напряжений в разные моменты времени, которые характеризуют напряженное состояние тела.

Сравнивая их, видим, что тело в эпицентре подвергается обеим деформациям схожего характера, причем они симметричны оси x_1 , и для тела, смещенного от эпицентра, характер объемных и сдвиговых изменений схож, но здесь волна деформации распространяется и от правой боковой стороны. А распределение давления и интенсивности касательных напряжений в первом теле сравнительно больше, чем во втором. Это связано с тем, что распространяющаяся волна возмущений теряет энергию по мере прохождения пути. Эти фигуры наглядно демонстрируют, если посмотреть на движение боковых поверхностей штампа, как деформируются здания при землетрясениях, причем сдвиговые деформации наиболее разрушительны.

На фиг. 22 представлены осциллограммы скорости движения сечения штампа на заданной высоте в его различных точках.

Аналогичные исследования для поверхностного сооружения были проведены при дифракции и преломлении сейсмических волн при образовании сдвиговых трещин.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В задачах геофизики и сейсмологии исследование процессов распространения, дифракции и преломления волн на границах раздела сред и дневной поверхности тесно связано с вопросами сейсмического районирования территорий, сейсмостойким строительством как наземных, так и подземных сооружений. Наиболее экономичными и эффективными для изучения волновых процессов в средах и конструкциях являются методы математического моделирования. Их ис-

пользование связано с построением математических моделей и созданием на их базе программных комплексов, которые дают возможность проводить разнообразные численные эксперименты по изучению напряженно-деформированного состояния сред и конструкций при разнообразных динамических воздействиях, которые на реальных объектах провести экспериментально часто просто невозможно.

Разработанный пакет программ позволяет определить характеристики напряженно-деформированного состояния породного массива и поверхностного сооружения в любой расчетной точке области при дифракции и преломлении сейсмических волн, порождаемых источниками на трещине различного типа, варьировать геометрические параметры расчетной схемы и физико-механические параметры сооружения и породного массива.

Разработанные методы решения краевых задач можно использовать для исследования процессов распространения и дифракции волн в земной коре, а также при динамических воздействиях различной природы в наземных сооружениях для исследования их сейсмостойкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Клифтон Р.Д.* Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // *Механика (сборник переводов)*. М., 1968. С. 103–122.
2. *Рекер В.В.* Численные решения трехмерных задач динамической теории упругости // *Прикл. механ.* Серия Е. 1970. № 1. С. 121–129.
3. *Тарабрин Г.Т.* Применение метода бихарактеристик для решения нестационарных задач динамики анизотропных массивов // *Строительная механ. и расчет сооружений*. 1980. № 4. С. 38–42.
4. *Тарабрин Г.Т.* Решение методом бихарактеристик нестационарных задач динамики анизотропных оболочек // *Строительная механ. и расчет сооружений*. 1980. № 6. С. 53–58.
5. *Байтелиев Т.Б., Мардонов Б.* Решение плоской динамической задачи теории упругости для полосы методом пространственных характеристик. В кн.: *Проблемные вопросы механики горных пород*. Алма-Ата: Наука, 1972. С. 194–209.
6. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975.
7. *Алексеева Л.А., Дильдабаева И.Ш.* Обобщенные решения уравнений динамики упругой среды с криволинейной трещиной при плоской деформации // *Матем. журнал*. 2007. Т. 7. № 2. С. 19–31.
8. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1986.
9. *Петрашень Г.И.* Распространение волн в анизотропных упругих средах. М.: Наука, 1980.