ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 9, с. 1566–1575

УДК 519.63

МЕТОД СУММАРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО ПРОЦЕССЫ ДРОБЛЕНИЯ И ЗАМЕРЗАНИЯ КАПЕЛЬ В КОНВЕКТИВНЫХ ОБЛАКАХ[1)]

© 2020 г. Б. А. Ашабоков[1], А. Х. Хибиев[2,*], М. Х. Шхануков-Лафишев[2]

[1] 360051 Нальчик, ул. И. Арманд, 37а, ФГБУН Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, Россия

[2] 360051 Нальчик, ул. Шортанова, 89а, ФГБУН Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Россия

**e-mail: akkhibiev@gmail.com*

Поступила в редакцию 11.12.2019 г.
Переработанный вариант 03.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Рассматривается локально-одномерная схема для уравнения параболического типа общего вида в p-мерном параллелепипеде. Для описания процессов дробления и замерзания капель в конвективных облаках в рассматриваемое уравнение включается нелокальный интегральный источник специального вида. Получена априорная оценка для решения локально-одномерной схемы и доказана ее сходимость. Библ. 10. Фиг. 1.

Ключевые слова: краевая задача, локально-одномерная схема, устойчивость, сходимость схемы, погрешность аппроксимации.

DOI: 10.31857/S0044466920090057

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для параболических уравнений общего вида с нелокальным источником возникают при изучении диффузии в турбулентной плазме, при описании функции распределения по массам капель и ледяных частиц, изменения функции рапределения капель за счет микрофизических процессов конденсации, коагуляции капель, дробления и замерзания [1]–[6]. Введем функцию $u(x,m,t)$ такую, что $u(x,m,t)dm$ дает в каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t концентрацию облачных капель, масса которых заключена в интервале от m до $m + dm$. При этом $u(x,m,t)dm$ есть вероятность того, что масса облачных капель в момент времени t находится между m и $m + dm$, величина $u(x,m,t)$ называется плотностью вероятности.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В цилиндре $Q_T = G \times (0 < t \le T]$, основанием которого служит прямоугольный параллелепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\}$ с границей Γ рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,m,t), (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad u(x,m,0) = u_0(x,m), \tag{2}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-31-90094).

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + r_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{p} q(x,m,t)u(x,m,t) + \\ + \frac{1}{p}\int_0^{m_1} Q(m,m')P(m')u(x,m',t)dm', \tag{3}$$

где $q(x,m,t) = P(m) + R(x,m)$, $r(m)$ — радиус капли массой m, $P(m)$ — вероятность распада в единицу времени капли массой m, $R(x,m)$ — вероятность замерзания в единицу времени капли массой m, $Q(m,m')$ — вероятность образования капли массой m при распаде капли массой m', $T_m(m)$ — медианная температура замерзания капель массой m, $T_b(x)$ — температура воздуха в указанной точке, $r_\alpha(x,t)$, $\alpha = 1,2,\ldots, p$ — компоненты вектора скорости воздушных потоков, m_1 — максимальная масса (0.13 г) капель в облаке.

Предположим, что задача (1), (2) имеет единственное достаточно гладкое решение. При оценке порядка аппроксимации будем предполагать, что $k_\alpha(x,t) \in C^{3,1}(\bar{Q}_T)$, $r_\alpha(x,t)$, $q(x,m,t)$, $f(x,m,t) \in C^{2,1}(\bar{Q}_T)$, где $C^{n_1,n_2}(\bar{Q}_T)$ — класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка n_1 по x и n_2 по t в замкнутой области $\bar{Q}_T$. Функции $Q(m,m')$, $P(m)$, $R(x,m)$ рассчитываются по следующим формулам (см. [7]):

$$P(m) = 2.94 \cdot 10^{-7} \exp(34r(m)),$$
$$R(x,m) = A\exp[B(T_m(m) - T_b(x))],$$
$$Q(m,m') = \frac{145.37}{m}\frac{r(m)}{r(m')}\exp\left(-7\frac{r(m)}{r(m')}\right),$$

где A, B — параметры,

$$0 < c_0 \le k_\alpha \le c_1, \quad |r_\alpha|, |q| \le c_2.$$

2. ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ СХЕМА (ЛОС)

На отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau,\ j = 0,1,\ldots,j_0\}$ с шагом $\tau = \frac{T}{j_0}$. Каждый интервал (t_j, t_{j+1}) разобьем на p частей точками $t_{j+\frac{\alpha}{p}} = t_j + \frac{\alpha}{p}\tau$, $\alpha = 1,2,\ldots,p$, и обозначим через $\Delta_\alpha = \left(t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}, t_{j+\frac{\alpha}{p}}\right]$. Пространственную сетку выберем равномерной по каждому направлению Ox_α с шагом $h_\alpha = \frac{l_\alpha}{N_\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p}\bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha : i_\alpha = 0, 1, \ldots, N_\alpha, \alpha = 1, 2, \ldots, p\right\}.$$

Уравнение (1) перепишем в виде

$$\Re u = \frac{\partial u}{\partial t} - Lu - f = 0, \tag{4}$$

или

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\Re_\alpha u = 0, \quad \Re_\alpha u = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t} - L_\alpha u - f_\alpha, \quad \sum_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f, \tag{5}$$

где $f_\alpha(x,m,t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$ — произвольные функции (обладающие той же гладкостью, что и $f(x,m,t)$), удовлетворяющие условию нормировки

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_p = f.$$

На каждом полуинтервале Δ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, будем последовательно решать задачи

$$\Re_\alpha v_{(\alpha)} = \frac{1}{p}\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} - L_\alpha v_{(\alpha)} - f_\alpha = 0, \quad x \in G, \quad t \in \Delta_\alpha, \tag{6}$$

$$v_{(\alpha)} = 0, \quad x_\alpha = 0,$$
$$v_{(\alpha)} = 0, \quad x_\alpha = l_\alpha,$$

полагая при этом [8, с. 522]

$$v_{(1)}(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad v_{(1)}(x, m, t_j) = v_{(p)}(x, m, t_j), \quad j = 1, 2, \ldots,$$

$$v_{(\alpha)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right) = v_{(\alpha-1)}\left(x, m, t_{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right), \quad j = 2, 3, \ldots, p.$$

Аппроксимируем каждое уравнение (6) номера α двухслойной схемой на полуинтервале Δ_α, тогда получаем цепочку p одномерных разностных уравнений:

$$\frac{y^{j+\frac{\alpha}{p}} - y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{7}$$

$$\Lambda_\alpha y^{j+\frac{\alpha}{p}} = \varkappa_\alpha \left(a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right)_{x_\alpha} + b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} + b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{1}{p} d y^{j+\frac{\alpha}{p}} + \frac{1}{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t)\hbar_m, \tag{8}$$

$$y^{j+\frac{\alpha}{p}}\Big|_{\gamma_{h,\alpha}} = 0, \quad y(x, m, 0) = u_0(x, m), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \tag{9}$$

$\gamma_{h,\alpha}$ – множество граничных узлов по направлению x_α,

$$a_\alpha = k_\alpha\left(x^{(-0.5h_\alpha)}, \bar{t}\right), \quad x^{(-0.5h_\alpha)} = (x_1, x_2, \ldots, x_{\alpha-1}, x_\alpha - 0.5h_\alpha, x_{\alpha+1}, \ldots, x_p),$$

$$\bar{t} = t^{j+\frac{1}{2}}, \quad \varkappa = \frac{1}{1 + R_\alpha}, \quad R_\alpha = \frac{0.5h_\alpha |r_\alpha|}{k_\alpha} \text{ – разностное число Рейнольдса},$$

$$r_\alpha^+ = 0.5(r_\alpha + |r_\alpha|) \ge 0, \quad r_\alpha^- = 0.5(r_\alpha - |r_\alpha|) \le 0, \quad r_\alpha = r_\alpha^+ + r_\alpha^-,$$

$$b_\alpha^+ = \frac{r_\alpha^+}{k_\alpha}, \quad b_\alpha^- = \frac{r_\alpha^-}{k_\alpha}, \quad a_i = k_{i-\frac{1}{2}}(\bar{t}), \quad \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = f_\alpha(x, m, t_{j+0.5}), \quad d = q,$$

$$\hbar_m = \begin{cases} h_m, & i_m = 1, 2, \ldots, N_m - 1, \\ h_m/2, & i_m = 0, N_m. \end{cases}$$

3. ПОГРЕШНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ ЛОС

Характеристикой точности решения локально-одномерной схемы является разность $z^{i+\frac{\alpha}{p}} = y^{i+\frac{\alpha}{p}} - u^{i+\frac{\alpha}{p}}$, где $u^{i+\frac{\alpha}{p}}$ – решение исходной задачи (1), (2). Подставляя $y^{i+\frac{\alpha}{p}} = z^{i+\frac{\alpha}{p}} + u^{i+\frac{\alpha}{p}}$ в разностное уравнение (7), получаем для погрешности уравнение

$$\frac{z^{j+\frac{\alpha}{p}} - z^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} = \Lambda_\alpha z^{j+\frac{\alpha}{p}} + \Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}}, \tag{10}$$

$$z^{j+\frac{\alpha}{p}} = 0 \quad \text{при} \quad x = \gamma_{h,\alpha}, \quad z(x, m, 0) = 0. \tag{11}$$

Обозначая через

$$\mathring{\Psi}_\alpha = \left(L_\alpha u + f_\alpha - \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}},$$

и замечая, что $\sum_{\alpha=1}^{p}\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = 0$, если $\sum\limits_{\alpha=1}^{p} f_\alpha = f$, представим погрешность в виде суммы $\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*$:

$$\Psi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} = \Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} + \varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - \frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha - \overset{\circ}{\Psi}_\alpha =$$

$$= \left(\Lambda_\alpha u^{j+\frac{\alpha}{p}} - L_\alpha u^{j+\frac{1}{2}}\right) + \left(\varphi_\alpha^{j+\frac{\alpha}{p}} - f_\alpha^{j+\frac{1}{2}}\right) - \left(\frac{u^{j+\frac{\alpha}{p}} - u^{j+\frac{\alpha-1}{p}}}{\tau} - \frac{1}{p}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+\frac{1}{2}}\right) + \overset{\circ}{\Psi}_\alpha = \overset{\circ}{\Psi}_\alpha + \Psi_\alpha^*.$$

Очевидно, что $\Psi_\alpha^* = O\left(|h|^2 + \tau\right)$, $\overset{\circ}{\Psi}_\alpha = O(1)$, $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_p^2$, т.е. ЛОС обладает суммарной аппроксимацией $O\left(|h|^2 + \tau\right)$.

4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛОС

Умножим уравнение (7) скалярно на $y^{(\alpha)} = y^{j+\frac{\alpha}{p}}$:

$$\left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha = \left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(\varphi^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha,$$

$$(u,v)_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} h_\alpha, \quad (u,v]_\alpha = \sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} u_{i_\alpha} v_{i_\alpha} h_\alpha, \tag{12}$$

$$(u,v) = \sum_{x\in\omega_h} uvH, \quad H = \prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha.$$

Преобразуем каждое слагаемое тождества (12):

$$\left(y_{\bar{t}}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) = \frac{1}{2}\left(\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}\right)_{\bar{t}} + \frac{\tau}{2}\|y_{\bar{t}}\|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$\left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha = \left(\varkappa_\alpha (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)})_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha -$$
$$- \frac{1}{p}\left(dy^{j+\frac{\alpha}{p}}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \frac{1}{p}\left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t)\hbar_m, y^{(\alpha)}\right)_\alpha,$$

где $\varkappa_\alpha = \dfrac{1}{1 + R_\alpha}$, $R_\alpha = \dfrac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}$. Так как $\varkappa = 1 - \dfrac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha} + O(h_\alpha^2)$, то $\varkappa$ заменим на $1 - \dfrac{0.5h_\alpha|r_\alpha|}{k_\alpha}$. Тогда последнее выражение перепишем в виде

$$\left(\Lambda_\alpha y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha = -\left(a_\alpha, y_{\bar{x}_\alpha}^2\right]_\alpha + \left(b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha -$$
$$- \frac{1}{p}\left(dy^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) + 0.5h_\alpha\left(a_\alpha\left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\right)_{\bar{x}_\alpha}, y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)} y^{(\alpha)}\right]_\alpha + 0.5h_\alpha\left(a_\alpha\left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\right)_{i_\alpha-1}, y_{\bar{x}_\alpha}^2\right]_\alpha +$$
$$+ \frac{1}{p}\left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m, m_{i_m}) P(m_{i_m}) y^{(\alpha)}(x, m_{i_m}, t)\hbar_m, y^{(\alpha)}\right)_\alpha.$$

С помощью леммы 1 из [9] находим

$$\left(b_\alpha^+ a_\alpha^{(+1\alpha)} y_{x_\alpha}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha + \left(b_\alpha^- a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right)_\alpha \le 2\frac{c_1 c_2}{c_0}\left(\varepsilon\left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{(\alpha)}\right]\right|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}\right),$$

$$\frac{1}{p}\left(dy^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}\right) \le \frac{1}{p} c_2 \left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)},$$

$$0.5h_\alpha\left(a_\alpha\left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\right)_{\bar{x}_\alpha}, y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}y^{(\alpha)}\right]_\alpha \le 0.5h_\alpha c_4\left(y^{(\alpha)}, y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha \le 0.5h_\alpha c_4\left\|y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|_{L_2(\alpha)}\left\|y^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\alpha)} \le$$

$$\le 0.5h_\alpha c_4\left(\varepsilon\left\|y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}\right), \quad \text{где} \quad \left|a_\alpha\left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\right)_{\bar{x}_\alpha}\right| \le c_4,$$

$$0.5\hbar_\alpha\left(a_\alpha\left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\right)_{i_\alpha-1}, y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha \le 0.5h_\alpha c_5\left\|y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\alpha)}, \quad \left|a_\alpha\left(\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\right)_{i_\alpha-1}\right| \le c_5,$$

$$\frac{1}{p}\left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m,m_{i_m})P(m_{i_m})y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m, y^{(\alpha)}\right)_\alpha \le \frac{1}{p}\left\|\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} Q(m,m_{i_m})P(m_{i_m})y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\right\|_{L_2(\alpha)}\left\|y^{(\alpha)}\right\|_{L_2(\alpha)} \le$$

$$\le \varepsilon\frac{1}{p}\left\|\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{1}{4\varepsilon p}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)} = \varepsilon\frac{1}{p}\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\left(\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} y^{(\alpha)}(x,m_{i_m},t)\hbar_m\right)^2 h_\alpha + \frac{1}{4\varepsilon p}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)} =$$

$$= \varepsilon\frac{m_1}{p}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_\alpha(\alpha,m)} + \frac{1}{4\varepsilon p}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)}.$$

Подставляя полученные оценки в тождество (12), находим

$$\frac{1}{2}\left(\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)}\right)_{\bar{t}} + \left(\left(1 - 0.5h_\alpha\frac{|r_\alpha|}{k_\alpha}\right)a_\alpha, y^2_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha \le \frac{1}{2}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)} +$$
$$+ c(\varepsilon)\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \varepsilon\left(c_4 + \frac{2c_1c_2}{c_0}\right)\left\|y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\alpha)} + \varepsilon\frac{m_1}{p}\left\|y^{(\alpha)}\right\|^2_{L_\alpha(\alpha,m)}. \tag{13}$$

Пользуясь разностным аналогом теоремы вложения [8, с. 107] при $\varepsilon \le \dfrac{c_0}{2c_5}$, $c_5 = c_4 + \dfrac{2c_1c_2}{c_0}$, $h_\alpha \le \dfrac{k_\alpha}{|r_\alpha|}$, получаем из (13) неравенство

$$\frac{1}{2}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \frac{c_0}{2}\tau\left\|y_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\alpha)} \le \frac{\tau}{2}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)} + c(\varepsilon)\tau\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)} + \varepsilon\frac{l_\alpha^2 m_1}{4p}\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\alpha)}\hbar_m + \frac{1}{2}\left\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\alpha)}. \tag{14}$$

Просуммируем (14) по $i_\beta \ne i_\alpha$, $\beta = 1, 2, \ldots, p$. Тогда получим

$$\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + c_0\tau\left\|y_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)} \le \tau\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + c(\varepsilon)\tau\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} + \varepsilon\frac{l_\alpha^2 m_1}{2p}\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m + \left\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}. \tag{15}$$

Просуммируем (15) по i_m от 0 до $N(m_1)$:

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m + c_0\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m \le \tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m +$$
$$+ c(\varepsilon)\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m + \varepsilon\frac{l_\alpha^2 m_1^2}{2p}\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m. \tag{16}$$

Здесь $m_1 = N(m_1)\hbar_m$ – фиксированная постоянная величина. При $\varepsilon \le \dfrac{c_0 p}{l_\alpha^2 m_1^2}$ неравенство (16) принимает вид

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m + \frac{c_0}{2}\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y^{(\alpha)}_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m \le \tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m +$$
$$+ c(\varepsilon)\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)}\left\|y^{j+\frac{\alpha-1}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)}\hbar_m. \tag{17}$$

Просуммируем (17) сначала по $\alpha = 1, 2, \ldots, p$:

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \frac{c_0}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y_{\bar{x}_\alpha}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \le \sum_{\alpha=1}^{p}\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + c(\varepsilon)\sum_{\alpha=1}^{p}\tau\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m,$$

затем по j' от 0 до j:

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \frac{c_0}{2}\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \le \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + c(\varepsilon)\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{0}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m. \tag{18}$$

Из (18) имеем

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \le c(\varepsilon)\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + F^j, \tag{19}$$

где

$$F^j = \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\varphi^{j+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{0}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m,$$

С помощью неравенства (19) на основании леммы 4 (см. [10, с. 171]) из неравенства (18) получаем априорную оценку

$$\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j+1}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right]\!\!\Big|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m \le M(t)\left[\sum_{j'=0}^{j}\tau\sum_{\alpha=1}^{p}\sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|\varphi^{j'+\frac{\alpha}{p}}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m + \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{0}\right\|^2_{L_2(\omega_h)} \hbar_m\right]. \tag{20}$$

Из оценки (20) следует

Теорема 1. *Локально-одномерная схема* (7)–(9) *устойчива по начальным данным и правой части так, что для решения задачи* (7)–(9) *при любых h и* $\tau \le \tau_0$ *справедлива оценка* (20).

5. СХОДИМОСТЬ ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНОЙ СХЕМЫ

По аналогии с [8, с. 528] представим решение задачи (10), (11) в виде суммы $z_{(\alpha)} = v_{(\alpha)} + \eta_{(\alpha)}, z_{(\alpha)} = z^{j+\frac{\alpha}{p}}$, где $\eta_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{\eta_{(\alpha)} - \eta_{(\alpha-1)}}{\tau} = \mathring{\Psi}_\alpha, \quad x \in \omega_{h_\alpha} + \gamma_{h,\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad \eta(x, 0) = 0. \tag{21}$$

Из (21) следует $\eta^{j+1} = \eta_{(p)} = \eta^j + \tau(\mathring{\Psi}_1 + \mathring{\Psi}_2 + \ldots + \mathring{\Psi}_p) = \eta^j = \ldots = \eta^0 = 0.$

Для $\eta_{(\alpha)} = \tau(\mathring{\Psi}_1 + \mathring{\Psi}_2 + \ldots + \mathring{\Psi}_\alpha) = -\tau(\mathring{\Psi}_{\alpha+1} + \ldots + \mathring{\Psi}_p) = O(\tau).$

Функция $v_{(\alpha)}$ определяется условиями

$$\frac{v_{(\alpha)} - v_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Delta_\alpha v_{(\alpha)} + \tilde{\Psi}_\alpha, \quad x \in \omega_h, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$
$$v_{(\alpha)} = -\eta_{(\alpha)}, \quad x_\alpha \in \gamma_{h,\alpha}, \quad v_{(\alpha)}(x, 0) = 0, \quad \tilde{\Psi}_\alpha = \Psi^*_\alpha + \Delta_\alpha\eta_{(\alpha)}. \tag{22}$$

Решение задачи (22) оценим с помощью теоремы 1. Так как $\eta^j = 0$, $\eta_\alpha = O(\tau)$, $\|z^j\| \le \|v^j\|$, то из оценки (20) следует

Теорема 2. *Пусть задача* (1), (2) *имеет единственное непрерывное в* $\bar{Q}_T$ *решение* $u(x,m,t)$ *и существуют непрерывные в* $\bar{Q}_T$ *производные*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^2 \partial x_\beta^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad \alpha \ne \beta,$$

тогда локально-одномерная схема (7)–(9) *сходится со скоростью* $O(|h|^2 + \tau)$ *так, что*

$$\left\|y^{j+1} - u^{j+1}\right\|_1 \le M\left(|h|^2 + \tau\right), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_p^2.$$

$$\left\|y^{j+1}\right\|_1^2 = \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\|y^{j+1}\right\|_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m + \sum_{j'=0}^{j} \tau \sum_{\alpha=1}^{p} \sum_{i_m=0}^{N(m_1)} \left\| y_{\bar{x}_\alpha}^{j'+\frac{\alpha}{p}} \right]_{L_2(\omega_h)}^2 \hbar_m.$$

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Тестовый пример. В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0,T]$, основанием которого является прямоугольник $\bar{G} = \{x = (x_1, x_2) : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ с границей Γ, $\bar{G} = G \cup \Gamma$, рассмотрим первую краевую задачу

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{dt} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(k_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(k_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + r_1(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \\ + r_2(x_1,x_2,t)\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{1}{2}q_1(x_1,x_2,m,t)u(x_1,x_2,m,t) - \frac{1}{2}q_2(x_1,x_2,m,t)u(x_1,x_2,m,t) + \\ + \int_0^{m_1} Q(m,m')P(m')u(x,m',t)dm' + f(x_1,x_2,m,t), \\ 0 < x_1 < l_1, \quad 0 < x_2 < l_2, \quad 0 < t \le T,\end{gathered} \tag{23}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad u(x_1,x_2,m,0) = 0, \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered}k_1(x_1,x_2,t) = k_2(x_1,x_2,t) = e^{x_1+x_2+t}, \\ r_1(x_1,x_2,t) = r_2(x_1,x_2,t) = (x_1x_2 - 0.5)\cos(x_1x_2 + t), \\ q_1(x_1,x_2,m,t) = q_2(x_1,x_2,m,t) = e^{t+m}\cos(x_1x_2),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}Q(m,m') = e^{2m'+m}, \quad P(m') = e^{-m'}, \\ f(x_1,x_2,m,t) = 3t^2e^m(x_1^3 - l_1x_1^2)(x_2^3 - l_2x_2^2) - \\ - e^{x_1+x_2+t}t^3e^m(x_2^3 - l_2x_2^2)(3x_1^2 - 2l_1x_1 + 6x_1 - 2l_1) -\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}- e^{x_1+x_2+t}t^3e^m(x_1^3 - l_1x_1^2)(3x_2^2 - 2l_2x_2 + 6x_2 - 2l_2) - \\ - (x_1x_2 - 0.5)\cos(x_1x_2 + t)t^3e^m(x_2^3 - l_2x_2^2)(3x_1^2 - 2l_1x_1) - \\ - (x_1x_2 - 0.5)\cos(x_1x_2 + t)t^3e^m(x_1^3 - l_1x_1^2)(3x_2^2 - 2l_2x_2) +\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}+ e^{t+2m}\cos(x_1x_2)t^3(x_1^3 - l_1x_1^2)(x_2^3 - l_2x_2^2) - \\ -t^3e^m(x_1^3 - l_1x_1^2)(x_2^3 - l_2x_2^2)(e^{2m_1} - 1), \\ 0 < m \le m_1, \quad m_1 = 1, \quad l_1 = l_2 = 1, \quad T = 1.\end{gathered}$$

Точное решение задачи (23), (24): $u(x, m, t) = t^3e^m(x_1^3 - l_1x_1^2)(x_2^3 - l_2x_2^2)$.

Таблица 1. Изменение погрешности при уменьшении размеров сетки

$h_1 = h_2$	m	τ	Максимальная погрешность
1/10	1/10	1/100	0.0501006
1/20	1/20	1/400	0.0232227
1/40	1/40	1/1600	0.0079458

Численные расчеты для функции распределения по массам капель с учетом микрофизических процессов дробления и замерзания представлены (см. фиг. 1) для следующей задачи:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) + u\frac{\partial f_1}{\partial x} + (w - V_1)\frac{\partial f_1}{\partial y} - R(x,y,m)f_1 - P(m)f_1 +$$
$$+ \int_0^{m_1} Q(m,m')P(m')f_1(x,y,m',t)dm' + I_1,$$
$$0 < x < 15, \quad 0 < y < 30, \quad 0 < t \le T, \quad f_1|_\Gamma = 0, \quad f_1(x,y,m,0) = 0,$$

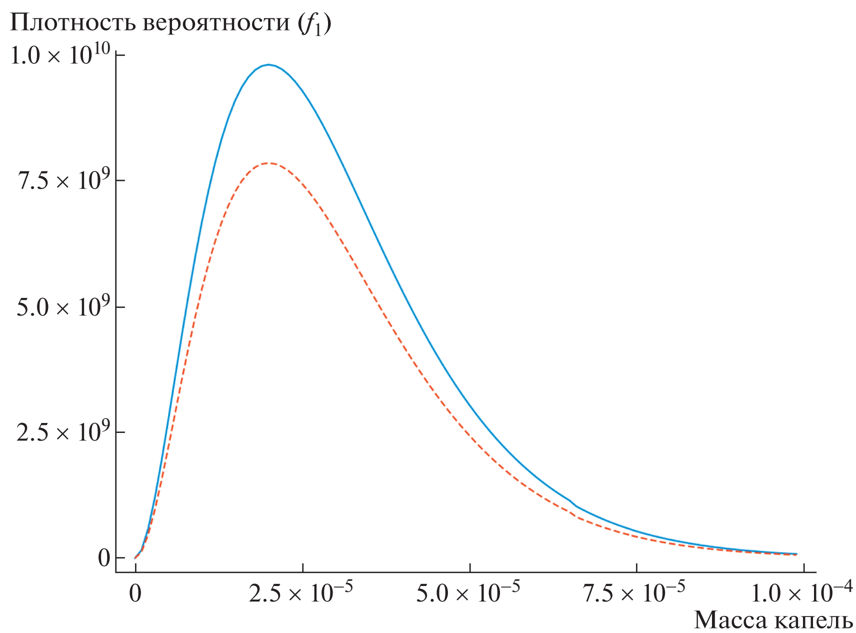
где $f_1(x,y,m,t)$ – функция распределения по массам капель. Образование новых капель на ядрах конденсации учитывает слагаемое $I_1(x,y,m,t)$. Этот процесс описывается формулой [2]:

$$I_1(x,y,m,t) = \frac{\alpha(q_p(x,y) - q_s(x,y))f_1^0(x,y,m)}{\omega(f_1^0)},$$

где q_p – влажность воздуха в точке (x,y), q_s – влажность насыщенного водяного пара в той же точке, α – численный коэффициент, f_1^0 – заданное распределение капель в той же точке, $\omega(f_1^0)$ – водность заданного распределения капель, u и w – горизонтальная и вертикальная составляющие скоростей воздушных потоков, V_1 – скорость падения капель.

Коэффициент турбулентной диффузии вычисляется по формуле:

$$K = CL^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]^{1/2}.$$



Фиг. 1. Функция распределения по массам капель: без учета дробления и замерзания (сплошная линия), с учетом дробления и замерзания (штриховая линия).

Таблица 2. Значения масс m, радиусов r и скоростей падения V_1 капель

№	m (г)	r (см)	V_1 (м/с)
1	2.5000e–10	0.00039080	0.001817
2	3.5360e–10	0.00043865	0.002290
3	5.0000e–10	0.00049237	0.002885
4	7.0710e–10	0.00055267	0.003635
5	1.0000e–9	0.00062035	0.004580
6	1.4142e–9	0.00069632	0.005770
7	2.0000e–9	0.00078159	0.007270
8	2.8284e–9	0.00087731	0.009159
9	4.0000e–9	0.00098475	0.011540
10	5.6569e–9	0.00110534	0.014539
11	8.0000e–9	0.00124070	0.018318
12	1.1314e–8	0.00139264	0.023079
13	1.6000e–8	0.00156319	0.029078
14	2.2627e–8	0.00175462	0.036636
15	3.2000e–8	0.00196949	0.046159
16	4.5255e–8	0.00221068	0.058156
17	6.4000e–8	0.00248140	0.073273
18	9.05100e–8	0.00278528	0.092318
19	1.2800e–7	0.00312637	0.116313
20	1.8102e–7	0.00350923	0.146545
21	2.5600e–7	0.00393898	0.184635
22	3.6204e–7	0.00442136	0.353708
23	5.1200e–7	0.00496280	0.397024
24	7.2408e–7	0.00557056	0.445645
25	1.0240e–6	0.00625274	0.500219
26	1.4482e–6	0.00701846	0.561477
27	2.0480e–6	0.00787796	0.630237
28	2.8963e–6	0.00884271	0.707417
29	4.0960e–6	0.00992561	0.794049
30	5.7926e–6	0.01114112	0.891289
31	8.1920e–6	0.01250548	1.000439
32	1.1585e–5	0.01403693	1.122954
33	1.6384e–5	0.01575592	1.260474
34	2.3170e–5	0.01768542	1.414834
35	3.2768e–5	0.01985122	1.588097
36	4.6340e–5	0.02228224	1.782579
37	6.5536e–5	0.02501096	2.000877
38	9.2682e–5	0.02807386	2.245909
39	1.3107e–4	0.03151184	2.520947

Таблица 3. Значения *u* в узлах пространственной сетки

y (км)	x (км)						
	0	5	10	15	20	25	30
0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	5	2	–3	–15	–10	–5
6	0	3	1	–1	–8	–3	0
9	0	–1	–5	1	10	3	0
12	0	0	–3	0	5	2	0
15	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 4. Значения *w* в узлах пространственной сетки

y (км)	x (км)						
	0	5	10	15	20	25	30
0	0	1	1.5	2.5	1.5	1	0
3	0	0	2	3	2	0	0
6	0	–10	3	13	3	–10	0
9	0	0	7	35	7	0	0
12	0	0	2	7	2	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашабоков Б.А., Шаповалов А.В.* Конвективные облака: численные модели и результаты моделирования в естественных условиях и при активном воздействии. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2008. 252 с.
2. *Коган Е.Л., Мазин И.П., Сергеев Б.Н., Хворостиков В.Н.* Численное моделирование облаков. М.: Гидрометеоиздат, 1984. 178 с.
3. *Berry E.X.* Cloud droplet growth by collection // J. Atmos. Sci. 1967. V. 24. P. 688–701.
4. *Berry E.X., Reinharolt R.L.* An analysis of cloud drop growth by collection: part 2. Single initial distributions // J. Atmos. Sci. 1974. V. 31. P. 1825–1837.
5. *Чудновский Л.Ф.* Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 353 с.
6. *Кожанов А.И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. ур-ния. 2004. Т. 10. № 6. С. 763–774.
7. *Tzivion S., Feingold G., Levin Z.* An efficient numerical solution to the stochastic collection equation // J. Atmos. Sci. 1987. V. 44. P. 3139–3149.
8. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
9. *Андреев В.Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8.
10. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. 480 с.