ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 9, с. 1496–1502

УДК 517.95

О РЕШЕНИЯХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СКАЧКОМ НА ГРАНИЦЕ[1)]

© 2020 г. А. О. Багапш[1,2]

[1] 119991 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 199034 С.-Петербург, Университетская наб., 7–9, Гос.ун-т, Россия

e-mail: a.bagapsh@gmail.com

Поступила в редакцию 06.06.2020 г.
Переработанный вариант 06.06.2020 г.
Принята к публикации 20.06.2020 г.

Рассмотрена задача Дирихле для сильно эллиптической системы второго порядка с постоянными коэффициентами в области с кусочно-гладкой границей и кусочно-непрерывными граничными данными. Показано поведение решения вблизи точки скачка граничной функции. Библ. 10. Фиг. 2.

Ключевые слова: эллиптические системы, уравнение Ламе, задача Дирихле, граничное поведение.

DOI: 10.31857/S0044466920090069

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим сильно эллиптическую систему дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости (x, y)

$$\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

относительно вещественнозначных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ с постоянными вещественными матрицами коэффициентов A, B, C размера 2×2. Эллиптичность означает, что характеристическая форма $\det(A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2)$ с вещественными переменными ξ и η обращается в нуль только при $\xi = \eta = 0$. Сильная эллиптичность накладывает дополнительное требование, что $\det(A + 2\alpha B + \beta C) \neq 0$ при $\alpha \leq \beta^2$ (см. [1]– [4]).

Любую эллиптическую систему вида (1.1) можно с помощью линейной замены координат, линейной замены искомых функций и линейной комбинации уравнений привести к уравнению

$$(\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)f(z) + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{f(z)} = 0 \tag{1.2}$$

относительно комплекснозначной функции f комплексного переменного $z = x + iy$ с вещественными параметрами $\tau \in [0,1)$ и $\sigma \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{\pm 1\}$ (см. [4], [5]). Здесь

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

суть операторы Коши–Римана в новой системе координат. При $\sigma = \infty$ считаем, что $(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{f(z)} = 0$. В случае сильной эллиптичности будет $|\sigma| < 1$.

Выделим несколько частных случаев. При $\tau = \sigma = 0$ получаем комплексное уравнение Лапласа $\Delta f(z) = 4\partial\overline{\partial}f(z) = 0$, а при $\tau = 0$, $\sigma = \infty$ – уравнение Бицадзе [6] $\overline{\partial}^2 f(z) = 0$. Если $\tau = 0$, то возникает плоское изотропное уравнение Ламе теории упругости, которое в наших переменных за-

1)Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 17-11-01064-П).

писывается в виде $\partial\overline{\partial}f(z) + \sigma\partial^2\overline{f(z)} = 0$, причем параметр σ связан с коэффициентом Пуассона p соотношением $\sigma = 1/(3-4p)$. Поскольку, как известно [7], $p \in (0,1/2)$, а значит, $\sigma \in (1/3,1)$, то соответствующая система (1.1) сильно эллиптическая. Если же $\sigma = 0$, то получаем кососимметрическую систему, которая может быть записана в виде уравнения $af_{xx} + 2bf_{xy} + cf_{yy} = 0$ с комплексными коэффициентами a, b, c.

Для дальнейшего понадобятся операторы линейного преобразования координат

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta} := \alpha\mathcal{I} + \beta\mathcal{C} \tag{1.3}$$

с комплексными параметрами α и β; здесь $\mathcal{I}\colon w \to w$ — тождественный оператор, $\mathcal{C}\colon w \to \overline{w}$ — оператор комплексного сопряжения. Операторам вида (1.3) взаимно однозначно ставятся в соответствие вещественные квадратные матрицы второго порядка. В самом деле, положим $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ и $w = u + iv$. Тогда легко проверить, что

$$\mathcal{T}_{\alpha,\beta}w = \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ d+b & a-c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Умножению матриц соответствует операция композиции операторов вида $\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$, а если $|\alpha| \neq |\beta|$, то существует обратный оператор

$$\mathcal{T}^{-1}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}\mathcal{T}_{\overline{\alpha},-\beta}$$

и можно определить деление операторов по правилу

$$\frac{\mathcal{T}_{\alpha,\beta}}{\mathcal{T}_{a,b}} := \mathcal{T}_{\alpha,\beta}\mathcal{T}^{-1}_{a,b}. \tag{1.4}$$

С помощью введенных обозначений уравнение (1.2) может быть записано в виде

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[f(z)] = 0 \tag{1.5}$$

с оператором

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} := \partial\mathcal{T}_{1,\sigma}\partial_\tau, \quad \partial_\tau := \mathcal{T}_{\tau,1}\partial = \tau\partial + \overline{\partial}. \tag{1.6}$$

Будем считать этот оператор заданным при комплексных значениях параметров τ и σ; запишем его в развернутом виде:

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} = (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)\mathcal{I} + \sigma(\overline{\tau}\partial\overline{\partial} + \partial^2)\mathcal{C}. \tag{1.7}$$

С помощью непосредственной подстановки в мультипликативную запись (1.6) оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ можно проверить, что решение уравнения (1.5) при $\tau \neq 0$ имеет вид

$$f(z) = h(z_\tau) + \overline{g(z)} - \frac{\sigma}{\tau}g(z),$$

а при $\tau = 0$ — вид

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} - \sigma\overline{z}g'(z),$$

где $z_\tau := \mathcal{T}_{1,-\tau}z = z - \tau\overline{z}$, а g и h — голоморфные функции своих аргументов.

Оператор $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ можно задавать не только на комплекснозначных функциях комплексного переменного, но и на операторах вида $\mathcal{F} := \varphi(z)\mathcal{I} + \psi(z)\mathcal{C}$ с функциями $\varphi, \psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. В частности, если $\psi \equiv 0$, то вместо оператора $\mathcal{F}$ получаем обычную функцию: $\mathcal{F} = \varphi$. Будем использовать запись $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(z)[\mathcal{F}]$ для действия оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$, заданного в системе координат $z = x + iy$, на оператор $\mathcal{F}$.

Предложение 1. *Пусть $a, b, \alpha, \beta, \tau, \sigma \in \mathbb{C}$, причем $a \neq 0$ и $|\tau| \neq 1$, $|\sigma| \neq 1$, а $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ — операторы вида $\varphi(z)\mathcal{I} + \psi(z)\mathcal{C}$. Оператор $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ обладает следующими свойствами*:

1) $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(az + b) = |a|^{-1}\mathcal{L}_{\tau\bar{a}/a,\sigma\bar{a}/a}(z)$,
2) $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[a\mathcal{F} + b] = a\mathcal{L}_{\tau,\sigma\bar{a}/a}[\mathcal{F}]$,
3) $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[\mathcal{F} + \mathcal{G}] = \mathcal{L}_{\tau,\sigma}[\mathcal{F}] + \mathcal{L}L_{\tau,\sigma}[\mathcal{G}]$,
4) $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[\mathcal{F}\mathcal{T}_{\alpha,\beta}] = (\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[\mathcal{F}])\mathcal{T}_{\alpha,\beta}$.

Доказательство. Из развернутой записи (1.7) оператора видно, что он инвариантен относительно сдвига начала координат, а поворот системы координат на угол θ приводит к повороту параметров τ и σ на удвоенный угол. Действительно, пусть $z' = ze^{i\theta}$ и ∂', $\bar{\partial}'$ — операторы Коши–Римана в системе координат z'. Тогда имеем

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial z'} = e^{i\theta}\partial', \qquad \bar{\partial} = e^{-i\theta}\bar{\partial}'.$$

Подставляя эти соотношения в (1.7), получаем, что если $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(z)[f] = 0$, то $\mathcal{L}_{\tau',\sigma'}(z')[f] = 0$, где $\tau' = \tau e^{2i\theta}$, $\sigma' = \sigma e^{2i\theta}$. Таким образом, представляя число a в виде $a = |a|e^{i\theta}$, получаем свойство 1. Свойства 2 и 3 проверяются непосредство с помощью представления (1.7). Свойство 4 следует из ассоциативности операции умножения матриц. Предложение доказано.

Два логарифмических решения рассматриваемого уравнения (1.5) играют важную роль. Первым из них является функция-оператор

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi(1 - |\sigma|^2)}\left(\log(z_\tau\bar{z})\mathcal{I} + \frac{\sigma}{\tau}\log\left(\frac{z_\tau}{z}\right)\mathcal{C}\right) \tag{1.8}$$

(действующая на число $w \in \mathbb{C}$) с выбором главной ветви логарифма. Функция $\Phi(z)$ имеет логарифмический полюс в начале координат и однозначно определена вне его, поскольку приращение аргументов функций $z_\tau\bar{z}$ и z_τ/z при его обходе равно нулю. Она является фундаментальным решением, т.е. $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}\Phi(z) = \delta_0(z)$, где $\delta_0(z)$ — дельта-функция Дирака с центром в нуле [8]. Другим примером является функция-оператор

$$F(z) = \log\left(\frac{z_\tau}{\bar{z}}\right)\mathcal{I} - \frac{\sigma}{\tau}\log\left(\frac{z_\tau}{z}\right)\mathcal{C} \tag{1.9}$$

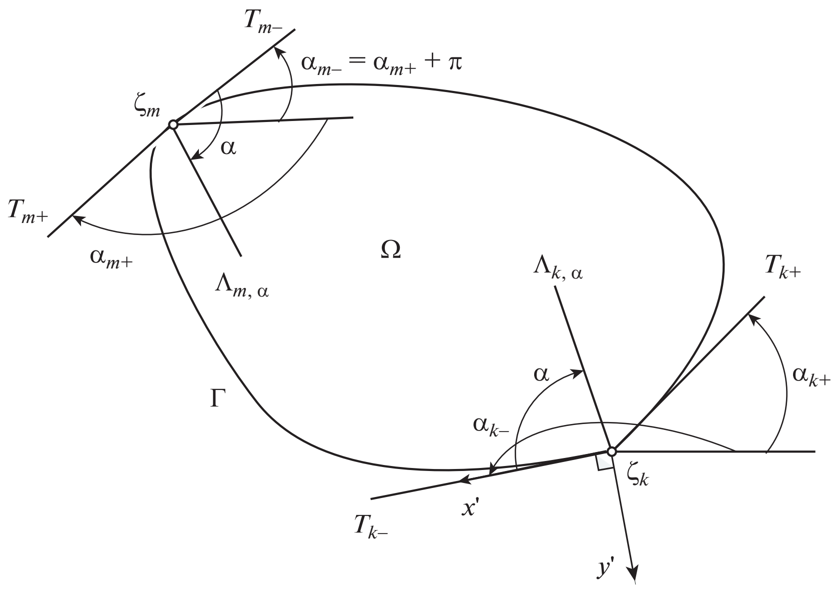
с выбором любой ветви логарифма в плоскости с разрезом по какой-либо гладкой жордановой кривой в $\overline{\mathbb{C}}$, идущей от начала координат к бесконечно удаленной точке. Функция $F(z)$ представляет собой пример решения с многозначностью в точке 0. Отметим, что функции $\Phi(z)$ и $F(z)$ могут быть определены и при $\tau = 0$, несмотря на то, что параметр τ стоит в знаменателе в формулах (1.8) и (1.9): для этого случая функции определяются с помощью предельного перехода $\tau^{-1}\log(z_\tau/z) = \tau^{-1}\log(1 - \tau\bar{z}/z) \to -\bar{z}/z$.

С использованием функции $F(z)$ в разд. 2 показано, что задача Дирихле для рассматриваемого уравнения (1.5) в области с кусочно-гладкой границей и кусочно-непрерывными граничными данными имеет решение, и установлено поведение этого решения вблизи точки, в которой граничные значения терпят разрыв. В разд. 3 показан характер предельной кривой для такой точки.

2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Рассмотрим задачу Дирихле для оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$ с коэффициентами $\tau \in [0,1)$, $\sigma \in (-1,1)$ в следующей постановке.

Задача. Пусть Ω — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ без точек (внутреннего и внешнего) заострения, на которой задана кусочно-непрерывная функция $\varphi(\zeta)$, имеющая разрывы I рода в точках ζ_k, $k = 1,\ldots,n$. Найти ограниченную в $\bar{\Omega}$ функцию $f(z)$, не-



Фиг. 1.

прерывную в $\bar{\Omega}\setminus\bigcup_k\{\zeta_k\}$, удовлетворяющую в Ω уравнению $\mathscr{L}_{\tau,\sigma}f = 0$ и совпадающую на $\Gamma\setminus\bigcup_k\{\zeta_k\}$ с $\varphi(\zeta)$.

Обозначим через φ_k^+ и φ_k^- пределы функции $\varphi(\zeta)$ при стремлении точки ζ к ζ_k вдоль Γ по часовой и против часовой стрелки соответственно, а через $\Delta\varphi_k := \varphi_k^+ - \varphi_k^-$ – скачок φ в точке ζ_k.

Далее, через T_k^+ и T_k^- обозначим односторонние касательные к Γ в точке ζ_k и через α_k^+ и α_k^- их углы наклона относительно положительного направления горизонтальной прямой, выходящей из точки ζ_k, причем выбираем эти углы так, что $\alpha_k^- > \alpha_k^+$ (см. фиг. 1). Положим $\Delta\alpha_k := \alpha_k^- - \alpha_k^+$; если кривая Γ гладкая в точке ζ_k, то $\Delta\alpha_k = \pi$. Наконец, введем прямую $\Lambda_{k,\alpha}$, проходящую через точку ζ_k и составляющую угол α с полупрямой T_k^-, отсчитываемый от T_k^- в направлении движения часовой стрелки. Если точка $z \in \Omega$ стремится к точке ζ_k вдоль гладкой кривой, то значение угла α между касательной к этой кривой в ζ_k и полупрямой T_k^- лежит на отрезке $[0, \Delta\alpha_k]$.

Поскольку Ω – односвязная область, то из точки ζ_k можно провести разрез вдоль гладкой жордановой кривой, лежащей вне Ω и уходящей на бесконечность. В плоскости с таким разрезом можно выделить однозначную ветвь функции $\arg(z - \zeta_k)$, которая будет непрерывна в $\bar{\Omega}\setminus\{\zeta_k\}$. Выделим эту ветвь, задав условие $\arg(z - \zeta_k) = 0$ при $z \in T_k^-$. Тогда при $z \in \Lambda_{k,\alpha}$ будет $\arg(z - \zeta_k) = -\alpha$.

В (1.9) положим $\tau = \tau'$, $\sigma = \sigma'$ и рассмотрим функцию

$$\lambda_k(z) := F(z - \zeta_k) = \log\frac{(z - \zeta_k)_{\tau'}}{\bar{z} - \bar{\zeta}_k}\mathscr{I} - \frac{\sigma'}{\tau'}\log\frac{(z - \zeta_k)_{\tau'}}{z - \zeta_k}\mathscr{C}, \tag{2.1}$$

для которой при $z \in \Lambda_{k,\alpha}$ верно

$$\lambda_k(z) = \log\left(e^{2i\arg(z-\zeta_k)} - \tau'\right)\mathscr{I} - \frac{\sigma'}{\tau'}\log\left(1 - \tau' e^{-2i\arg(z-\zeta_k)}\right)\mathscr{C} =$$
$$= \log\left(e^{-2i\alpha} - \tau'\right)\mathscr{I} - \frac{\sigma'}{\tau'}\log\left(1 - \tau' e^{2i\alpha}\right)\mathscr{C} = -2i\alpha\mathscr{I} + \log\left(1 - \tau' e^{2i\alpha}\right)\left(\mathscr{I} - \frac{\sigma'}{\tau'}\mathscr{C}\right).$$

Из (2.1) и сделанного выбора ветви $\arg(z-\zeta_k)$ видно, что $\lambda_k(z)$ удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau',\sigma'}(z')[\lambda_k]=0$ в системе координат $z'=x'+iy'$ с центром в точке ζ_k и вещественной осью x', направленной по односторонней касательной T_k^-, см. фиг. 1. Такая система координат z' получается из исходной системы $z=x+iy$ сдвигом ее в точку ζ_k и дальнейшим поворотом на угол α_k^-, т.е. $z'=\zeta_k+ze^{i\alpha_k^-}$. Но тогда в системе координат z функция λ_k будет удовлетворять уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(z)[\lambda_k]=0$ с параметрами $\tau=\tau' e^{2i\alpha_k^-}$, $\sigma=\sigma' e^{2i\alpha_k^-}$, см. свойство 1 в предложении 1. Таким образом, функция

$$\mu_k(z):=-2i\alpha\mathcal{I}+\log\left(1-\tau e^{2i(\alpha-\alpha_k^-)}\right)\left(\mathcal{I}-\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right),\qquad z\in\Lambda_{k,\alpha},$$

удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(z)[\mu_k]=0$ в области Ω и является непрерывной на $\bar{\Omega}\backslash\{\zeta_k\}$. Устраивая дополнительно сдвиг и масштабирование, получаем функцию

$$p_k(\alpha):=\frac{2i\alpha\mathcal{I}+\log\dfrac{1-\tau e^{-2i\alpha_k^-}}{1-\tau e^{2i(\alpha-\alpha_k^-)}}\left(\mathcal{I}-\dfrac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right)}{2i\Delta\alpha_k\mathcal{I}+\log\dfrac{1-\tau e^{-2i\alpha_k^-}}{1-\tau e^{-2i\alpha_k^+}}\left(\mathcal{I}-\dfrac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right)},\qquad \alpha=-\arg(z-\zeta_k),\tag{2.2}$$

где деление операторов вида (1.3) определяется согласно (1.4). Построенная функция удовлетворяет тому же уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}(z)[p_k]=0$ (см. свойство 4 в предложении 1) и условиям $p_k(0)=0$ и $p_k(\Delta\alpha_k)=\mathcal{I}$. Если кривая Γ является гладкой в точке ζ_k, т.е. $\Delta\alpha_k=\alpha_k^--\alpha_k^+=\pi$, то формула (2.2) приобретает более простой вид

$$p_k(\alpha)=\frac{\alpha}{\pi}\mathcal{I}+\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-\tau e^{-2i\alpha_k^-}}{1-\tau e^{2i(\alpha-\alpha_k^-)}}\left(\mathcal{I}+\frac{\sigma}{\tau}\mathcal{C}\right).\tag{2.3}$$

Как обычно, при $\tau=0$ выражения (2.2) и (2.3) определяются с помощью предельного перехода. В частности, при $\tau=\sigma=0$, что соответствует уравнению Лапласа, или гармоническим функциям, из (2.3) получаем $p_k(\alpha)=\alpha/\pi$.

Зададим теперь функцию

$$f_k(z):=p_k(\alpha)[\Delta\varphi_k],\qquad \alpha=-\arg(z-\zeta_k),\tag{2.4}$$

которая удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[f_k]=0$ в Ω, непрерывна в $\bar{\Omega}\backslash\{\zeta_k\}$ и имеет в точке ζ_k скачок $\Delta\varphi_k$. Тогда функция

$$\psi(\zeta):=\varphi(\zeta)-\sum_{k=1}^{n}f_k(\zeta)$$

будет непрерывной на Γ. В области Ω с кусочно-гладкой границей, согласно [8], задача Дирихле для непрерывной граничной функции $\psi(\zeta)$ имеет единственное решение, т.е. существует функция $g\in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющая в Ω уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[g]=0$ и совпадающая на Γ с $\psi(z)$. Поскольку все функции $f_k(z)$ удовлетворяют уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}[f_k]=0$ в Ω, то функция $f(z)=g(z)+\sum_{k=1}^{n}f_k(z)$ удовлетворяет тому же уравнению и решает поставленную задачу Дирихле с граничной функцией $\varphi(\zeta)$.

Выясним теперь поведение функции $f(z)$ вблизи любой из точек ζ_m, в которых граничная функция $\varphi(\zeta)$ терпит разрыв. Введем функцию

$$g_m(z):=g(z)+\sum_{k\neq m}f_k(z),$$

непрерывную в точке ζ_m, и запишем $f(z)=g_m(z)+f_m(z)$. Тогда

$$g_m(\zeta_m)=\lim_{\Lambda_{m,\alpha}\ni z\to\zeta_m}(f(z)-f_m(z)),\qquad \alpha\in(0,\Delta\alpha_m).$$

Отсюда при $\alpha \to 0$ получим $f(z) \to \varphi_m^-$, $f_m(z) \to 0$ и, следовательно, $g_m(\zeta_m) = \varphi_m^-$, так что с учетом (2.4) находим

$$\lim_{\Lambda_{m,\alpha} \ni z \to \zeta_m} f(z) = \varphi_m^- + p_m(\alpha)[\varphi_m^+ - \varphi_m^-]. \tag{2.5}$$

Таким образом, множество угловых некасательных пределов в точке ζ_m образует кривую

$$\gamma = \{w(\alpha) = \varphi_m^- + p_m(\alpha)[\varphi_m^+ - \varphi_m^-],\ \alpha \in (0, \Delta\alpha_m)\}, \tag{2.6}$$

соединяющую точки φ_m^- и φ_m^+. Итак, доказано следующее.

Предложение 2. *Пусть Ω — ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей Γ без точек* (*внутреннего и внешнего*) *заострения, на которой задана кусочно-непрерывная функция $\varphi(\zeta)$, имеющая разрывы* I *рода в точках ζ_k, $k = 1,\dots,n$. Тогда существует и единственна ограниченная в $\overline{\Omega}$ функция $f(z)$, непрерывная в $\overline{\Omega}\setminus\bigcup_k \{\zeta_k\}$, удовлетворяющая в Ω уравнению $\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f = 0$ и совпадающая на $\Gamma\setminus\bigcup_k \{\zeta_k\}$ с $\varphi(\zeta)$. Эта функция $f(z)$ имеет в любой точке $\zeta \in \Gamma$ все угловые пределы, которые в точках непрерывности функции $\varphi(\zeta)$ совпадают с ее значением, а в точках ζ_k, в которых нарушается непрерывность $\varphi(\zeta)$, вычисляются по формуле* (2.5). *Множество угловых пределов образует кривую* (2.6).

3. ПРЕДЕЛЬНАЯ КРИВАЯ

Изучим характер предельной кривой γ для точки ζ_k, в которой Γ гладкая (далее опускаем индекс k). Обозначим $w_1 = \varphi^-$, $w_2 = \varphi^+$ и $\Delta w = w_2 - w_1$. Согласно (2.6), γ задается уравнением $w = w_1 + p(\alpha)[\Delta w]$ с параметром $\alpha \in (\alpha^+, \alpha^+ + \pi)$ и функцией $p(\alpha)$, определяемой по формуле (2.3). Устроим замену координаты w на

$$\tilde{w} := \frac{1}{\Delta w}\left(w - w_1 - \frac{1}{2\pi i}\log\left(1 - \tau e^{-2i\alpha^-}\right)\left(\Delta w + \frac{\sigma}{\tau}\overline{\Delta w}\right)\right),$$

которая сводится к сдвигу, повороту и растяжению (сжатию), и получим

$$\tilde{w} = \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{2\pi i}\log\left(1 - \tau e^{2i(\alpha - \alpha^-)}\right)\left(1 + \frac{\sigma}{\tau}e^{-2i\beta}\right),$$

где $\beta := \arg\Delta w$. Отсюда

$$\tilde{w}'(\alpha) = \frac{1 + \sigma e^{2i(\alpha - \alpha^- - \beta)}}{\pi\left(1 - \tau e^{2i(\alpha - \alpha^-)}\right)},$$

так что при $|\tau| < 1$, $|\sigma| < 1$ (сильная эллиптичность) имеем $\tilde{w}'(\alpha) \neq 0, \infty$, т.е. γ — гладкая кривая.

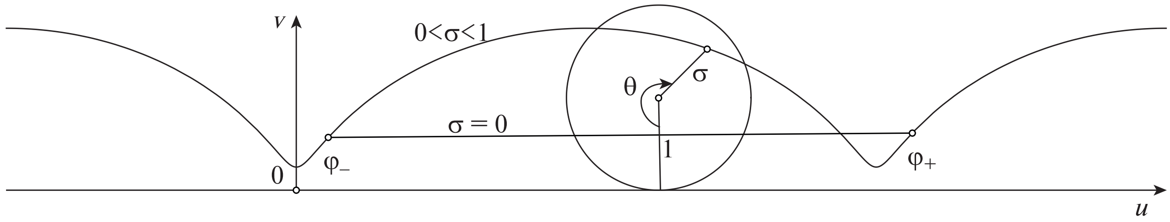
Отметим, что при $\tau = \sigma = 0$, т.е. в гармоническом случае, предельная кривая γ, как известно [9], представляет собой отрезок прямой. Кроме того, уравнение кривой упрощается, когда один из параметров τ или σ равен нулю. Рассмотрим случай, когда $\tau = 0$, что соответствует системе Ламе (см. введение). Имеем

$$\tilde{w} = \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sigma}{2\pi i}e^{2i(\alpha - \alpha^- - \beta)}.$$

Заменим параметр α на $\theta = 2(\alpha - \alpha^- - \beta) + \pi$ и устроим сдвиг и масштабирование системы координат по формуле $\hat{w} := 2\pi[\tilde{w} - (\alpha^- + \beta)/\pi + 1/2] - i$ и получим $\hat{w} = i + \alpha - \sigma e^{i\alpha}$. Отделяя вещественную и мнимую части $u = \operatorname{Re}\hat{w}$ и $v = \operatorname{Im}\hat{w}$, приходим к параметрическим уравнениям

$$u = \theta - \sigma\sin\theta, \quad v = 1 - \sigma\cos\theta,$$

где $\theta \in (-3\pi/2 - 2\beta, \pi/2 - 2\beta)$. Эти уравнения задают трохоиду, которая является траекторией точки, отстоящей от центра окружности радиуса 1 на расстояние σ, при движении этой окружности по горизонтальной прямой, см. фиг. 2. В случае сильной эллиптичности $\sigma \in [0,1)$, так что точка,



Фиг. 2.

описывающая трохоиду, лежит внутри окружности; такая трохоида называется укороченной циклоидой (при $\sigma > 1$ удлиненной). Если $\sigma = 1$, то получаем циклоиду [10]. Предельная кривая γ с точностью до сдвига, поворота и растяжения (сжатия) является отрезком одного периода полученной трохоиды.

Автор выражает благодарность В.И. Власову за полезные советы при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петровский И.Г.* Об аналитичности решений систем уравнений с частными производными // Матем. сб. 1939. Т. 5. С. 3–70.
2. *Вишик М.И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений // Матем. сб. 1951. Т. 29. С. 615–676.
3. *Hua L.K., Lin W., Wu C.Q.* On the uniqueness of the solution of the Dirichlet problem of the elliptic system of differential equations. Acta Math. Sinica. 1965. № 15(2).
4. *Hua L.K., Lin W., Wu C.Q.* Second-order systems of partial differential equations in the plane. Boston, London, Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program. 1985.
5. *Багапш А.О., Федоровский К.Ю.* C^1-аппроксимация функций решениями эллиптических систем второго порядка на компактах в R^2 // Тр. МИАН. 2017. Т. 298. С. 42–57.
6. *Бицадзе А.В.* О единственности задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. № 6(28). С. 211–212.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
8. *Verchota G.C., Vogel A.L.* Nonsymmetric systems on nonsmooth planar domains // Trans. Amer. Math. Soc. 1997. V. 349. № 11. P. 4501–4535.
9. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1965.
10. *Савелов А.А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. М.: Физматлит, 1960.