

УДК 517.957

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСА О РАЗРУШЕНИИ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА¹⁾

© 2020 г. М. О. Корпусов^{1,*}, А. Н. Левашов^{1,**}, Д. В. Лукьяненко^{1,***}

¹ 119992 Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра математики, Россия

*e-mail: korpusov@gmail.com

**e-mail: levashov.an16@physics.msu.ru

***e-mail: lukyanenko@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 11.06.2018 г.
Переработанный вариант 10.12.2019 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

В данной работе рассматривается задача об аналитико-численном исследовании вопроса о разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения Клейна–Гордона. Из аналитических результатов получена оценка сверху на время разрушения решения с произвольной положительной начальной энергией. Данная априорная информация о времени разрушения решения используется при численном уточнении процесса разрушения. Показано, что численная диагностика разрушения решения позволяет как уточнить аналитическую оценку времени разрушения решения, так и выявить факт локального разрушения решения по пространственной переменной. Библ. 17. Фиг. 5.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в частных производных, численная диагностика разрушения решения.

DOI: 10.31857/S0044466920090100

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается начально-краевая задача для модельного нелинейного уравнения Клейна–Гордона

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} + u &= u^2 + u^3, & x \in (0, l), & \quad t \in (0, T], \\ u(0, t) = u(l, t) &= 0, & t \in (0, T], \\ u(x, 0) = u_0(x), & \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in [0, l], \end{aligned} \quad (1)$$

которое описывает механику кристаллов [1].

Структура данной работы следующая. В разд. 1 получено достаточное условие на начальные функции $u_0(x)$ и $u_1(x)$ в начально-краевой задаче (1), при которых время разрушения конечно. Для получения достаточных условий разрушения решения соответствующей первой смешанной краевой задачи используется модифицированный метод Х. Левина, изложенный в работе [2]. Также в этом разделе получена аналитическая оценка сверху на время существования решения. В разд. 2 подробно описаны методы, которые позволяют, используя аналитически полученную априорную информацию о времени разрушения решения, численно диагностировать факт разрушения решения и уточнить его локализацию как во времени, так и в пространстве.

¹⁾ Работа выполнена при поддержке Программы РУДН “5-100” (М.О. Корпусов).

1. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ДИАГНОСТИКА РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Пусть $u(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[0, l])$ – это классическое решение задачи (1). Умножим обе части первого уравнения из (1) на решение $u(x, t)$ и проинтегрируем обе части равенства по $x \in [0, l]$. Тогда с учетом граничных условий из задачи (1) получим

$$\frac{1}{2}\Phi'' - J + \|u_x\|_2^2 - \|u\|_4^4 = \int_0^l u^3(x, t) dx, \quad (2)$$

где

$$\Phi(t) = \int_0^l u^2(x, t) dx, \quad J(t) = \int_0^l u_t^2(x, t) dx, \quad \|u\|_p = \left(\int_0^l |u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Теперь умножим обе части уравнения из (1) на функцию $u_t(x, t)$ и проинтегрируем по $x \in [0, l]$. В результате получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J(t) + \frac{1}{2} \|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{4} \|u\|_4^4 \right) = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} \int_0^l u^3(x, t) dx. \quad (3)$$

Далее проинтегрируем обе части равенства (3) по времени и с учетом начальных условий из (1) получим равенство

$$\frac{1}{2} J(t) + \frac{1}{2} \|u_x\|_2^2 + \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \frac{1}{4} \|u\|_4^4 - E(0) = \frac{1}{3} \int_0^l u^3(x, t) dx, \quad (4)$$

где

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l u_1^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^l [(u_{0x})^2(x) + u_0^2(x)] dx - \frac{1}{4} \int_0^l u_0^4(x) dx - \frac{1}{3} \int_0^l u_0^3(x) dx. \quad (5)$$

Из равенств (2) и (4) вытекает равенство

$$\frac{1}{2}\Phi''(t) - \frac{5}{2}J(t) - \frac{1}{2}[\|u_x\|_2^2 + \|u\|_2^2] - \frac{1}{4}\|u\|_4^4 + 3E(0) = 0,$$

из которого приходим к неравенству

$$\frac{1}{2}\Phi''(t) + 3E(0) \geq \frac{5}{2}J(t). \quad (6)$$

Учтем, что из неравенства Коши–Буняковского следует, что

$$(\Phi'(t))^2 \leq 4J(t)\Phi(t). \quad (7)$$

И, далее, из неравенств (6) и (7) вытекает неравенство

$$\Phi(t)\Phi''(t) - \frac{5}{4}(\Phi'(t))^2 + 6E(0)\Phi(t) \geq 0.$$

Математический интерес представляет случай $E(0) > 0$ (см. формулу (5)).

Далее заметим, что

$$\Phi(0) = \int_0^l u_0^2(x) dx, \quad \Phi'(0) = 2 \int_0^l u_0(x) u_1(x) dx.$$

Тогда при выполнении условий

$$(\Phi'(0))^2 > 8E(0)\Phi(0) > 0$$

из результатов работы [2] на интервале $t \in [0, T]$ выполняется следующее неравенство:

$$\Phi(t) \geq (\Phi(0))^{-1/4} - At)^{-1/4}. \quad (8)$$

Имеем

$$T \leq T_0 = \Phi(0)^{-1/4} A^{-1}, \tag{9}$$

где

$$A^2 = \frac{1}{16} \Phi(0)^{-5/2} [(\Phi'(0))^2 - 8E(0)\Phi(0)].$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Пусть $u(x, t) \in C^{(2)}([0, T]; C^{(2)}[0, l])$ – классическое решение задачи Коши (1). Тогда для любых начальных функций $u_0(x), u_1(x) \in C^{(2)}[0, l]$ таких, что выполнены неравенства

$$\Phi'(0) = 2 \int_0^l u_1(x)u_0(x)dx > 0, \quad \Phi(0) = \int_0^l u_0^2(x)dx > 0, \quad E(0) > 0,$$

где величина $E(0)$ определена равенством (5), справедлива оценка снизу (8). Более того, справедлива оценка сверху (9). Следовательно, $T < +\infty$, и поэтому классическое решение задачи (1) не существует глобально во времени.

2. ЧИСЛЕННАЯ ДИАГНОСТИКА РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Детально обсудим методы, которые помогут нам численно диагностировать факт разрушения решения и уточнить его локализацию как во времени, так и в пространстве. Напомним, что априорная информация (9), полученная аналитически в теоретической части работы, дает нам верхнюю оценку T_0 времени разрушения решения, однако не дает точного времени разрушения T_{bl} (индекс “bl” – сокращение от “blow-up”, “разрушение”) и детального описания процесса разрушения. Численный же подход, использующий аналитически полученную априорную информацию, может помочь детализировать процесс разрушения и уточнить момент разрушения.

Будем использовать обозначения $u_{init 0}(x)$ и $u_{init 1}(x)$ вместо $u_0(x)$ и $u_1(x)$ в связи с тем, что мы используем подобные индексы для определения сеточных значений функций.

Для начала сведем исходную начально-краевую задачу (1) к системе первого порядка по времени, который необходим для применения эффективных численных методов, которые будут описаны ниже:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= v, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u &= u^2 + u^3, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, \quad t \in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_{init 0}(x), \quad u_{init}(x, 0) = u_{init 1}(x), \quad x \in [0, l]. \end{aligned} \tag{10}$$

Замечание. Мы ставим задачу численного нахождения решения до момента времени $T = T_0$ включительно, хотя знаем, что решение в этот момент времени не существует и, более того, даже может разрушиться ранее. В связи с этим может сложиться впечатление, что мы ставим заведомо неразрешимую задачу: построить несуществующее решение. Однако это не так. Поясним основную идею работы. Мы имеем аналитическую оценку времени разрушения T_0 сверху (9). Реальное время разрушения решения T_{bl} мы не знаем. Поэтому мы вынуждены проводить расчеты до момента времени T_0 включительно. Численное решение, благодаря используемой ниже численной схеме, будет существовать при всех $t \in [0, T_0]$, хотя в какой-то момент времени T_{bl} реальное решение разрушается. Возникает вопрос, при каких значениях t можно доверять результату численных расчетов, а при каких нет. Этому и посвящена дальнейшая часть работы.

2.1. Поиск численного решения

С целью численного решения системы (10) мы применим жесткий метод прямых (SMOL) [3], [4] для того, чтобы свести исходную систему уравнений с двумя уравнениями в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Сначала мы введем равномерную сетку X_N только по пространственной переменной x с шагом $h = (l - 0)/N$ и содержащую $N + 1$ узлов (что соответствует N интервалам): $X_N = \{x_n, 0 \leq n \leq N : x_n = 0 + nh\}$. Таким образом, после конечно-разностной аппроксимации пространственных производных со вторым порядком точности мы получим следующую дифференциально-алгебраическую систему, из которой требуется определить $N - 1$ неизвестную функцию $u_n \equiv u_n(t) \equiv u(x_n, t)$ ($n = \overline{1, N - 1}$, u_0 и u_N определяются из соотношений, заданных граничными условиями) и $N - 1$ вспомогательную функцию $v_n \equiv v_n(t) \equiv v(x_n, t)$ ($n = \overline{1, N - 1}$, v_0 и v_N не входят в систему):

$$\begin{aligned} \frac{du_n}{dt} &= v_n, \quad n = \overline{1, N - 1}, \quad t \in (0, T], \\ \frac{dv_n}{dt} &= \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2} - u_n + u_n^2 + u_n^3, \quad n = \overline{1, N - 1}, \quad t \in (0, T], \\ u_0 &= u_N = 0, \quad t \in (0, T], \\ u_n(0) &= u_{\text{init } 0}(x_n), \quad v_n(0) = u_{\text{init } 1}(x_n), \quad n = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

Эта система может быть сведена к чисто дифференциальной и переписана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad t \in (0, T], \\ \mathbf{y}(0) &= \mathbf{y}_{\text{init}}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\mathbf{y} = (u_1 u_2 \dots u_{N-1} v_1 v_2 \dots v_{N-1})^T$, $\mathbf{f} = (f_1 f_2 \dots f_{2N-2})^T$ и $\mathbf{y}_{\text{init}} = (u_{\text{init } 0}(x_1) u_{\text{init } 0}(x_2) \dots u_{\text{init } 0}(x_{N-1}) u_{\text{init } 1}(x_1) u_{\text{init } 1}(x_2) \dots u_{\text{init } 1}(x_{N-1}))^T$. Здесь вектор-функция \mathbf{f} имеет следующую структуру:

$$f_n = \begin{cases} y_{n+N-1}, & \text{если } n = \overline{1, N - 1}, \\ \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y_1 + 0) - y_1 + y_1^2 + y_1^3, & \text{если } n = N, \\ \frac{1}{h^2}(y_{n-N+2} - 2y_{n-N+1} + y_{n-N}) - y_{n-N+1} + y_{n-N+1}^2 + y_{n-N+1}^3, & \text{если } n = \overline{N + 1, 2N - 3}, \\ \frac{1}{h^2}(0 - 2y_{N-1} + y_{N-2}) - y_{N-1} + y_{N-1}^2 + y_{N-1}^3, & \text{если } n = 2N - 2. \end{cases}$$

Для численного решения системы (11) мы будем использовать одностадийную схему Розенброка с комплексным коэффициентом CROS1 [5], [6], которая является наилучшим выбором для решения задач такого рода по той причине, что она не приводит к переполнению даже в том случае, если решение задачи устремляется к бесконечности [7], [8]. Для ее применения мы введем равномерную сетку T_M по времени t с шагом $\tau = (T - 0)/M$, которая имеет $M + 1$ узлов (т.е. M интервалов): $T_M = \{t_m, 0 \leq m \leq M : t_m = 0 + m\tau\}$. После этого запишем схему CROS1 для решения системы (11):

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t_{m+1}) &= \mathbf{y}(t_m) + (t_{m+1} - t_m) \text{Re } \mathbf{w}, \\ \text{где } \mathbf{w} &\text{ является решением СЛАУ,} \\ \left[\mathbf{E} - \frac{1+i}{2}(t_{m+1} - t_m) \mathbf{f}_y(\mathbf{y}(t_m)) \right] \mathbf{w} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_m)). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь \mathbf{E} – единичная матрица, а \mathbf{f}_y – матрица Якоби.

2.2. Численная диагностика разрушения решения

При численных расчетах важно не только получить приближенный численный результат, но также и выполнить некоторую оценку его точности. Метод вычисления апостериорной асимптотически точной оценки погрешности [7] позволяет это сделать. Но этот метод также может помочь и диагностировать факт разрушения точного решения [8]. Основные формулы и утвержде-

ния этого пункта впервые были представлены в работах [7]–[9]. Мы развили эти идеи в работах [10]–[17].

Для начала введем базовую сетку $X_N \times T_M: \{x_n, t_m\}, 0 \leq n \leq N, 0 \leq m \leq M$. После этого произведем последовательное сгущение сеток, начиная с базовой, и вычислим набор сеточных значений решения

$$u_{(s)}(x, t) \equiv u^{(r_x^{s-1} N, r_t^{s-1} M)}(x, t)$$

на полученных сетках $X_{r_x^{s-1} N} \times T_{r_t^{s-1} M}$ (s – номер сетки из набора S сеток, $s = \overline{1, S}$).

В связи с тем, что мы аппроксимировали все пространственные производные в (10) с точностью $O(h^2)$, а при численном интегрировании системы (11) используем схему CROS1 (12), которая имеет точность $O(\tau^2)$, построенный метод решения системы (10) имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$ или, другими словами, теоретический порядок точности по времени $p_t = p_t^{\text{theor}} \equiv 2$, а по пространству $p_x = p_x^{\text{theor}} \equiv 2$. Мы выполняем последовательное сгущение сеток по времени в целое число раз r_t и сгущение пространственной сетки в целое число раз r_x так, чтобы выполнялось условие $r_t^{p_t} = r_x^{p_x}$ (подробности см. в [9]), т.е. в нашем случае $r_t^2 = r_x^2$. Наиболее удобно для счета выбрать $r_t = r_x \equiv 2$. В этом случае каждая последующая сетка $X_{r_x^{s-1} N} \times T_{r_t^{s-1} M}$ имеет узлы, совпадающие с узлами (x_n, t_m) базовой сетки. В этих узлах (x, t) мы можем выполнить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности [8], [9]

$$\Delta_{(s)}(x_n, t_m) = \frac{u_{(s)}(x_n, t_m) - u_{(s-1)}(x_n, t_m)}{r_t^2 - 1}, \tag{13}$$

и оценить эффективный порядок точности [8], [9] на всем промежутке времени $t \in [0, T_0]$

$$p_{t(s)}^{\text{eff}} = \log_{r_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (u_{(s-1)}(x_n, t_m) - u_{(s-2)}(x_n, t_m))^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M (u_{(s)}(x_n, t_m) - u_{(s-1)}(x_n, t_m))^2}}$$

(здесь выбрана наиболее удобная из возможных норм – евклидова). В случае, если на всем промежутке времени $t \in [0, T_0]$ решение задачи имеет непрерывные производные порядка p_x по x и p_t по t , имеет место сходимость [8]

$$p_{t(s)}^{\text{eff}} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p_t^{\text{theor}} \equiv p_t.$$

Нарушение этой сходимости говорит о потере гладкости точного решения на промежутке времени $t \in [t, T_0]$.

С целью локализации конкретного момента времени, в который произошло разрушение решения, можно оценить эффективный порядок точности и поточечно в каждом узле $t_m \in T_M, 0 < m \leq M$,

$$p_{t(s)}^{\text{eff}}(t_m) = \log_{r_t} \frac{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u_{(s-1)}(x_n, t_m) - u_{(s-2)}(x_n, t_m))^2}}{\sqrt{\sum_{n=0}^N (u_{(s)}(x_n, t_m) - u_{(s-1)}(x_n, t_m))^2}}. \tag{14}$$

В точках t , в которых решение исходной задачи имеет непрерывные производные порядка p_t по времени и порядка p_x по пространству, имеет место сходимость

$$p_{t(s)}^{\text{eff}}(t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} p_t^{\text{theor}} \equiv p_t$$

и соответствующая оценка погрешности (13) является асимптотически точной при $s \rightarrow \infty$ (или, что то же самое, $N, M \rightarrow \infty$). Нарушение этой сходимости говорит о потере гладкости точного

решения [7]–[9]. В частности, в случае степенной “сингулярности” $u(x, t) \sim (T_{bl} - t)^{-\beta}$, где T_{bl} – время разрушения (напомним, что индекс “bl” – сокращение от “blow-up”, “разрушение”), для любого $t > T_{bl}$ эффективный порядок точности $p_{t(s)}^{eff}(t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\beta$. Это позволяет нам найти соответствующую степень β . Если $p_{t(s)}^{eff}(t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -\infty$ для любого $t > T_{bl}$, мы можем утверждать, что решение экспоненциально возрастает, т.е. $u(x, t) = \infty$; если $p_{t(s)}^{eff}(t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$ для любого $t > T_{bl}$, то рост решения в окрестности “сингулярности” является логарифмическим: $u(x, t) \sim \ln(T_{bl} - t)$. Вывод соответствующих утверждений можно найти в [7], [8]. Момент разрушения решения T_{bl} может быть найден с точностью до величины интервала базовой сетки по времени T_M .

После локализации момента времени разрушения t можно локализовать и пространственные точки разрушения решения по переменной x для каждого конкретного момента времени t в каждом узле $t_m \in T_M, 0 \leq m \leq M$,

$$p_{x(t_s)}^{eff}(x_n, t_m) = \log_{r_t} \frac{|u_{(s-1)}(x_n, t_m) - u_{(s-2)}(x_n, t_m)|}{|u_{(s)}(x_n, t_m) - u_{(s-1)}(x_n, t_m)|}. \tag{15}$$

Если нарушение гладкости решения возникает во всей области по пространственной переменной одновременно, то отклонение сходимости $p_{x(t_s)}^{eff}(x, t)$ от 2 возникает во всех точках сетки $\{x_n\}$ с первого временного слоя $t_m \geq T_{bl}$ (см., например, пример 1a в [11]). Если разрушение решения возникает в одной-единственной точке x^* , то описанный метод позволяет оценить локализацию этой точки (см., пример 1 ниже). Такая диагностика процесса разрушения решения возможна в связи с тем, что схема CROSI не приводит к переполнению даже в том случае, если решение задачи устремляется к бесконечности [7], [8].

Пример 1. Для начала рассмотрим пример для следующего набора входных данных:

$$u_{init\ 0}(x) \equiv a \sin 2x, \quad u_{init\ 1}(x) \equiv b \sin 2x, \quad l = \pi, \tag{16}$$

$$a = 7, \quad b = 10. \tag{17}$$

К сожалению, точное решение уравнения (1) не может быть получено аналитически, однако в теоретической части работы была получена априорная оценка сверху T_0 (9) для времени разрушения решения T_{bl} . В случае набора параметров (16) мы получим

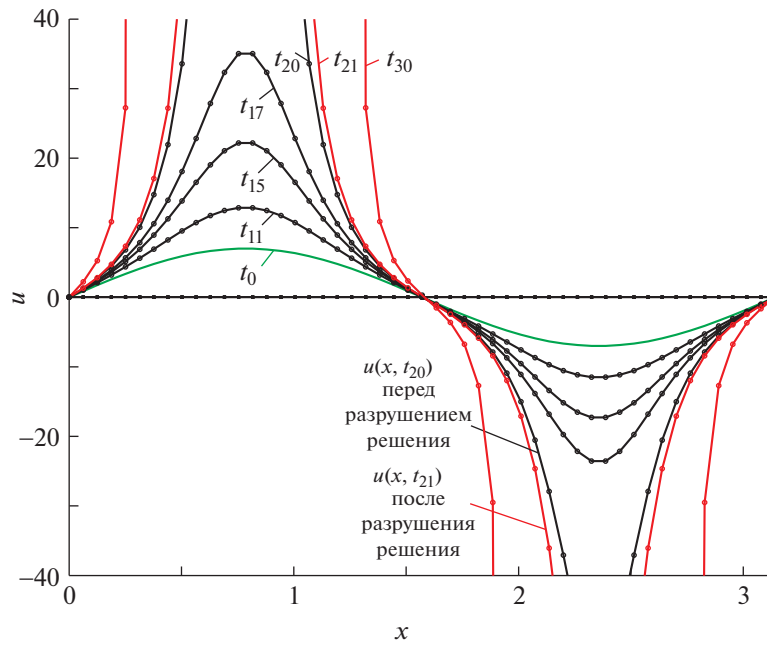
$$T_{bl} \leq T_0 = T_0(a, b) \equiv \frac{2a}{\sqrt{\frac{3a^4}{8} - 5a^2}}, \tag{18}$$

что дает для (17): $T_0 \approx 0.58$.

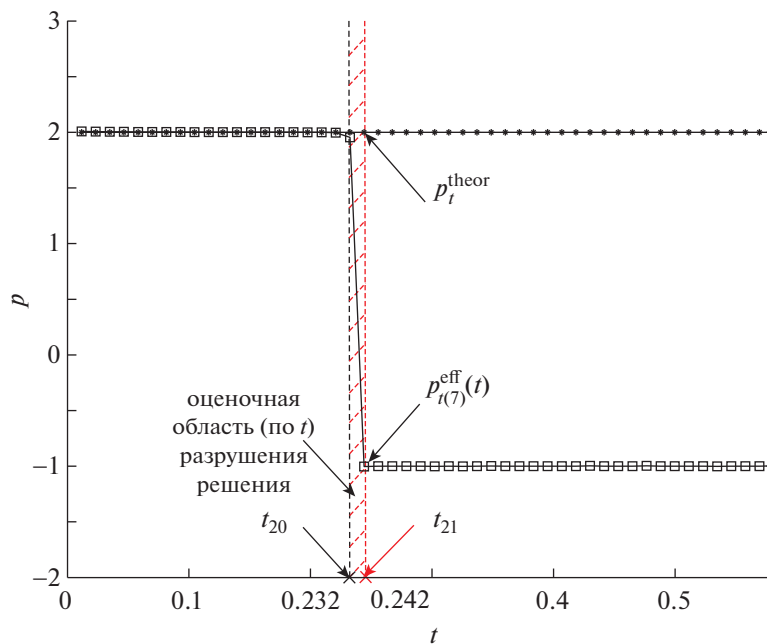
Применим численный алгоритм диагностики момента и места разрушения решения. Для численного решения задачи (1) с входными данными (16), (17) мы возьмем следующий набор параметров: $T_0 = 0.581, N = 50, M = 50, r_x = 2, r_t = 2, S = 7$ (число последовательно используемых для вычислений сеток, включая начальную). Численное решение $u^{(r_x^{S-1}N, r_t^{S-1}M)}$ представлено на фиг. 1 (отмечены только узлы, совпадающие с узлами базовой сетки $X_N \times T_M$).

Получив приближенное численное решение на разных сетках, мы можем проверить сходимость эффективного порядка точности к теоретическому для каждого временного слоя по формуле (14). После вычислений на S вложенных сетках эффективный порядок точности $p_{t(s)}^{eff}$ для каждого временного слоя t_m сходится к $p^{theor} = 2$ (см. фиг. 2) за исключением временных слоев, соответствующих моментам времени $t_m, m \geq 21: p^{eff}(t_{21}) \rightarrow -1$, что означает, что $T_{bl} \in (t_{20}, t_{21}] \equiv (0.232, 0.242]$ является временем разрушения решения и что в точке T_{bl} решение имеет особенность типа полюса $u(x, t) \sim (T_{bl} - t)^{-1}$. Таким образом, численный алгоритм позволил уточнить аналитическую оценку времени разрушения.

Мы также можем оценить эффективный порядок точности для каждой пространственной точки выбранного временного слоя, соответствующего моменту времени t_m , по формуле (14). Мы можем использовать эту формулу, например, для временного слоя, соответствующего мо-



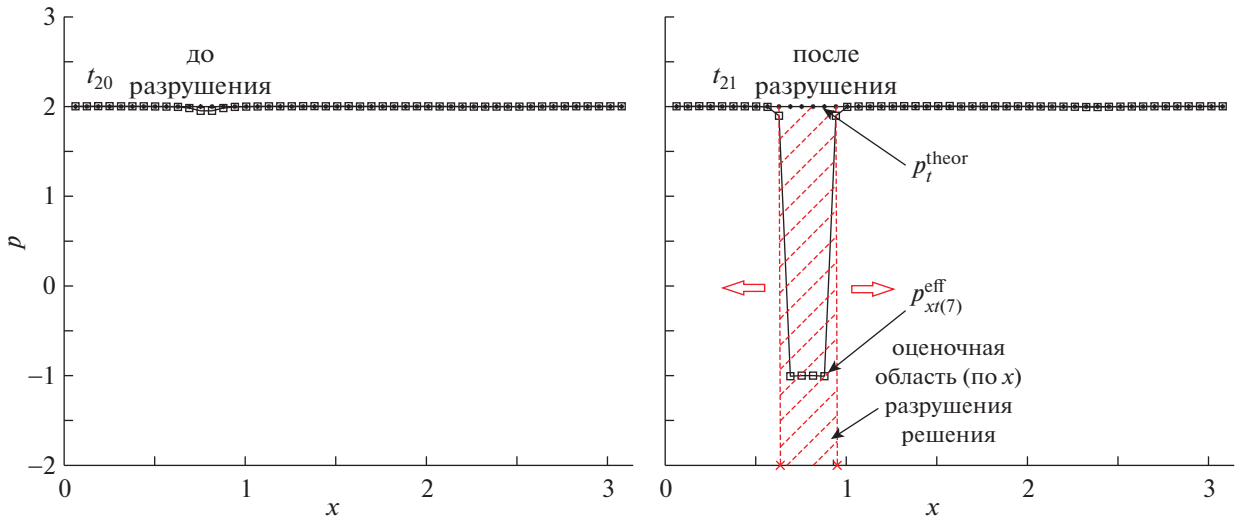
Фиг. 1. Пример 1: численное решение задачи в разные моменты времени. Красным цветом отмечено численное решение в те моменты времени, при которых ему нельзя доверять.



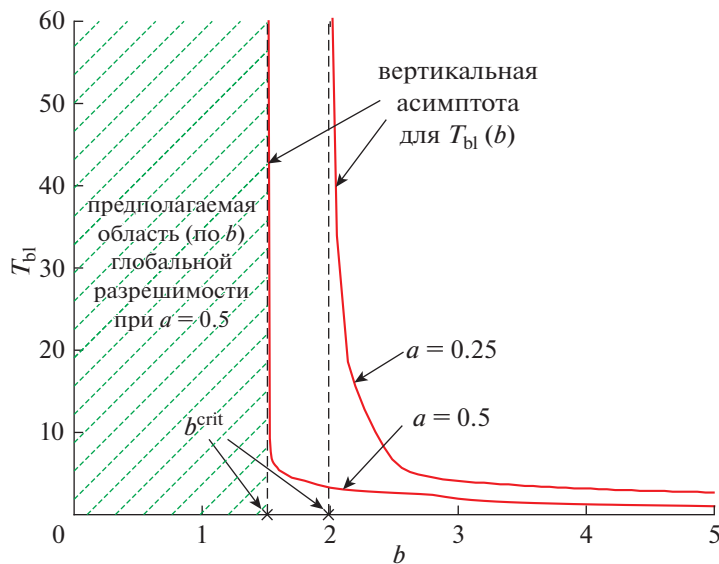
Фиг. 2. Пример 1: эффективный порядок точности численной схемы в каждый момент времени. Разрушение решения диагностировано в момент времени $T_{bl} \in (t_{20}, t_{21}] \equiv (0.232, 0.242]$.

менту времени t_{21} , в котором было диагностировано разрушение решения изначально, с целью определить, возникло ли разрушение на всем временном слое или только в отдельных точках по пространственной переменной. Исходя из фиг. 3 мы можем предположить, что решение разрушилось сначала только в некоторой подобласти рассматриваемой области $x \in [0, \pi]$.

Также лишний раз отметим, что данная методика позволяет сделать вывод о том, при каких t_m , $0 \leq m \leq M$, мы можем доверять численному решению, а при каких нет (см. фиг. 1).

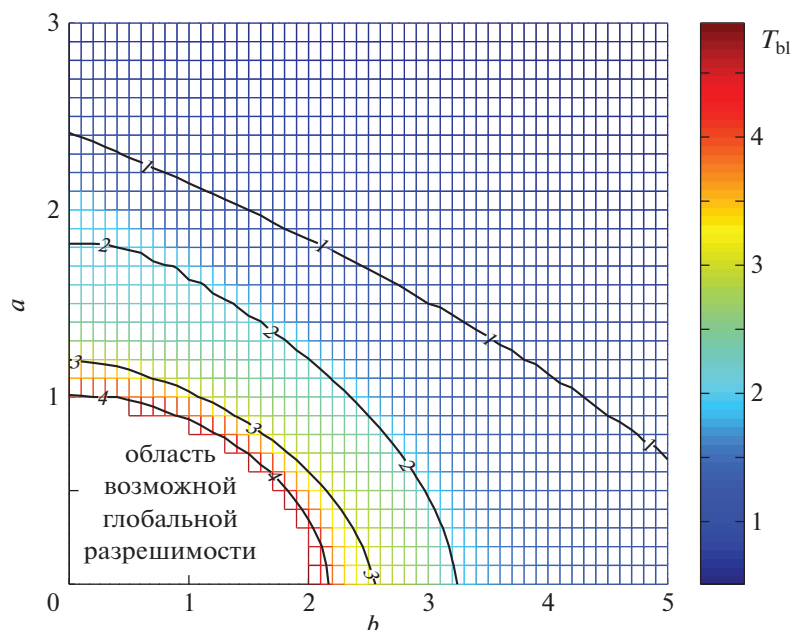


Фиг. 3. Пример 1: эффективный порядок точности в каждой точке по пространству в моменты времени t_{20} и t_{21} . Разрушение решения диагностировано на некоторой подобласти области $x \in [0, \pi]$.



Фиг. 4. Пример 3: график зависимости времени разрушения T_{b1} решения задачи (1) с набором входных данных (16) от амплитуды b начальной функции $u_{init 1}(x)$ при фиксированных значениях параметра a .

Пример 2. В данном численном эксперименте мы рассматриваем серию задач из примера 1 с набором входных данных (16) для различных значений параметров a и b . В этом случае по-прежнему верна аналитическая оценка времени разрушения (18) (отметим, что она не зависит от параметра b), из которой следует, что условия применимости теоремы 1 выполнены при $\frac{3a^4}{8} - 5a^2 > 0$, т.е. при $a > \sqrt{\frac{40}{3}} \approx 3.65$. При меньших значениях параметра a аналитический ответ на вопрос о наличии факта разрушения решения остается открытым. Однако численные методы могут помочь дополнить информацию, полученную аналитически. На фиг. 4 представлены графики зависимости времени разрушения T_{b1} (оцененного численно) решения задачи (1) с набором входных данных (16) от амплитуды b начальной функции $u_{init 1}(x)$ при фиксированных значениях параметра a ($a = 0.25$ и $a = 0.5$).



Фиг. 5. Пример 2: график зависимости времени разрушения T_{bl} решения задачи (1) с набором входных данных (16) от амплитуд a и b начальных функций (16).

Из характера соответствующих графиков можно предположить, что они имеют вертикальные асимптоты, в окрестностях которых реальное время разрушения T_{bl} уходит на бесконечность. Это означает, что можно оценить предполагаемую область глобальной разрешимости. Более того, на фиг. 5 представлена зависимость времени разрушения решения задачи (1) с набором входных данных (16) от амплитуд a и b , $(a, b) \in [0, 3] \times [0, 5]$, начальных функций. В результате мы можем оценить область определения параметров a и b , в которой поставленная задача предположительно является глобально разрешимой по времени. Отметим, что этот результат не удалось получить аналитическими методами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе продемонстрирована возможность эффективного комбинирования аналитического и численного подходов при диагностике факта разрушения численного решения нелинейного уравнения Клейна–Города, которое описывает механику кристаллов. Комбинация этих подходов позволяет получить качественную информацию о факте и характере разрушения приближенного численного решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Li Kaitaia, Zhang Quande.* Existence and nonexistence of global solutions for the equation of dislocation // J. Differential Equations. 1998. V. 10. № 1. P. 5–21.
2. *Корпусов М.О.* Разрушение в нелинейных волновых уравнениях с положительной энергией // URSS, 2012, 256 с.
3. *Hairer E., Wanner G.* Solving of Ordinary Differential Equations. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Springer, 2002.
4. *Kalitkin N.N.* Numerical methods for solving stiff systems [in Russian] // Matematicheskoye modelirovanie. 1995. V. 7. № 5. P. 8–11.
5. *Rosenbrock H.H.* Some general implicit processes for the numerical solution of differential equations // Computer Journal. 1963. V. 5. № 4. P. 329–330.
6. *Al'shinn A.B., Al'shina E.A., Kalitkin N.N., Koryagina A.B.* Rosenbrock schemes with complex coefficients for stiff and differential algebraic systems // Comp. Math. and Math. Phys. 2006. V. 46. № 8. P. 1320–1340.

7. *Al'shin A.B., Kalitkin N.N., Koryakin P.V.* Diagnostics of singularities of exact solutions in computations with error control // *Comp. Math. and Math. Phys.* 2005. V. 45. № 19. P. 1769–1779.
8. *Al'shin A.B., Al'shina E.A.* Numerical diagnosis of blow-up of solutions of pseudoparabolic equations // *J. Math. Sci.* 2008. V. 148. № 1. P. 143–162.
9. *Kalitkin N.N., Al'shin A.B., Al'shina E.A., Rogov B.V.* Computations on Quasi-Uniform Grids [in Russian]. M.: Fizmatlit. 2005.
10. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V.* Blow-up for one sobolev problem: theoretical approach and numerical analysis // *J. Math. Analysis and Applicat.* 2016. V. 442. № 52. P. 451–468.
11. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V.* Blow-up phenomena in the model of a space charge stratification in semiconductors: analytical and numerical analysis // *Math. Methods in the Appl. Sci.* 2017. V. 40. № 7. P. 2336–2346.
12. *Лукьяненко Д.В., Панин А.А.* Разрушение решения уравнения стратификации объемного заряда в полупроводниках: численный анализ при сведении исходного уравнения к дифференциально-алгебраической системе // *Вычисл. методы и программирование: Новые вычисл. технологии (Электронный научный журнал)*. 2016. Т. 17. № 1. С. 437–446.
13. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // *Вест. Южно-Уральского гос. университета. Сер. Матем. моделирование и программирование*. 2017. Т. 10. № 2. С. 107–123.
14. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V.* Instantaneous blow-up versus local solvability for one problem of propagation of nonlinear waves in semiconductors // *J. Math, Analy, and Applicat.* 2018. V. 459. № 1. P. 159–181.
15. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Shlyapugin G.I.* On the blow-up phenomena for a one-dimensional equation of ion-sound waves in a plasma: analytical and numerical investigation // *Math. Methods in the Appl. Sci.* 2018. V. 41. № 8. P. 2906–2929.
16. *Korpusov M.O., Lukyanenko D.V., Panin A.A., Yushkov E.V.* On the blow-up of solutions of a full non-linear equation that describes ion-sound waves in plasma with non-coercive non-linearities // *Izvestiya. Mathematics.* 2018. V. 82. № 2. P. 283–317.
17. *Колотов И.И., Панин А.А.* О непродолжаемых решениях и разрушении решений псевдопараболических уравнений с коэрцитивной и знакопостоянной нелинейностью // *Матем. заметки*. 2019. Т. 105. № 5. С. 708–723.