

УДК 517.9

## О ПЕРИОДИЧЕСКОМ ВНУТРЕННЕМ СЛОЕ В ЗАДАЧЕ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ С ИСТОЧНИКОМ МОДУЛЬНО-КУБИЧНОГО ТИПА<sup>1)</sup>

© 2020 г. Н. Н. Нефедов<sup>1,\*</sup>, Е. И. Никулин<sup>1,\*\*</sup>, А. О. Орлов<sup>1,\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. факультет, Россия

\*e-mail: nefedov@phys.msu.ru

\*\*e-mail: nikulin@physics.msu.ru

\*\*\*e-mail: orlov.andrey@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 11.11.2019 г.

Переработанный вариант 10.01.2020 г.

Принята к публикации 09.04.2020 г.

Исследована сингулярно возмущенная периодическая задача для параболического уравнения реакция-диффузия в случае разрывного источника – нелинейности, описывающей реакцию (взаимодействие). Рассмотрен случай существования внутреннего переходного слоя в условиях несбалансированной и сбалансированной реакции. Построено асимптотическое приближение и исследована асимптотическая устойчивость по Ляпунову периодических решений в каждом из рассмотренных случаев. Для доказательства существования решения и его асимптотической устойчивости используется асимптотический метод дифференциальных неравенств. Приведен пример и проведены численные расчеты, иллюстрирующие теоретический результат. Библ. 21. Фиг. 4.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенные параболические задачи, периодические задачи, уравнения реакция-диффузия, двумерные контрастные структуры, сбалансированная нелинейность, внутренние слои, фронты, асимптотические методы, дифференциальные неравенства, асимптотическая устойчивость по Ляпунову, разрывная реакция.

DOI: 10.31857/S0044466920090136

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается сингулярно возмущенное уравнение реакция-диффузия, естественно возникающее в математических моделях с быстрой реакцией:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t, \varepsilon) = 0, \\ (x, y, t) &\in D_t := \{(x, y, t) \in R^3 : x, y \in D, t \in R\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} &(x, y, t, \varepsilon) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , производная  $\frac{\partial}{\partial n_\Gamma}$  берется по внутренней нормали к гладкой границе  $\Gamma$  заданной двумерной односвязной области  $D$ , а  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

Интерес к различным классам периодических задач связан как с различными приложениями, так и новыми математическими задачами, возникающими при их рассмотрении (см., например, [1], [2]). Настоящая работа развивает асимптотический метод дифференциальных неравенств на новый класс задач (см. [3] и ссылки в этой работе).

Исследуется новый класс сингулярно возмущенных периодических задач в случае разрывного источника – нелинейности, описывающей реакцию (взаимодействие). Рассмотрение таких задач инициировано работами по изучению внутренних слоев в задачах, где коэффициенты ад-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект 18-11-00042.

векции или реакции претерпевают разрывы и их называют нелинейностями модульного типа (см. [4]–[7] и ссылки в этих работах). Ряд приложений такого типа уравнений можно найти в [8].

Задача (1) рассматривается при условии, что функция  $f(u, x, y, t, \varepsilon)$  имеет вид:

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u \geq \varphi_2(x, y, t) \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u < \varphi_2(x, y, t) \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R, \end{cases}$$

где  $f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon)$ ,  $f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon)$  – достаточно гладкие функции. Очевидно, что замена  $z = u(x, y, t, \varepsilon) - \varphi_2(x, y, t, \varepsilon)$  приводит к задаче с правой частью, разрывной при  $z = 0$ . Поэтому, не ограничивая общности, будем предполагать выполненными следующие условия:

**(A1)** Пусть функция  $f(u, x, y, t, \varepsilon)$  имеет вид:

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u \geq 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R, \\ f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon), & \text{если } u < 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R. \end{cases}$$

Здесь  $f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon)$ ,  $f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon)$  – достаточно гладкие  $T$ -периодические функции. Такие разрывные нелинейности принято называть нелинейностями модульного типа. Предположим также следующее.

**(A2)** Пусть уравнение  $f^{(+)}(u, x, y, t, 0) = 0$  имеет единственное  $T$ -периодическое решение  $u = \varphi^{(+)}(x, y, t)$ , а уравнение  $f^{(-)}(u, x, y, t, 0) = 0$  имеет единственное  $T$ -периодическое решение  $u = \varphi^{(-)}(x, y, t)$ , причем выполнены неравенства

$$\varphi^{(-)}(x, y, t) < 0 < \varphi^{(+)}(x, y, t), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R.$$

Для этих корней выполняются неравенства

$$\mathbf{(A3)} \quad f_u^{(+)}(\varphi^{(+)}(x, y, t, 0)) > 0, \quad f_u^{(-)}(\varphi^{(-)}(x, y, t, 0)) > 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R.$$

Поскольку решение задачи (1) при выполнении условий (A1)–(A3) в значительной мере аналогично решению в случае нелинейностей (источников) кубического типа (см. [9] и ссылки в этой работе), то мы называем рассматриваемую в работе нелинейность источником модульно-кубического типа. Отметим, что настоящая работа развивает результаты работы [10].

Будем исследовать вопрос о существовании задачи (1) гладкого периодического решения, которое для любого момента времени  $t$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  внутри области, ограниченной некоторой гладкой замкнутой кривой  $C(t, \varepsilon) \subset D$ , стремится к корню  $\varphi^{(+)}(x, y, t)$ , а снаружи – к другому корню  $\varphi^{(-)}(x, y, t)$ , и резко изменяется от  $\varphi^{(-)}(x, y, t)$  до  $\varphi^{(+)}(x, y, t)$  в окрестности кривой  $C(t, \varepsilon)$ . Кривую  $C(t, \varepsilon)$  называют кривой переходного слоя. Отметим, что положение этой кривой заранее не известно и определяется в процессе построения асимптотики решения. Это отличает рассматриваемую задачу от задач с разрывом источника в некоторой точке или на гиперповерхности, в окрестности которых локализован внутренний слой (такие задачи рассматривались в [11], [12]).

Нам понадобятся и другие предположения, которые мы сформулируем ниже.

Определим положение кривой переходного слоя из условия равенства нулю решения задачи (1) на этой кривой:  $C(t, \varepsilon) = \{(x, y) \in D : u(x, y, t, \varepsilon) = 0\}$ . Кривая  $C(t, \varepsilon)$  разделяет область  $D$  на подобласти  $D^{(-)}$  и  $D^{(+)}$  – соответственно внешнюю и внутреннюю относительно этой кривой.

Решение задачи (1) определяется следующим образом.

**Определение.**  $T$ -периодическая по  $t$  функция  $u(x, y, t, \varepsilon) \in C^{1,1,1}(D) \cap C^{2,2,1}(D^{(-)} \cup D^{(+)})$  называется решением задачи (1), если она удовлетворяет уравнению (1) в каждой из областей  $D^{(\mp)}$ , а также граничному условию.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИКИ

## 2.1. Асимптотическое разложение решения

Для построения формальной асимптотики используется схема асимптотической теории контрастных структур, достаточно подробно описанная в [13]. Для этого задача (1) разбивается на две. В области  $D^{(+)}$  рассматривается задача

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon) &= 0, \\ (x, y, t) \in D_t^{(+)} &:= \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D^{(+)}, t \in R\}, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in C(t, \varepsilon), \quad t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in D^{(+)}, \quad t \in R, \end{aligned}$$

а в области  $D^{(-)}$  рассматривается задача

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f^{(-)}(u, x, y, t, \varepsilon) &= 0, \\ (x, y, t) \in D_t^{(-)} &:= \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D^{(-)}, t \in R\}, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in C(t, \varepsilon), \quad t \in R, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}^{(-)}, \quad t \in R. \end{aligned}$$

Для описания внутреннего переходного слоя (аналогично [14]) рассмотрим однопараметрическое семейство кривых  $\{\bar{C}(t)\} := \{\bar{C}(t) \subset D : \bar{C}(t) - \text{достаточно гладкая простая замкнутая кривая}; \bar{C}(t) = \bar{C}(t + T), t \in R\}$ . Для каждой кривой  $C(t)$  определим  $\delta$ -окрестность  $\bar{C}^\delta(t) := \{P \in D : \text{dist}(P, \bar{C}(t)) < \delta\}$ ,  $\delta = \text{const} > 0$ . Далее, стандартным образом введем в  $\delta$ -окрестности кривой  $\bar{C}(t) \in \{\bar{C}(t)\}$  локальную систему координат  $(r, \theta)$ , где  $\theta \in [0, \bar{\theta}(\bar{C}(t))]$  – это координата точки  $M \in \bar{C}(t)$ ,  $\text{dist}\{(x, y), \bar{C}\} = \text{dist}\{(x, y), M\}$ ;  $r = \pm \text{dist}\{(x, y), \bar{C}\}$ ,  $(x, y) \in D^\pm$ , где  $D^+$ ,  $D^-$  – соответственно внутренняя и внешняя области, на которые разбивает область  $D$  кривая  $\bar{C}(t)$ . Пусть при каждом фиксированном  $t$  кривая  $\bar{C}(t)$  определена в параметрической форме:  $x = X(\theta, t)$ ,  $y = Y(\theta, t)$ , а  $\mathbf{n}(\theta, t) = (n_1(\theta, t), n_2(\theta, t))$  – внутренняя нормаль ( $n_1(\theta, t)$  и  $n_2(\theta, t)$  – направляющие косинусы нормали) к кривой  $\bar{C}(t)$  в точке  $(0, \theta)$ . При достаточно малом  $\delta$  в  $\delta$ -окрестности кривой  $\bar{C}(t)$  существует взаимно однозначное соответствие между координатами  $(x, y)$  и  $(r, \theta)$ :

$$x = X(\theta, t) + rn_1(\theta, t), \quad y = Y(\theta, t) + rn_2(\theta, t).$$

Аналогично для описания пограничного слоя в достаточно малой окрестности кривой  $\Gamma$  вводятся локальные координаты  $(r_\Gamma, \theta_\Gamma)$ .

Пусть нам известна кривая  $C_0(t) \in \{\bar{C}(t)\}$ , являющаяся нулевым приближением для кривой  $C(t, \varepsilon)$ , и в ее окрестности введена локальная система координат  $(r, \theta)$ . Уравнение для кривой переходного слоя  $C(t, \varepsilon)$  будем искать в следующем виде:

$$r = \lambda^*(\theta, t, \varepsilon) = \varepsilon \lambda_1^*(\theta, t, \varepsilon) = \varepsilon(\lambda_1(\theta, t) + \varepsilon \lambda_2(\theta, t) + \varepsilon^2 \lambda_3(\theta, t) + \dots), \quad (2)$$

где правая часть представляется в виде ряда по степеням  $\varepsilon$  с неизвестными коэффициентами  $\lambda_i(\theta, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Ниже мы покажем, как найти  $C_0(t)$ .

Далее для функций асимптотики в области  $D^{(-)}$  используем обозначение  $(-)$ , в области  $D^{(+)}$  –  $(+)$ . Построим асимптотику в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , не раскладывая в такой ряд функцию  $\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)$ :

$$U^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \Pi(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon), \quad (3)$$

где регулярная часть имеет вид:

$$\bar{u}^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x, y, t) + \dots + \varepsilon^n \bar{u}_n^{(\pm)}(x, y, t) + \dots$$

есть регулярная часть асимптотики,

$$\Pi(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon) = \Pi_0(\tau, \theta_\Gamma, t) + \varepsilon \Pi_1(\tau, \theta_\Gamma, t) + \dots + \varepsilon^n \Pi_n(\tau, \theta_\Gamma, t) + \dots, \quad \tau = \frac{r_\Gamma}{\varepsilon}$$

погранслоиная часть асимптотики, служащая для приближения решения вблизи границы  $\Gamma$ ,

$$Q^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^n Q_n^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \dots$$

есть часть асимптотики, служащая для приближения внутреннего переходного слоя в окрестности  $C(t, \varepsilon)$  ( $\xi = (r - \lambda^*(\theta, t, \varepsilon))/\varepsilon$ ), члены которой, как будет показано ниже, определяются из уравнений, в которые входят функция  $\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)$  и ее частные производные, этим и объясняется зависимость функций  $Q_i$  от аргумента  $\varepsilon$ . Если включить  $\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)$  и ее частные производные в аргументы функций  $Q_i$ , то при действии на них оператор  $\varepsilon^2 \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right)$  будет выглядеть уже иным образом.

Метод пограничных функций (см. [9], [15]) с учетом особенностей параболического оператора (см. [9], [10]) приводит к последовательности задач для определения коэффициентов асимптотических рядов (3), из которых, в частности, получим  $\bar{u}_0^{(-)}(x, y, t) = \varphi^{(-)}(x, y, t)$ ,  $\bar{u}_0^{(+)}(x, y, t) = \varphi^{(+)}(x, y, t)$ . Функции  $u_i^{(\pm)}(x, y, t)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , а также пограничные функции  $\Pi_i(\tau, \theta_\Gamma, t)$  строятся стандартным образом, и мы это построение в работе рассматривать не будем.

В дальнейшем, если указана конкретная кривая  $\bar{C}(t) \in \{\bar{C}(t)\}$ , будем пользоваться обоими наборами аргументов  $(x, y, t)$  и  $(r, \theta, t)$ , сохраняя при этом обозначение функций, которые от них зависят, например:  $\varphi^{(+)}(x, y, t) = i^{(+)}(r, \theta, t)$ .

Остановимся подробнее на построении функций внутреннего переходного слоя. Оператор Лапласа в локальных координатах  $(r, \theta)$  имеет вид (см. [15]):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Delta r \frac{\partial}{\partial r} + |\nabla \theta|^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \Delta \theta \frac{\partial}{\partial \theta},$$

где  $\Delta r, \nabla \theta, \Delta \theta$  – известные функции  $r$  и  $\theta$  ( $\Delta r = \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}$ , аналогично определяются  $\nabla \theta$  и  $\Delta \theta$ ).

Тогда, при действии на часть асимптотики для внутреннего переходного слоя, дифференциальный оператор  $D_\varepsilon := \varepsilon^2 \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right)$  в переменных  $(\xi, \theta, t)$  приобретает вид:

$$D_\varepsilon = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \varepsilon s(\varepsilon \xi + \lambda^*, \theta, t) \frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2 L_2,$$

где  $s(r, \theta, t) := \Delta r(r, \theta, t) - \frac{\partial r}{\partial t}(r, \theta, t) \Big|_{x, y = \text{const}}$ ,

$$L_2 := |\nabla \theta|^2 \left[ \left( \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] + \Delta \theta \left[ - \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right] - \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{x, y = \text{const}} + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Пусть  $\mathbf{R}_0(\theta, t) = \{X(\theta, t), Y(\theta, t)\}$  – радиус-вектор точки кривой  $C_0$  с координатами  $\theta, t$ . Нетрудно показать, что

$$\frac{\partial r}{\partial t}(r, \theta, t) \Big|_{x, y = \text{const}} = \mp \left( \frac{\partial \mathbf{R}_0(\theta, t)}{\partial t}, \mathbf{n}(\theta, t) \right),$$

что представляет собой нормальную компоненту скорости  $\frac{\partial \mathbf{R}_0(\theta, t)}{\partial t}$  точки  $y(\theta, t)$  кривой  $C_0(t)$ .

Также известно (см. [14]), что  $\Delta r(r, \theta, t)$  – кривизна кривой  $\Gamma_r(t) := \{(x(\theta, t), y(\theta, t)) \in D : \{x, y\} = \mathbf{R}_0(\theta, t) + r\mathbf{n}(\theta, t), y \in C_0(t)\}$  в точке  $(x(\theta, t), y(\theta, t))$ .

Действуя по схеме алгоритма А.Б. Васильевой, определим функции  $Q_i^{(\pm)}$ .

Члены  $Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$  определяются из следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi^2} &= f^{(\pm)}(\varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon), \lambda^*, \theta, t, 0), \\ Q_0^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) &= 0, \quad Q_0^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Известно (см., например, [13]), что задача (4) имеет единственное, монотонное по  $\xi$  решение, причем имеют место следующие оценки:

$$\frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi} \geq C_0 e^{-k_0|\xi|}, \quad |Q_0^{(\pm)}(\tau, \theta, t, \varepsilon)| \leq C'_0 e^{-k'_0|\xi|}, \tag{5}$$

где  $C_0, C'_0, k_0, k'_0$  – некоторые положительные константы.

Функции  $Q_1^{(\pm)}$  определяются из следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} Q_1^{(\pm)} &= r_1^{(\pm)}, \\ Q_1^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) &= 0, \quad Q_1^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) = 0, \\ r_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) &:= -\frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \xi}(\xi, \theta, t, \varepsilon) s(\lambda^*, \theta, t) + \xi \left( \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}_0^{(\pm)}}{\partial r}(\lambda^*, \theta, t) + \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial r} \right) + \bar{u}_1(\lambda^*, \theta, t) \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} + \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial \varepsilon}, \end{aligned} \tag{6}$$

где символы “~”, “\*” над и справа от функции означают, что ее значение берется при аргументе  $(Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t), \lambda^*, \theta, t, 0)$ .

Решение задач (6) представляется в явном виде (см., например, [13]):

$$Q_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = -\bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \frac{\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)} + \tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) \int_0^\xi (\tilde{v}^{(\pm)}(s, \theta, t, \varepsilon))^{-2} \int_{\pm\infty}^s \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \varepsilon) r_1^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \varepsilon) d\eta ds, \tag{7}$$

где

$$\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = \frac{\partial Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi},$$

причем  $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) > 0$  в рассматриваемой области. Для  $Q_1^{(\pm)}$  справедлива оценка

$$|Q_1^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)| < C_1 e^{-k_1|\xi|}, \tag{8}$$

где  $C_1, k_1$  – некоторые положительные константы.

Функции внутреннего переходного слоя более высоких порядков находятся из задач, аналогичных задачам для функций  $Q_1^{(\pm)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q_i^{(\pm)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} Q_i^{(\pm)} &= r_i^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon), \quad i = 2, 3, 4, \dots, \\ Q_i^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \bar{u}_i^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) &= 0, \quad Q_i^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где  $r_i^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$  – известные функции. В частности, для  $i = 2$  имеем

$$r_2^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) := -s_r(\lambda^*, \theta, t) \tilde{v}^{(\pm)} \xi - s(\lambda^*, \theta, t) \frac{\partial Q_1^{(\pm)}}{\partial \xi} -$$

$$- |\nabla \theta(\lambda^*, \theta, t)|^2 \left[ \left( \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \right)^2 \frac{\partial \tilde{v}^{(\pm)}}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \tilde{v}^{(\pm)}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} \tilde{v}^{(\pm)} + \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial \theta^2} \right] - \Delta \theta(\lambda^*, \theta, t) \left( -\tilde{v}^{(\pm)} \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \theta} \right) +$$

$$+ \frac{\partial \theta \partial Q_0^{(\pm)}}{\partial t \partial \theta} + \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial t} - \left( \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \right) \tilde{v}^{(\pm)} + g_2^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon). \quad (10)$$

Здесь  $g_2^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$  – коэффициент при  $\varepsilon^2$ , стоящий в разложении выражения

$$f^{(\pm)}(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda^* + \varepsilon \xi, \theta, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon), \lambda^* + \varepsilon \xi, \theta, t, \varepsilon) - f^{(\pm)}(\bar{u}^{(\pm)}(\lambda^* + \varepsilon i, \theta, t, \varepsilon), \lambda^* + \varepsilon i, \theta, t, \varepsilon)$$

по степеням  $\varepsilon$ .

**Замечание 1.** Заметим, что из вида уравнения (4) следует, что в функциях  $Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$ ,  $\tilde{v}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)$ , считая  $\theta, t, \lambda^*$  параметрами, мы можем перейти к другому набору аргументов  $(\xi, \theta, t, \lambda^*)$ . В дальнейшем мы будем пользоваться обоими наборами аргументов, для каждого конкретного случая выбирая наиболее удобный.

Заметим, что формально  $Q$ -функции определены для  $\tau \in R$ , однако фактически они имеют смысл только при  $|\tau| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$ . Для их гладкого продолжения на всю область  $D$  применяется стандартный прием использования срезающих функций (см., например, [15]).

Таким образом, формальное построение асимптотики решения с внутренним переходным слоем для задачи завершено. Перейдем к определению локализации внутреннего переходного слоя.

### 2.2. Асимптотическое разложение для кривой переходного слоя

Важнейшая проблема построения асимптотики – это нахождение разложения по малым  $\varepsilon$  для кривой перехода  $C(t, \varepsilon)$ . Нулевой порядок задается кривой  $C_0(t)$ , а следующие порядки – функциями  $\lambda_i(t, \theta)$  в уравнении (2). Для их нахождения используется условие  $C^1$ -сшивания. Непрерывность асимптотики  $U$  на кривой выполняется за счет согласованности асимптотик  $U^{(-)}$  и  $U^{(+)}$ . Потребуем также непрерывности первых производных асимптотики на этой кривой (условие  $C^1$ -сшивания):

$$\varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial r} \Big|_{r=\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)} - \varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial r} \Big|_{r=\lambda^*(\theta, t, \varepsilon)} = 0. \quad (11)$$

Подставляя асимптотическое разложение (3) в условие (11), получаем

$$\frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} +$$

$$+ \varepsilon \left( \frac{\partial \bar{u}_0^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \bar{u}_0^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right) \right) +$$

$$+ \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right) \right) + \dots = 0. \quad (12)$$

Рассмотрим выражение при  $\varepsilon^0$ :

$$H(\lambda^*, \theta, t) := \frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}.$$

Введем функции

$$\tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda^*) := \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) + Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda^*),$$

которые, согласно (4), являются решениями задач

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} = \tilde{f}_*^{(\pm)}, \tag{13}$$

$$\tilde{u}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*) = 0, \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \lambda^*) = \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t),$$

где символы “~”, “\*” над и справа от функции означают, что ее значение берется при аргументе  $(Q_0^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda^*) + \bar{u}_0^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t), \lambda^*, \theta, t, 0)$ .

Функция  $H$  в обозначениях  $\tilde{u}^{(\pm)}$  имеет вид:

$$H(\lambda^*, \theta, t) = \frac{\partial \tilde{u}^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}. \tag{14}$$

Пусть

$$G_1(\lambda^*, \theta, t) := \frac{\partial \bar{u}_0^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \bar{u}_0^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_1^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right),$$

$$G_i(\varepsilon, \theta, t) := \frac{\partial \bar{u}_{i-1}^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_i^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \bar{u}_{i-1}^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_i^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right), \quad i = 2, 3, \dots,$$

разложим теперь (11) в ряд по степеням  $\varepsilon$ , используя (2):

$$H(0, \theta, t) + \varepsilon \left( \frac{\partial H}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^*=0} \lambda_1(\theta, t) + G_1 \Big|_{\varepsilon=0} \right) +$$

$$+ \varepsilon^2 \left( \frac{\lambda_1^2(\theta, t)}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^{*2}} \Big|_{\lambda^*=0} + \lambda_2(\theta, t) \frac{\partial H}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^*=0} + \lambda_1(\theta, t) \frac{\partial G_1}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^*=0} + G_2 \Big|_{\varepsilon=0} \right) + \dots = 0. \tag{15}$$

Стандартным образом понижая порядок в уравнении (13), можно получить следующие выражения:

$$(\tilde{v}^{(+)}(\xi, \theta, t, \lambda^*))^2 = 2 \int_{\varphi^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}^0 f^{(+)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du,$$

$$(\tilde{v}^{(-)}(\xi, \theta, t, \lambda^*))^2 = 2 \int_{\varphi^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}^0 f^{(-)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du. \tag{16}$$

Можно показать, используя (13), что справедливо следующее представление для  $H$ :

$$H(\lambda^*, \theta, t) =$$

$$= - \frac{2}{\frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}} \left( \int_{\varphi^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}^0 f^{(-)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du + \int_0^{\varphi^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)} f^{(+)}(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du \right) = \tag{17}$$

$$= - \frac{2}{\frac{\partial Q_0^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_0^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi}} \int_{\varphi^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}^{\varphi^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)} f(u, \lambda^*, \theta, t, 0) du.$$

Введем функцию

$$I(x, y, t) := \int_{\varphi^{(-)}(x, y, t)}^{\varphi^{(+)}(x, y, t)} f(u, x, y, t, 0) du. \tag{18}$$

Оказывается, что построение асимптотики для кривой перехода зависит существенным образом от свойств функции  $I(x, y, t)$ . В данной работе рассматриваются случаи баланса и отсутствия баланса реакции. О том, какие требования предъявляются при этом для функции  $I$ , будет сказано ниже. Отметим, что построение асимптотики для решения одинаково для этих обоих случаев.

2.3. *Случай несбалансированной реакции*

Рассмотрим вначале так называемый случай *несбалансированной реакции*. Ему отвечает следующее требование:

**(A4)** Пусть существует кривая  $C_0(t) \in \{\bar{C}\}$  такая, что  $I(r, \theta, t)|_{r=0} = 0, \theta \in [0, \theta_0], t \in R$ , где  $[0, \theta_0]$  — это область изменения координаты  $\theta$ .

В дальнейшем нам также понадобится условие, накладывающее ограничение на выбор кривой  $C_0(t)$ .

**(A5)** Пусть для кривой  $C_0(t)$  имеет место неравенство

$$\left. \frac{\partial I(r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=0} < 0, \quad \theta \in [0, \theta_0], \quad t \in R.$$

Таким образом, кривая  $C_0(t)$  определена. В силу условия **(A4)** имеем

$$\tilde{v}^{(-)}(0, \theta, t, 0) = \tilde{v}^{(+)}(0, \theta, t, 0), \tag{19}$$

т.е.  $\tilde{v}(\xi, \theta, t, 0)$  — непрерывная по  $\xi$  функция в рассматриваемой области. Поэтому здесь и далее индекс  $(\pm)$  в выражениях для  $\tilde{v}(\xi, \theta, t, 0)$  можно опустить.

Определим член  $\lambda_1(\theta, t)$  в разложении (2). При  $\epsilon^1$  равенство (15) дает

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda^*} \lambda_1(\theta, t) + \hat{G}_1 = 0, \tag{20}$$

где символ “ $\wedge$ ” над функцией означает, что ее значение берется при аргументе  $(0, \theta, t)$ .

Преобразуем выражение при  $\epsilon$  в (12):

$$\begin{aligned} G_1(\lambda^*, \theta, t) = & \frac{\partial \varphi^{(+)}}{\partial r}(\lambda^* \theta, t) - \frac{\partial \varphi^{(-)}}{\partial r}(\lambda^*, \theta, t) + \left[ -\bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \frac{\tilde{v}_\xi^{(\pm)}(0, \theta, t, \epsilon)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \epsilon)} \right]^+ + \\ & + \left[ \frac{s(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*))^2 d\eta \right]^+ + \left[ -\frac{\frac{\partial \varphi^{(\pm)}}{\partial r}(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \eta \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta \right]^+ + \\ & + \left[ -\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \left( \eta \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial \epsilon} \right) d\eta \right]^+ + \left[ -\frac{\bar{u}_1(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta \right]^+. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь и далее выражение, заключенное в скобки вида  $[ ]^+$ , представляет собой разность функции, стоящей внутри скобок, взятой с индексом  $(+)$  и той же функции, но взятой с индексом  $(-)$ . Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta &= -f^{(\pm)}(0, \lambda^*, \theta, t, 0), \\ \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \eta \frac{\partial \tilde{f}_*^{(\pm)}}{\partial u} d\eta &= \tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*), \end{aligned}$$

а также

$$\tilde{v}_\xi^{(\pm)}(0, \theta, t, \epsilon) = f^{(\pm)}(0, \lambda^*, \theta, t, 0).$$



Таким образом, выражение для  $G_1(\lambda^*, \theta, t)$  принимает вид

$$G_1(\lambda^*, \theta, t) = \left[ \frac{s(\lambda^*, \theta, t)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} (\tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*))^2 d\eta \right]^+ + \left[ -\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) \left( \eta \frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{f}^{(\pm)}}{\partial \varepsilon} \right) d\eta \right]^+.$$

Подставляя это равенство в (20), с учетом (7) получаем уравнение для нахождения  $\lambda_1(\theta, t)$ :

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial r} \lambda_1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( -\tilde{v}(\tau, \theta, t, 0) \hat{s} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \tau + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{v}(\tau, \theta, t, 0) d\tau = 0, \tag{22}$$

где символ “~” над функцией означает, что ее значение берется при аргументе  $(\tilde{u}^{(\pm)}(\tau, \theta, t, 0), 0, \theta, t, 0)$ .

Уравнение (22) разрешимо в силу условия (A5), таким образом, коэффициент 1-го порядка в разложении (2) определен.

Выписывая уравнения, определяющие  $Q_i^{(\pm)}$ , и следующие приближения в соотношении (15), по стандартной схеме получаем алгебраические задачи для  $\lambda_i(\theta, t)$ :

$$\frac{\partial \hat{I}}{\partial r} \lambda_i + f_i = 0, \quad i \geq 1, \tag{23}$$

где  $f_i(\theta, t)$  – известные на  $i$ -м шаге функции.

Таким образом, указан способ определения всех неизвестных функций  $\lambda_i(\theta, t)$  для некритического случая.

#### 2.4. Случай баланса реакции

Случай баланса реакции имеет место, если выполнено следующее требование тождественного равенства нулю функции  $I$ :

(A'4) Пусть  $I \equiv 0, (x, y, t) \in D_t$ .

Это условие коренным образом отличает *сбалансированный*, или *критический*, случай от несбалансированного, поскольку, как будет видно далее, оно изменяет алгоритм построения асимптотики и несколько усложняет доказательство существования решения с построенной асимптотикой.

В отличие от некритического случая, в рассматриваемом критическом случае найти кривую  $C_0$ , зная лишь  $Q_0^{(\pm)}$ , не удастся. Действительно, в силу условия (A'4) получаем, что

$$\tilde{v}^{(+)}(0, \theta, t, r) - \tilde{v}^{(-)}(0, \theta, t, r) \equiv 0. \tag{24}$$

Следовательно, уравнения для определения положения кривой переходного слоя будут следовать из равенства нулю коэффициентов при степенях  $\varepsilon$  следующих порядков. Из (24) следует, что  $\tilde{v}^{(-)}(0, \theta, t, r) = \tilde{v}^{(+)}(0, \theta, t, r)$ , т.е.  $\tilde{v}(\xi, \theta, t, r)$  – непрерывная по  $\xi$  функция в рассматриваемой области. Поэтому здесь и далее индекс  $(\pm)$  в выражениях для  $\tilde{v}(\xi, \theta, r)$  можно опустить.

Преобразуем выражение при  $\varepsilon^2$  в (12), используя (10):

$$G_2(\varepsilon, \theta, t) := \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(+)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} - \left( \frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \frac{\partial Q_2^{(-)}(0, \theta, t, \lambda^*)}{\partial \xi} \right) = \\ = \frac{\partial \bar{u}_1^{(+)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} - \frac{\partial \bar{u}_1^{(-)}(\lambda^*, \theta, t)}{\partial r} + \left[ -\bar{u}_1^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \frac{\tilde{v}_\xi^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon)} \right]^+ +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ -\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) r_2^{(\pm)}(\eta, \theta, t, \lambda^*) d\eta \right]^+ = \\
 & = \left[ -\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \left( \frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} |\nabla \theta|^2 \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v} \left( 2|\nabla \theta|^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \Delta \theta \tilde{v} - \frac{\partial \theta}{\partial t} \tilde{v} \right) d\xi - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \int_0^{\pm\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \int_0^{\pm\infty} \tilde{v} h_2 d\xi \right) \right]^+ = -\frac{1}{\tilde{v}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*)} \left[ \frac{\partial^2 \lambda_1^*}{\partial \theta^2} |\nabla \theta(\lambda^*, \theta, t)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} \left( 2|\nabla \theta|^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \Delta \theta(\lambda^*, \theta, t) \tilde{v} - \frac{\partial \theta(\lambda^*, \theta, t)}{\partial t} \Big|_{x,y=\text{const}} \tilde{v} \right) d\xi - \frac{\partial \lambda_1^*}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} h_2 d\xi \right],
 \end{aligned} \tag{25}$$

где  $h_2(\lambda^*, \xi, \theta, t)$  – известная функция.

Разложим теперь (11) в ряд по степеням  $\varepsilon$ , используя (2) и учитывая (24):

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon G_1|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \left[ \lambda_1(\theta, t) \frac{\partial G_1}{\partial \lambda^*} \Big|_{\varepsilon=0} + G_2|_{\varepsilon=0} \right] + \\
 & + \varepsilon^3 \left[ \lambda_2(\theta, t) \frac{\partial G_1}{\partial \lambda^*} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \lambda_1^2(\theta, t) \frac{\partial^2 G_1}{\partial \lambda^{*2}} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial G_2}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + G_3|_{\varepsilon=0} \right] \dots = 0.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Теперь приравнявая к нулю коэффициент при  $\varepsilon$  в разложении (26), с учетом (21), получаем

$$- \left( \Delta \hat{r} - \frac{\partial \hat{r}}{\partial t} \Big|_{x,y=\text{const}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \theta, t, 0) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \xi + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{v}(\xi, \theta, t, 0) d\xi = 0, \tag{27}$$

где символ “ $\wedge$ ” над функцией означает, что ее значение берется при аргументе  $(0, \theta, t)$ .

Потребуем выполнение условия

**(A'5)** Пусть существует кривая  $C_0(t) \in \{\bar{C}(t)\}$ , удовлетворяющая уравнению (27).

Таким образом, уравнение для нахождения кривой переходного слоя в нулевом приближении получено. Теперь определим коэффициент  $\lambda_1$ . Для этого приравняем к нулю член при  $\varepsilon$  в разложении (26). Используя (25), получаем уравнение для нахождения  $\lambda_1(\theta, t)$ :

$$-\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} m(\theta, t) + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta^2} a(\theta, t) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} b(\theta, t) + \lambda_1 c(\theta, t) = g_1(\theta, t), \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}
 m(\theta, t) & := \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \theta, t, 0), \quad a(\theta, t) := |\nabla \hat{\theta}|^2 m(\theta, t), \\
 b(\theta, t) & := \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} \left( 2|\nabla \theta|^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \theta} + \Delta \theta(\lambda^*, \theta, t) \tilde{v} - \frac{\partial \theta(\lambda^*, \theta, t)}{\partial t} \Big|_{x,y=\text{const}} \tilde{v} \right) d\xi, \\
 c(\theta, t) & := \frac{\partial \left[ - \left( \Delta r - \frac{\partial r}{\partial t} \Big|_{x,y=\text{const}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2 d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \xi + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \right) \tilde{v} d\xi \right]}{\partial \lambda^*} \Big|_{\lambda^*=0}, \quad g_1(\theta, t) := - \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v} h_2 d\xi.
 \end{aligned}$$

Разделив уравнение для  $\lambda_1$  (28) на коэффициент при производной по времени  $m(\theta, t) > 0$ , получим

$$-\frac{\partial \lambda_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial \theta^2} \tilde{a}(\theta, t) + \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta} \tilde{b}(\theta, t) + \lambda_1 \tilde{c}(\theta, t) = \tilde{g}_1(\theta, t), \tag{29}$$

где  $\tilde{a}(\theta, t) = \frac{a(\theta, t)}{m(\theta, t)}$  и т.д.

Пусть функции  $\tilde{\beta}(t)$  и  $\tilde{\alpha}(t)$  определяются из уравнений

$$\frac{d\tilde{\beta}}{dt} - \bar{c}(t)\tilde{\beta} = p, \quad \frac{d\tilde{\alpha}}{dt} - \bar{c}(t)\tilde{\alpha} = -p, \tag{30}$$

где  $\bar{c}(t) = \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \tilde{c}(\theta, t)$ ,  $p$  – некоторая константа, значение которой будет определено далее.

Пусть выполнены дополнительные условия:  $\tilde{\beta}(t) = \tilde{\beta}(t + T)$ ,  $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t + T)$ .

Введем в рассмотрение оператор

$$L := -\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{a}(\theta, t)\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \tilde{b}(\theta, t)\frac{\partial}{\partial \theta} + \tilde{c}(\theta, t) - \tilde{g}_1(\theta, t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} L[\tilde{\beta}] &= -\frac{\partial \tilde{\beta}}{\partial t} + \tilde{\beta}\tilde{c}(\theta, t) - \tilde{g}_1(\theta, t) = -p + (\tilde{c}(\theta, t) - \bar{c}(t))\tilde{\beta} - \tilde{g}_1(\theta, t), \\ L[\tilde{\alpha}] &= -\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial t} + \tilde{\alpha}\tilde{c}(\theta, t) - \tilde{g}_1(\theta, t) = p + (\tilde{c}(\theta, t) - \bar{c}(t))\tilde{\alpha} - \tilde{g}_1(\theta, t). \end{aligned}$$

Функции  $\tilde{\beta}(t)$  и  $\tilde{\alpha}(t)$  могут быть найдены в явном виде:

$$\tilde{\beta}(t) = \Phi(t)\tilde{\beta}_0 + \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)p ds, \quad \tilde{\alpha}(t) = \Phi(t)\tilde{\alpha}_0 - \Phi(t)\int_0^t \Phi^{-1}(s)p ds, \tag{31}$$

где

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{\Phi(T)}{1 - \Phi(T)}\int_0^T \Phi^{-1}(s)p ds, \quad \tilde{\alpha}_0 = -\frac{\Phi(T)}{1 - \Phi(T)}\int_0^T \Phi^{-1}(s)p ds, \quad \Phi(t) = \exp\left(\int_0^t \bar{c}(\tau)d\tau\right).$$

Нам потребуется условие

**(A'6)** Пусть  $\int_0^T \bar{c}(\tau)d\tau < 0$  для  $t \in R$ .

Для постановки задачи для нахождения  $\lambda_1(\theta, t)$  нам не хватает следующих периодических граничных условий:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta, t) &= \lambda_1(\theta, t + T), \quad \lambda_1(\theta, t) = \lambda_1(\theta + \Theta_0, t), \\ \frac{\partial \lambda_1(\theta, t)}{\partial \theta} &= \frac{\partial \lambda_1(\theta + \Theta_0, t)}{\partial \theta}, \quad t \in R, \quad \theta \in R. \end{aligned} \tag{32}$$

Уравнение (28) с граничными условиями (32) имеет единственное решение в силу условия **(A'6)**. В этом легко убедиться, взяв в качестве верхнего решения функцию  $\tilde{\beta}(t)$ , а в качестве нижнего решения  $\tilde{\alpha}(t)$ . Действительно, в силу условия **(A'6)** имеем  $\tilde{\beta}(t) > 0$ ,  $\tilde{\alpha}(t) < 0$ ,  $\tilde{c}(\theta, t) - \bar{c}(t) \leq 0$  для  $t \in R$ . Выберем константу

$$p > \max_{\theta \in [0, 2\pi), t \in R} |\tilde{g}_1(\theta, t)|.$$

В итоге получаем, что  $L[\beta(t)] < 0$ ,  $L[\alpha(t)] > 0$ ,  $t \in R$ , а упорядоченность верхнего и нижнего решения выполнена автоматически. Таким образом, коэффициент  $\lambda_1$  в разложении (2) определен.

Выписывая уравнения, определяющие  $Q_i^{(\pm)}$ , и следующие приближения в соотношении (26), получаем задачи для  $\lambda_i(\theta, t)$ :

$$-\frac{\partial \lambda_i}{\partial t} m(\theta, t) + \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \theta^2} a(\theta, t) + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta} b(\theta, t) + \lambda_i c(\theta, t) = g_i(\theta, t), \tag{33}$$

где  $g_i(\theta, t)$  – известные на  $i$ -м шаге  $T$ -периодические функции  $t$ . Эти задачи с соответствующими граничными условиями также однозначно разрешимы в силу условия **(A'6)**.

Таким образом, формальная асимптотика для кривой перехода в критическом случае полностью построена.

**Замечание 2.** В отличие от случая нелинейности кубического типа (см., например, [10]), в рассматриваемом случае разрывной реакции на фазовой плоскости  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  сепаратриса, соединяющая точки покоя типа седло  $\varphi^{(-)}$  и  $\varphi^{(+)}$ , оказывается негладкой кривой. Действительно,

$$\left. \frac{d\tilde{v}^{(+)}}{d\tilde{u}^{(+)}} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{d\tilde{v}^{(-)}}{d\tilde{u}^{(-)}} \right|_{\xi=0} = \left. \frac{\tilde{f}_*^{(+)}}{\tilde{v}^{(+)}} \right|_{\xi=0} - \left. \frac{\tilde{f}_*^{(-)}}{\tilde{v}^{(-)}} \right|_{\xi=0} = \frac{f(0+0, 0, \theta, t, 0) - f(0-0, 0, \theta, t, 0)}{\tilde{v}} < 0.$$

(См. далее пример в п. 6.2 и иллюстрацию к нему на фиг. 3б.)

### 3. ОБОСНОВАНИЕ ПОСТРОЕННОЙ АСИМПТОТИКИ

Обозначим через  $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$  частичные суммы порядка  $n$  построенных асимптотических рядов, в которых аргумент  $\xi$  у  $Q$ -функций заменен на

$$\xi_{n+1} = \left( r - \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \lambda_i(\theta, t) \right) / \varepsilon,$$

а  $\lambda^*$  на

$$\lambda_{n+1}^* = \sum_{i=1}^{n+1} \varepsilon^i \lambda_i(\theta, t),$$

найденные по алгоритму, изложенному в п. 2.3 для некритического и п. 2.4 для критического случаев. В подобластях  $\bar{D}_n^{(-)}$  и  $\bar{D}_n^{(+)}$ , на которые область  $\bar{D}$  разделяется кривой  $r = \lambda_{n+1}^*$ , при построении  $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$  используются функции  $Q^{(-)}$  и  $Q^{(+)}$  соответственно.

В этом пункте проводится доказательство существования решения задачи (1), близкого к построенной асимптотике  $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$ . Отметим, что для достижения близости порядка  $O(\varepsilon^{n+1})$  в двух рассматриваемых случаях требуется строить верхние и нижние барьеры различных порядков (см. далее). Но, поскольку они в обоих случаях отвечают асимптотике  $U_n^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon)$ , за ними условимся сохранять индекс  $n$ .

Сформулируем и докажем соответствующие теоремы для каждого случая.

#### 3.1. Несбалансированный случай

**Теорема 1.** Если выполнены условия (A1)–(A5), то при достаточно малых  $\varepsilon$  существует решение  $u(x, y, t, \varepsilon)$  задачи (1), причем имеет место оценка

$$|U_n(x, y, t, \varepsilon, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Для доказательства этого утверждения воспользуемся асимптотическим методом дифференциальных неравенств. Заметим, что функция  $f$  в силу наложенных на нее условий (A1)–(A3) имеет в точке  $u = 0$  скачок определенного знака:  $f(0+0, x, y, t, \varepsilon) - f(0-0, x, y, t, \varepsilon) \leq 0$ . Эта функция, очевидно, является каратеодориевой и для нее справедлив результат работ [16], [17] и их развития на случай разрывного источника в [18]. Верхнее и нижнее решения задачи (1) будем строить путем модификации членов асимптотического ряда аналогично тому, как это делалось в [10]:

$$\begin{aligned} \beta_n(x, y, t, \varepsilon) &= \bar{u}_0^{(\pm)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x, y, t) + \dots + \varepsilon^{n+2} \bar{u}_{n+2}^{(\pm)}(x, y, t) + Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \lambda_{n\beta}) + \\ &+ \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n+2} q^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) + \Pi_\beta(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\gamma + Q_{n+2}^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon)), \end{aligned} \tag{34}$$

где  $\lambda_{n\beta}(\theta, t, \varepsilon) = \lambda_{n+1}^*(\theta, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\lambda_{n+2}(\theta, t, \varepsilon) - \delta_0)$ ,  $\xi_\beta = (x - \lambda_{n\beta}(\theta, t, \varepsilon))/\varepsilon$ ,  $\gamma > 0$  – постоянная, обеспечивающая выполнение необходимого дифференциального неравенства,  $\delta_0 > 0$  – константа, обеспечивающая неравенства для скачка производных на кривой переходного слоя. Функции

$Q_i^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon)$  определяются из задач (9), где  $\lambda^*$  заменена на  $\lambda_{n\beta}$ . Функции  $q_\beta^{(\pm)}$  необходимы для компенсации изменений, вносимой постоянной  $\gamma$ , и определяются из задач

$$\frac{\partial^2 q_\beta^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon)}{\partial \xi^2} - \frac{\partial f}{\partial u}(u_\beta^{(\pm)}, \lambda_{n\beta}, \theta, t, 0)q_\beta^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \varepsilon) = r_\beta(\xi, \theta, t, \varepsilon), \tag{35}$$

$$q_\beta^{(\pm)}(0, \theta, t, \varepsilon) + \gamma = 0, \quad q_\beta^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \varepsilon) = 0,$$

где

$$\tilde{u}_\beta^{(\pm)} = \tilde{u}^{(\pm)}(\xi, \theta, t, \lambda_\beta), \quad r_\beta(\xi, t, \varepsilon) = \gamma \left( \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{u}_\beta^{(\pm)}, \lambda_{n\beta}, t, 0) - \frac{\partial f}{\partial u}(\varphi^{(\pm)}, \lambda_{n\beta}, t, 0) \right). \tag{36}$$

Функции  $\Pi_\beta$  обеспечивают выполнение необходимых дифференциальных неравенств вблизи границы  $\Gamma$  (их построение рассматривается, например, в [13]). Здесь для функций асимптотики во внутренней относительно кривой  $C_\beta(t, \varepsilon) : \{r = \lambda_\beta(t, \theta, \varepsilon)\}$  области используем обозначение (+), а во внешней – (–). Нижнее решение  $\alpha_n(x, y, t, \varepsilon)$  имеет аналогичную структуру.

Необходимые дифференциальные неравенства проверяются прямым вычислением, аналогично работе [19]. Для верхнего решения имеем

$$N_\varepsilon \beta_n = \varepsilon^2 \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \beta_n - f(\beta_n, x, y, t, \varepsilon) = -\varepsilon^{n+2} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \gamma + O(\varepsilon^{n+3}),$$

где черта над функцией означает, что ее значение берется при аргументе  $(u_0, 0, \theta, t, 0)$ . В силу условия (A3) при достаточно малом  $\varepsilon$  при любом  $\gamma > 0$  имеем  $N_\varepsilon \beta_n < 0$ .

Аналогичные неравенства вблизи границы выполняются за счет модификации погранслойных функций (см., например, [13]) и их проверка в данной работе не рассматривается.

Доказательство упорядоченности верхнего и нижнего решений, т.е. неравенства  $\beta_n(x, y, t, \varepsilon) \geq \alpha_n(x, y, t, \varepsilon)$ , а также неравенства для скачка производной:

$$\left( \frac{\partial \beta_n^+}{\partial r} - \frac{\partial \beta_n^-}{\partial r} \right) \Big|_r = \varepsilon^{n+2} \frac{1}{\tilde{v}(0, \theta, t, 0)} \left( \frac{\partial I(0, \theta, t)}{\partial r} \delta_0 - \gamma B(\theta, t) \right) < 0,$$

$$B(\theta, t) := \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{f}_u - \bar{f}_u) \tilde{v}(\xi, \theta, t, 0) d\xi$$

(и аналогичного неравенства для  $\alpha_n$ ) проводится так же, как в работе [19], причем для последнего существенно условие (A5).

Из известных теорем сравнения следует существование решения задачи (1), удовлетворяющего неравенству  $\alpha_n(x, y, t, \varepsilon) \leq u(x, y, t, \varepsilon) \leq \beta_n(x, y, t, \varepsilon)$ , причем, как следует из построения,  $\alpha_n(x, y, t, \varepsilon) - \beta_n(x, y, t, \varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ , откуда и получаем утверждение теоремы.

### 3.2. Критический случай

**Теорема 2.** Если выполнены условия (A1)–(A3), (A'4)–(A'6), то при достаточно малых  $\varepsilon$  существует решение  $u(x, y, t, \varepsilon)$  задачи (1), причем имеет место оценка

$$|U_n(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| < C\varepsilon^{n+1}, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R.$$

**Доказательство.** Как и в предыдущем пункте, асимптотический метод дифференциальных неравенств позволяет обосновать построенную асимптотику. Верхнее и нижнее решения задачи (1) будем строить путем модификации членов асимптотического ряда в виде

$$\mathfrak{B}_n(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}_0^{(\pm)}(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1^{(\pm)}(x, y, t) + \dots + \varepsilon^{n+3} \bar{u}_{n+3}^{(\pm)}(x, y, t) + Q_0^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \lambda_{n\beta}) +$$

$$+ \varepsilon Q_1^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) + \dots + \varepsilon^{n+3} Q_{n+3}^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon) + \Pi_{\mathfrak{B}}(\tau, \theta_\Gamma, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+3} (\gamma + q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}(\xi_\beta, \theta, t, \varepsilon)),$$

где  $\lambda_{n\mathfrak{B}}(\theta, t, \varepsilon) = \lambda_n^*(\theta, t, \varepsilon) + \varepsilon^{n+2}(\lambda_{n+2}(\theta, t) - \nu)$ ,  $\xi_{\mathfrak{B}} = (x - \lambda_{n\mathfrak{B}}(\theta, t, \varepsilon))/\varepsilon, \gamma > 0$  – некоторая постоянная, обеспечивающая выполнение необходимого дифференциального неравенства,  $\nu(x, y, t) > 0$  – функция, обеспечивающая неравенства для скачка производных на кривой переходного слоя,

которая будет уточнена ниже. Функции  $q_{\mathfrak{B}}^{(\pm)}$  необходимы для компенсации изменений, вносимой постоянной  $\gamma$  и определяются из задач (35), в которых  $\lambda_{n\beta}$  заменена на  $\lambda_{n\mathfrak{B}}$ . Функции  $\Pi_{\mathfrak{B}}$  обеспечивают выполнение необходимых дифференциальных неравенств вблизи границы  $\Gamma$ , они такие же, как и в представлении (34). Здесь для функций асимптотики во внутренней относительно замкнутой кривой  $C_{\mathfrak{B}}(t, \epsilon): r = \lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \epsilon)$  области используем обозначение (+), а во внешней – (-). Нижнее решение  $\mathfrak{U}_n(x, y, t, \epsilon)$  имеет аналогичную структуру.

Необходимые дифференциальные неравенства проверяются прямым вычислением:

$$N_{\epsilon}\mathfrak{B}_n = \epsilon^2 \left( \Delta - \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathfrak{B}_n - f(\mathfrak{B}_n, x, y, t, \epsilon) = -\epsilon^{n+3} \frac{\partial \bar{f}}{\partial u} \gamma + O(\epsilon^{n+4}).$$

В силу условия (A3) при достаточно малом  $\epsilon$  при любом  $\gamma > 0$  имеем  $N_{\epsilon}\mathfrak{B}_n < 0$ .

Доказательство упорядоченности выполняется совершенно аналогично тому, как это было сделано в работе [20].

Для доказательства теоремы остается проверить условие для скачка производной.

Обозначим через

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(-)}(\lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \epsilon), \theta, t, \epsilon)}{\partial r}, \quad \frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(+)}(\lambda_{n\beta}(t, \theta, \epsilon), \theta, t, \epsilon)}{\partial r}$$

предельные значения производных по разные стороны от кривой  $r = \lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \epsilon)$ . Тогда получим

$$\begin{aligned} & \epsilon \left( \frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(+)}(\lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \epsilon), \theta, t, \epsilon)}{\partial r} - \frac{\partial \mathfrak{B}_n^{(-)}(\lambda_{n\mathfrak{B}}(t, \theta, \epsilon), \theta, t, \epsilon)}{\partial r} \right) = \\ & = \frac{\epsilon^{n+3}}{\tilde{v}(0, \theta, t, 0)} \left( -\frac{dv}{dt} m(t) + a(\theta, t) \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + b(\theta, t) \frac{\partial v}{\partial \theta} + c(t)v - \gamma B(\theta, t) \right) + O(\epsilon^{n+4}). \end{aligned} \tag{37}$$

Пусть  $v(x, y, t) = \tilde{\beta}(t) > 0$  (функция  $\tilde{\beta}(t)$  определена в (30)). Очевидно, что условие (A'6) обеспечивает отрицательный знак скачка производной в (37).

Все соответствующие неравенства для нижнего решения  $\mathfrak{U}_n(x, t, \epsilon)$  проверяются аналогично.

Таким образом, все необходимые условия известных теорем о дифференциальных неравенствах выполнены, а значит, существует решение задачи (1), удовлетворяющее неравенству  $\mathfrak{U}_n(x, y, t, \epsilon) \leq u(x, t, \epsilon) \leq \mathfrak{B}_n(x, y, t, \epsilon)$ , причем, как следует из построения,  $\mathfrak{U}_n(x, y, t, \epsilon) - \mathfrak{B}_n(x, y, t, \epsilon) = O(\epsilon^{n+1})$ , что и влечет за собой утверждение теоремы.

#### 4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ

Периодические решения задачи (1) можно рассматривать как решения соответствующей начально-краевой задачи на полубесконечном промежутке времени:

$$\begin{aligned} N_{\epsilon}(v) & := \epsilon^2 \left( \Delta v - \frac{\partial v}{\partial t} \right) - f(v, x, y, t, \epsilon) = 0, \\ (x, y, t) & \in D_{t+} := \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, 0 < t < \infty\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma}}(x, y, t, \epsilon) & = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad 0 < t < \infty, \\ v(x, y, 0, \epsilon) & = v^0(x, y, \epsilon), \quad (x, y) \in D. \end{aligned} \tag{38}$$

Очевидно, что если  $v^0(x, y, \epsilon) = u(x, y, 0, \epsilon)$ , где  $u(x, y, t, \epsilon)$  – решение периодической задачи (1), то и задача (38) имеет решение  $v(x, y, t, \epsilon) = u(x, y, t, \epsilon)$ . Исследование его устойчивости основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств. Будем искать верхнее и нижнее решения задачи (38) в виде  $\alpha(x, y, t, \epsilon) = u(x, y, t, \epsilon) + e^{-\Lambda(\epsilon)t}(\alpha_n(x, y, t, \epsilon) - u(x, y, t, \epsilon))$ ,  $\beta(x, y, t, \epsilon) = u(x, y, t, \epsilon) + e^{-\Lambda(\epsilon)t}(\beta_n(x, y, t, \epsilon) - u(x, y, t, \epsilon))$ , где  $\Lambda(\epsilon) > 0$  будет указана ниже. Очевидно, что  $\alpha < \beta$ , и для проверки классических теорем о дифференциальных неравенствах для параболических систем из [21] достаточно показать, что  $N_{\epsilon}\beta < 0$ ,  $N_{\epsilon}\alpha > 0$ . Подставляя указанные выше выражения для функций  $\alpha$  и  $\beta$  и учитывая, что  $u$  является решением уравнения (1), нетрудно получить требуемые неравенства как для не критического, так и для критического случаев. Например, выра-

жение для  $N_\varepsilon \beta$  преобразуется к такому виду (для краткости в следующих формулах все аргументы у функций  $f, f_u$  опущены, кроме первого):

$$N_\varepsilon \beta = e^{-\Lambda t} \left\{ \left[ \varepsilon^2 \left( -\frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \Delta \beta_n \right) - f(\beta_n) \right] + \left[ \varepsilon^2 \left( -\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u \right) - f(u) \right] + [f(\beta_n) - f(u) - f_u^*(\beta_n - u)] + \varepsilon^2 \Lambda(\beta_n - u) \right\}.$$

Здесь символ “\*” справа от функции означает, что ее значение берется при аргументе  $u(x, y, t, \varepsilon) + \theta e^{-\Lambda(\varepsilon)t} (\alpha_n(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon))$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Проведем оценки для каждого случая.

В несбалансированном случае воспользуемся тем, что

$$\varepsilon^2 \left( -\frac{\partial \beta_n}{\partial t} + \Delta \beta_n \right) - f(\beta_n) = -\gamma f_u \varepsilon^{n+2} + O(\varepsilon^{n+3}),$$

где  $\gamma > 0$ ,  $\beta_n - u = O(\varepsilon^{n+1})$ ,  $f(\beta_n) - f(u) - f_u^*(\beta_n - u) = O(\varepsilon^{2n+2})$  и выбирая  $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0$ , а  $\gamma$  достаточно большим, получаем

$$N_\varepsilon \beta = e^{-\Lambda_0 t} (-\gamma f_u \varepsilon^{n+2} + O(\varepsilon^{2n+2}) + \Lambda_0 O(\varepsilon^{n+3})) < 0$$

при  $n \geq 0$ . Аналогично проверяется неравенство  $N_\varepsilon \alpha > 0$ . Таким образом, в некритическом случае построенное выше периодическое решение устойчиво с областью влияния, по крайней мере,  $[\alpha_0(x, y, 0, \varepsilon), \beta_0(x, y, 0, \varepsilon)]$ , ширина этой области составляет величину порядка  $O(\varepsilon^1)$ .

В критическом случае проведем аналогичные оценки:

$$\varepsilon^2 \left( -\frac{\partial \mathfrak{B}_n}{\partial t} + \Delta \mathfrak{B}_n \right) - f(\mathfrak{B}_n) = -\gamma f_u \varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{n+4}),$$

где  $\gamma > 0$ ,  $\mathfrak{B}_n - u = O(\varepsilon^{n+1})$ ,  $f(\mathfrak{B}_n) - f(u) - f_u^*(\mathfrak{B}_n - u) = O(\varepsilon^{2n+2})$ . Выбирая  $\Lambda(\varepsilon) = \Lambda_0$  достаточно малым, а  $\gamma$  достаточно большим, получаем

$$N_\varepsilon \mathfrak{B} = e^{-\Lambda_0 t} (-\gamma f_u \varepsilon^{n+3} + O(\varepsilon^{2n+2}) + \Lambda_0 O(\varepsilon^{n+3})) < 0$$

при  $n \geq 1$ . Аналогично проверяется неравенство  $N_\varepsilon \mathfrak{A} > 0$ . Итак, построенное выше периодическое решение устойчиво с областью влияния, по крайней мере,  $[\mathfrak{A}_1(x, y, 0, \varepsilon), \mathfrak{B}_1(x, y, 0, \varepsilon)]$ , ширина этой области – величина порядка  $O(\varepsilon^2)$ .

Таким образом, справедливы следующие теоремы.

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия (A1)–(A5). Тогда решение  $u(x, y, t, \varepsilon)$  задачи (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости, по крайней мере,  $[\alpha_0(x, y, 0, \varepsilon), \beta_0(x, y, 0, \varepsilon)]$ , и, следовательно,  $u(x, y, t, \varepsilon)$  – единственное решение задачи (1) в этой области.

**Теорема 4.** Пусть выполнены условия (A1)–(A3), (A'4)–(A'6). Тогда решение  $u(x, y, t, \varepsilon)$  задачи (1) асимптотически устойчиво по Ляпунову с областью устойчивости, по крайней мере,  $[\mathfrak{A}_1(x, y, 0, \varepsilon), \mathfrak{B}_1(x, y, 0, \varepsilon)]$ , и, следовательно,  $u(x, y, t, \varepsilon)$  – единственное решение задачи (1) в этой области.

## 5. ПРИМЕР ПЕРИОДИЧЕСКОЙ КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ТИПА СТУПЕНЬКИ

### 5.1. Несбалансированный случай

Рассмотрим задачу:

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t) = 0, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 100\}, \\ (x, y, t) &\in D_t := \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, t \in R\}, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma}(x, y, t, \varepsilon) &= 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in R, \\ u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in D, \quad t \in R, \end{aligned} \tag{39}$$

где

$$f(u, x, y, t) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t) = u - d^2(t), & \text{если } u \geq 0(x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u + x^2 + y^2, & \text{если } u < 0(x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R, \end{cases}$$

$d(t) > 0$  – некоторая  $T$  – периодическая функция.

Для задачи (39) получаем, что  $\varphi^{(-)}(x, y, t) = -(x^2 + y^2)$ ,  $\varphi^{(+)}(x, y, t) = d^2(t)$ , тогда

$$f(u, x, y, t) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t) = u - \varphi^{(+)}(x, y, t), & \text{если } u \geq 0(x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u - \varphi^{(-)}(x, y, t), & \text{если } u < 0(x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R. \end{cases}$$

В этом случае кривая  $C_0(t)$  – это окружность, описываемая уравнением  $x^2 + y^2 = d^2(t)$ , где  $d(t)$  – ее радиус. В самом деле, в локальной системе координат  $(r, \theta)$  для кривой  $C_0$ , где  $\theta \in [0, 2\pi)$  – угол между вектором  $\{x, y\}$  и осью  $x$ , имеем  $\varphi^{(-)} = -(r - d)^2$ ,

$$I(r, \theta, t) = \int_{\varphi^{(-)}(r, \theta, t)}^{\varphi^{(+)}(r, \theta, t)} f(u, r, \theta, t, 0) du = \int_{\varphi^{(-)}(r, \theta, t)}^0 (u - \varphi^{(-)}(r, \theta, t)) du + \int_0^{\varphi^{(+)}(r, \theta, t)} (u - \varphi^{(+)}(r, \theta, t)) du = \tag{40}$$

$$= -\frac{1}{2}[(\varphi^{(+)}(r, \theta, t))^2 - (\varphi^{(-)}(r, \theta, t))^2] = -\frac{1}{2}[(d(t))^4 - (r - d(t))^4],$$

откуда следует, что  $I(0, \theta, t) = 0$ , т.е. условие **(A4)** выполнено и  $C_0$  – действительно кривая переходного слоя. Далее, в выбранной локальной системе координат имеем

$$\left. \frac{\partial I(r, \theta, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial (\varphi^{(-)}(r, \theta, t))^2}{\partial r} \right|_{r=0} = -2(d(t))^3 < 0, \tag{41}$$

т.е. условие **(A5)** также выполнено. Задачи (13) для определения  $\tilde{u}^{(\pm)}$  примут вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^{(\pm)}}{\partial \xi^2} = u - \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t), \tag{42}$$

$$\tilde{u}^{(\pm)}(0, \theta, t, \lambda^*) = 0, \quad \tilde{u}^{(\pm)}(\pm\infty, \theta, t, \lambda^*) = \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t)$$

и имеют, как нетрудно убедиться, решения  $\tilde{u}^{(\pm)} = \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t)(1 - \exp(\mp \xi))$ . Тогда для функций  $\tilde{v}$  получим выражения  $\tilde{v}^{(\pm)} = \pm \varphi^{(\pm)}(\lambda^*, \theta, t) \exp(\mp \xi)$ .

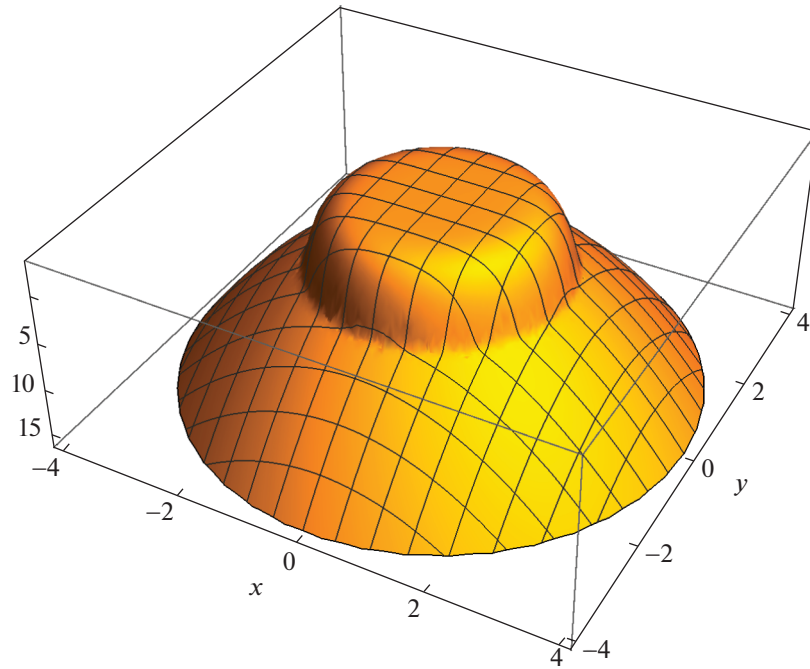
Тогда для асимптотики решения в нулевом порядке имеем выражение (пограничный слой в нулевом приближении отсутствует):

$$U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \varphi^{(\pm)}(x, y, t)(1 - \exp(\mp \xi_0)),$$

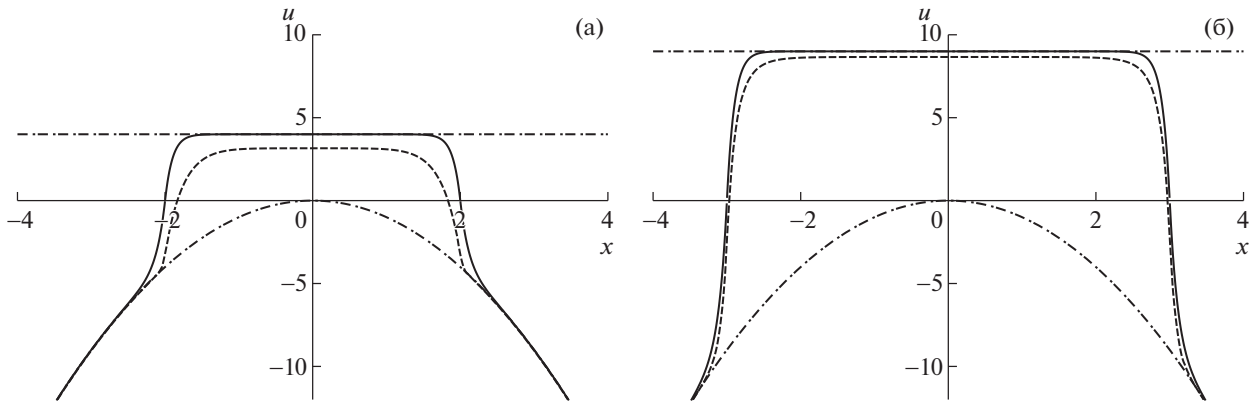
где  $\xi_0 = \frac{(d(t) - \sqrt{x^2 + y^2})}{\varepsilon}$ . Согласно теоремам 1 и 3, существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение  $u(x, y, t, \varepsilon)$  задачи (39) в виде контрастной структуры типа ступенька, для которого справедлива оценка  $|U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon)$ .

На фиг. 1, 2 и 3 изображены результаты численного эксперимента, проведенного с помощью программы “Wolfram Mathematica” при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T = 0.25$  и  $d(t) = 2 + \sin(8\pi t)$ . На фиг. 3а видно, что решение соответствующей начально-краевой задачи быстро выходит на периодическое решение.





Фиг. 1. Численное решение задачи (39) при  $t = 0$ .

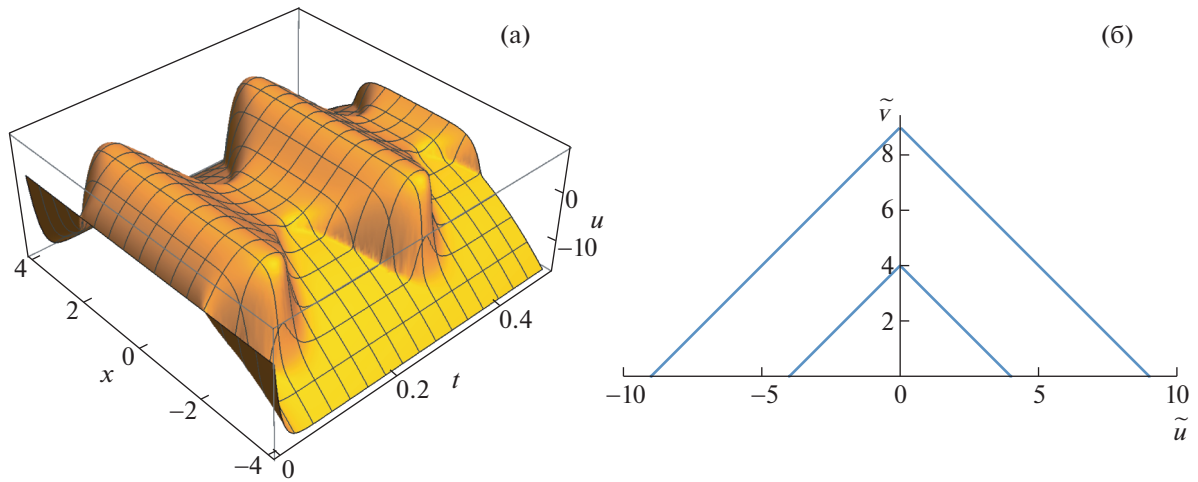


Фиг. 2. Асимптотика нулевого порядка (сплошная кривая) и численное решение (штриховая кривая) для задачи (39) в сечении плоскостью  $y = 0$  в моменты времени а)  $t = 0$ , б)  $t = T/4 = 1/16$ . Корни вырожденного уравнения  $\varphi^{(+)}$  и  $\varphi^{(-)}$  изображены штрихпунктирными линиями.

5.2. Случай баланса разрывной реакции

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned}
 N_\varepsilon(u) &:= \varepsilon^2 \left( \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} \right) - f(u, x, y, t, \varepsilon) = 0, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 100\}, \\
 (x, y, t) &\in D_t := \{(x, y, t) \in R^3 : (x, y) \in D, t \in R\}, \\
 \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} &(x, y, t, \varepsilon) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in R, \\
 u(x, y, t, \varepsilon) &= u(x, y, t + T, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R,
 \end{aligned}
 \tag{43}$$



**Фиг. 3.** (а) Численное решение начально-краевой задачи, соответствующей задаче (39), в сечении плоскостью  $y = 0$ . Начальное условие выбрано в виде функции  $v^0(x, y, t) \equiv 1$ . (б) Соединительная сепаратриса на фазовой плоскости  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ , соответствующей задаче (39) в моменты времени  $t = 0$  (нижний график) и  $t = T/4 = 1/16$  (верхний график).

где

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon) = u - A + \varepsilon w(x, y, t), & \text{если } u \geq 0 (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u + A, & \text{если } u < 0 (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R, \end{cases}$$

$A$  – положительная константа, а функция

$$w(t) = -\left(\frac{1}{d(t)} + \dot{d}(t)\right)A, \tag{44}$$

где  $d(t)$  – некоторая  $T$  – периодическая функция, например,  $d(t) = 5 + \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ . Для задачи (43)

получаем, что  $\varphi^{(-)}(x, y, t) = -A$ ,  $\varphi^{(+)}(x, y, t) = A$ , тогда

$$f(u, x, y, t, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(+)}(u, x, y, t, \varepsilon) = u - \varphi^{(+)} + \varepsilon w(x, y, t), & \text{если } u \geq 0 (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R; \\ f^{(-)}(u, x, y, t) = u - \varphi^{(-)}, & \text{если } u < 0 (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R. \end{cases}$$

В этом случае кривая  $C_0(t)$  – это окружность, описываемая уравнением  $x^2 + y^2 = d^2(t)$ , где  $d(t)$  – ее радиус. В самом деле, в локальной системе координат  $(r, \theta)$  для кривой  $C_0$ , где  $\theta \in [0, 2\pi)$  – угол между вектором  $\{x, y\}$  и осью  $x$ , имеем

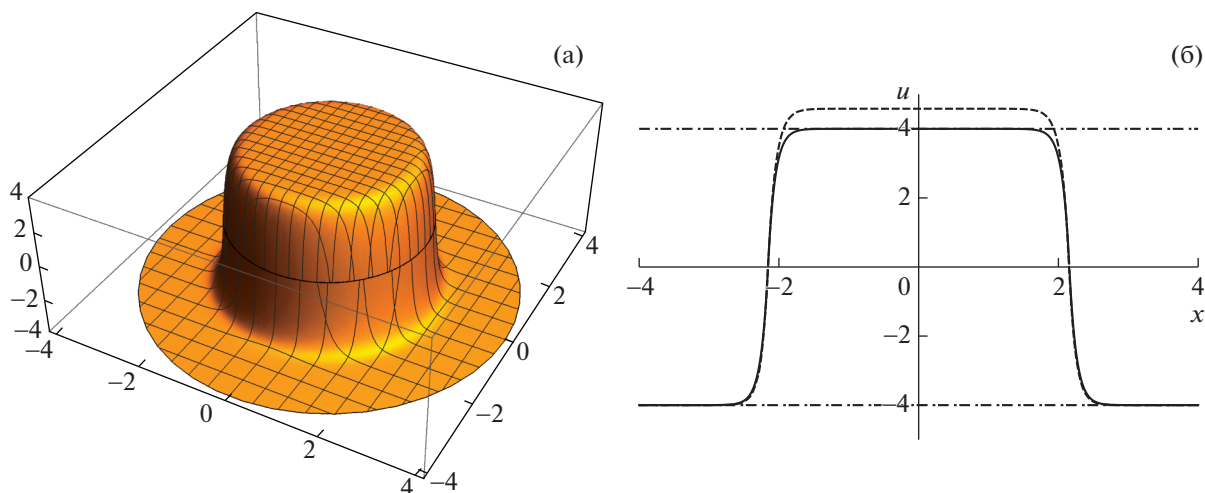
$$I(r, \theta, t) = \int_{\varphi^{(-)}(r, \theta, t)}^{\varphi^{(+)}(r, \theta, t)} f(u, r, \theta, t, 0) du = -\frac{1}{2} [(\varphi^{(+)}(r, \theta, t))^2 - (\varphi^{(-)}(r, \theta, t))^2] \equiv 0, \tag{45}$$

т.е. условие **(A'4)** выполнено.

Нетрудно убедиться, что  $\tilde{u}^{(\pm)} = \pm A(1 - \exp(\mp \xi))$ . Тогда для функций  $\tilde{v}$  получим выражения  $\tilde{v}^{(\pm)} = A \exp(\mp \xi)$ .

Далее, переходя к полярным координатам  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\theta$  и учитывая, что  $r = d(t) - R$ , получаем

$$\Delta r(r, \theta, t) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial}{\partial R} (d(t) - R) \right) = -1/R = \frac{1}{r - d(t)},$$



**Фиг. 4.** На графиках для момента времени  $t = \pi/20$  представлены (а) асимптотика нулевого порядка и (б) асимптотика нулевого порядка (сплошная кривая) и численное решение (штриховая кривая) для задачи (43) в сечении плоскостью  $y = 0$  (корни вырожденного уравнения  $\varphi^{(+)}$  и  $\varphi^{(-)}$  изображены штрихпунктирными линиями).

$$\left. \frac{\partial r}{\partial t} \right|_{x,y=\text{const}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( d(t) - \sqrt{x^2 + y^2} \right) = \dot{d}(t).$$

Далее, имеем

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{v}^2(\xi, \theta, t, 0) d\xi = A^2, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \equiv 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon} \tilde{v}(\xi, \theta, t, 0) d\xi = Aw(t),$$

откуда получаем равенство (27):

$$-\left( \frac{1}{-d(t)} - \dot{d}(t) \right) A^2 + Aw(t) = 0, \tag{46}$$

которое является верным в силу задания функции  $w(t)$  по формуле (44), т.е. условие **(A'5)** выполнено.

Далее, считаем коэффициент  $\tilde{c}(\theta, t)$ :

$$\tilde{c}(\theta, t) := \frac{1}{A^2} \left. \frac{\partial \left[ \left( \frac{1}{r-d(t)} - \dot{d}(t) \right) A^2 + Aw(t) \right]}{\partial r} \right|_{r=0} = -1/(d(t))^2 < 0.$$

Таким образом, условие **(A'6)** выполнено.

Тогда для асимптотики решения в нулевом порядке имеем выражение (пограничный слой в нулевом приближении отсутствует):

$$U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \pm A(1 - \exp(\mp \xi_0)),$$

где  $\xi_0 = \frac{d(t) - \sqrt{x^2 + y^2}}{\varepsilon}$ .

Согласно теоремам 2 и 4, существует асимптотически устойчивое по Ляпунову решение  $u(x, y, t, \varepsilon)$  задачи (39) в виде контрастной структуры типа ступенька, для которого справедлива оценка  $|U_0^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon)| = O(\varepsilon)$ .

На фиг. 4б изображены результаты численного эксперимента, проведенного с помощью программы “Wolfram Mathematica” при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $T = 2\pi$  и  $d(t) = 2 + \sin(t)$ .

Авторы благодарны В.Ф. Бутузову за ценные замечания при обсуждении данной работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Alikakos N.D., Bates P.W., Chen X.* Periodic traveling waves and locating oscillating patterns in multidimensional domains // *Trans. AMS.* 1999. V. 351. № 7. P. 2777–2805.
2. *Dancer E.N., Hess P.* Behaviour of a semi-linear periodic-parabolic problem when a parameter is small // *Lecture Notes in Math.* 1990. V. 1450. P. 12–19.
3. *Nefedov N.N.* Comparison Principle for Reaction-Diffusion-Advection Problems with Boundary and Internal Layers // *Lecture notes in Computer Science.* V. 8236. P. 62–72.
4. *Руденко О.В.* Линеаризуемое уравнение для волн в диссипативных средах с модульной, квадратичной и квадратично-кубической нелинейностями // *Докл. АН.* 2016. Т. 471. № 1. С. 23–27.
5. *Руденко О.В.* Модульные солитоны // *Докл. АН.* 2016. Т. 471. № 6. С. 451–454.
6. *Нефедов Н.Н., Руденко О.В.* О движении фронта в уравнении типа Бюргерса с квадратичной и модульной нелинейностью при нелинейном усилении // *Докл. АН.* 2018. Т. 478. № 3. С. 274–279.
7. *Hedberg C.M., Rudenko O.V.* Collisions, mutual losses and annihilation of pulses in a modular nonlinear medium // *Nonlinear Dyn.* 2017. V. 90. P. 2083–2091.
8. *Амбарцумян С.А.* Разномодульная теория упругости. М.: Наука, 1982. 318 с.
9. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // *Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН.* 2010. № 268. С. 268–283.
10. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and asymptotic stability of periodic solutions of the reaction–diffusion equations in the case of a rapid reaction // *Russian Journal of Mathematical Physics.* 2018. V. 25. № 1. P. 88–101.
11. *Орлов А.О., Нефедов Н.Н., Левашова Н.Т.* Решение вида контрастной структуры параболической задачи реакция-диффузия в среде с разрывными характеристиками // *Дифференц. ур-ния.* 2018. Т. 54. № 5. С. 673–690.
12. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 4. С. 611–620.
13. *Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Нефедов Н.Н.* Асимптотическая теория контрастных структур // *Автоматика и телемехан.* 1997. № 7. С. 4–32.
14. *Nefedov N.N., Sakamoto K.* Multi-dimensional stationary internal layers for spatially inhomogeneous reaction-diffusion equations with balanced nonlinearity // *Hiroshima Mathematical Journal.* 2003. V. 33. № 3. P. 391–432.
15. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
16. *Kannan R., Lakshmikantham V.* Existence of periodic solutions of semilinear parabolic equations and the method of upper and lower solutions // *J. Math. Anal. Appl.* 1983. V. 97. № 1. P. 291–299.
17. *Hess P.* Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity. New York: Pitman Resaerch Notes in Math. Series, 1991. 139 p.
18. *Павленко В.Н.* Сильные решения периодических параболических задач с разрывными нелинейностями // *Дифференц. ур-ния.* 2016. Т. 52. № 4. С. 528–539.
19. *Nefedov N.N., Nikulin E.I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem // *Russian Journal of Mathematical Physics.* 2015. V. 22. № 2. P. 215–226.
20. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И.* Существование и устойчивость периодических контрастных структур в задаче реакция-адвекция-диффузия в случае сбалансированной нелинейности // *Дифференц. ур-ния.* 2017. Т. 53. № 4. С. 524–537.
21. *Pao C.V.* Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Springer Science Business Media, 1993. 777 p.