ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 9, с. 1604–1619

УДК 517.95

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИСТОЧНИКОВ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ[1)]

© 2020 г. В. В. Соловьёв

115409 Москва, Каширское ш. 31, Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ", Россия

e-mail: soloviev.vyacheslav@gmail.com

Поступила в редакцию 10.05.2019 г.
Переработанный вариант 03.02.2020 г.
Принята к публикации 09.04.2020 г.

Исследуется обратная задача определения источника в одномерном уравнении теплопроводности для случая первой краевой задачи. В качестве "переопределения" (дополнительной информации о решении прямой задачи) задан след решения прямой задачи на отрезках прямой внутри интервала в финальный момент времени. Доказана справедливость альтернативы Фредгольма для этой задачи и получены достаточные условия существования и единственности решения этой обратной задачи. Рассмотрение обратной задачи проводится в классах гладких функций, производные которых удовлетворяют условию Гёльдера. Библ. 15.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, неизвестный источник, обратная задача, единственность решения, существование решения.

DOI: 10.31857/S0044466920090148

1. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть $T > 0$, $0 < \alpha < 1$, $l > 0$ — фиксированные числа, обозначим интервал оси x через $\Omega = (0,l)$, отрезок $\bar{\Omega} = [0,l]$, и на плоскости с декартовыми координатами точек (x,t), определим прямоугольник с верхней крышкой $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$ и параболической границей $\breve{\partial}\Omega_T = (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{l\} \times [0,T]) \cup ([0,l] \times \{0\})$. В замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0,T]$ рассмотрим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с источником специального вида, а именно, рассмотрим задачу определения функции $u: \bar{\Omega}_T \to \Re$ из условий

$$(Lu)(x,t) = u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = f_k(x)h^k(x,t) + g(x,t) = q(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{2}$$

В уравнении (1) $g, h^k : \bar{\Omega}_T \to \Re$, $\mu_1, \mu_2 : [0,T] \to \Re$, $f_k : \Re \to \Re$ – заданные функции, $k = 1,\ldots,N$, где N — некоторое фиксированное натуральное число, при этом по диагонально записанным индексам k подразумевается суммирование от 1 до N. Относительно функций f_k будем предполагать, что они имеют компактный носитель на интервале Ω, точнее, что существуют такие числа $0 < a_1 < b_1 < \ldots . < a_N < b_N < l$, что каждая из этих функций f_k может быть отлична от нуля только на отрезке $[a_k, b_k]$, $k = 1,\ldots,N$, соответственно. Для удобства дальнейших построений определим в прямоугольнике $\bar{\Omega}_T$ множества

$$P^{(k)} = (a_k,b_k), \quad \overline{P}^{(k)} = [a_k,b_k], \quad \bar{\omega}_k = \overline{P}^{(k)} \times \{T\}, \quad \widetilde{P}_T^{(k)} = [a_k,b_k] \times (0.T], \quad P_T^{(k)} = P^{(k)} \times (0,T],$$

$$k = 1,\ldots,N, \quad \overline{P} = \bigcup_{k=1}^{N} \overline{P}^{(k)}, \quad \widetilde{P}_T = \bigcup_{k=1}^{N} \widetilde{P}_T^{(k)}, \quad P_T = \bigcup_{k=1}^{N} P_T^{(k)}, \quad A = \{a_1,\ldots,a_N\}, \quad B = \{b_1,\ldots,b_N\},$$

[1)]Работа выполнена при поддержке Программы повышения конкурентноспособности Национального исследовательского ядерного университета МИФИ (Московского инженерно-физического института) проект № 02.а03.21.0005 от 27.08.2013.

$$Q_T = \Omega_T \setminus \widetilde{P}_T, \quad \widetilde{Q}_T = \Omega_T \setminus P_T.$$

Всюду далее, под знаком нормы без дополнительных индексов для некоторой функции, без указания аргументов этой функции, понимается обычная sup-норма, при этом супремум ее модуля берется по всей области определения этой функции. Кроме того, для функций нескольких переменных будем использовать обозначение $\|g(.,t)\| = \sup_x |g(x,t)|$. Под нормой прямого произведения нормированных пространств везде понимается максимальная из норм нормированных пространств, входящих в каждую из компонент прямого произведения. Проводя те или иные рассуждения, будем обозначать постоянную, конкретное значение которой в этом рассуждении не важно, буквой C, отличая одну из этих постоянных от другой либо номером снизу, либо указанием ее зависимости от тех или иных параметров.

Так как правая часть уравнения (1) содержит функции, вообще говоря, имеющие разрыв непрерывности по x I рода в точках $x \in A \cup B$, при фиксированном переменном $t \in (0,T]$, то естественным шагом является расширение области определения оператора L, т.е. использование для уравнения (1) некоторого обобщенного решения. Будем включать в область определения оператора L функции $u(x,t)$, имеющие у второй производной по x при фиксированном $t \in (0,T]$ разрывы I рода при $x \in A \cup B$. Именно таким образом и будет пониматься далее уравнение (1). При рассмотрении решений задачи (1), (2) и изучении их свойств будем использовать теорию решений уравнений параболического типа в пространствах Гёльдера, подробное изложение которой приведено в монографиях [1], [2]. Определим необходимые для дальнейших построений пространства функций (определение используемых в данной работе пространств Гёльдера и норм в них см. [1, с. 16])

$$U_0(\Omega_T) = C(\overline{\Omega}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(P_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(Q_T) \cap C^{1,0}_{x,t}(\Omega_T),$$

$$U(\Omega_T) = U_0(\Omega_T) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{P}_T) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{Q}_T).$$

Неформально говоря, для функции u справедливо включение $u \in U_0(\Omega_T)$, если она непрерывна на всем замкнутом прямоугольнике $\overline{\Omega}_T$, в каждом из прямоугольников P_T и прямоугольников Q_T она имеет две непрерывные производные по x и одну по $t, 0 < t \le T$, имеет непрерывную первую производную по x во всем прямоугольнике Ω_T. Для принадлежности функции u пространству $U(\Omega_T)$ дополнительно требуется, чтобы в каждом из прямоугольников, составляющих множества $\widetilde{P}_T$, $\widetilde{Q}_T$, вторая производная по x и первая по t удовлетворяли условиям Гёльдера по x и t с показателями α и $\alpha/2$ соответственно. Отметим здесь, что функциональные пространства $U_0(\Omega_T)$ и $U(\Omega_T)$ не являются общепринятыми при рассмотрении задачи (1), (2), которую в дальнейшем будем называть прямой задачей (см., впрочем, [1, с. 262]). Тем не менее, как будет видно из дальнейшего изложения, при изучении обратной задачи для уравнения (1) удобно рассматривать его решение именно в таких классах функций. Это даст возможность доказать для этого уравнения теорему существования и единственности этой обратной задачи в этих классах функций. Предварительно перед рассмотрением обратной задачи для уравнения (1) докажем существование и единственность решения прямой задачи (1), (2) в классах функций $u \in U_0(\Omega_T)$ и $U(\Omega_T)$, что, возможно, не лишено интереса и само по себе. Сначала докажем для задачи (1), (2) справедливость принципа максимума для случая $u \in U_0(\Omega_T)$ в форме так называемого “слабого принципа максимума”. Отметим здесь, что в классах функций $u \in U_0(\Omega_T)$ его надо специально доказывать, так как решение уравнения (1) в этом классе функций не является, вообще говоря, классическим решением. Всюду далее, как это обычно принято при рассмотрении различного вида обобщенных решений, будем писать $(x,t) \in \Omega_T$, понимая при этом, что, вообще говоря, при $x \in A \cup B$ левая и правая части уравнения (1) не определены, так как в этих точках вторая производная по x может иметь разрывы непрерывности.

Лемма 1 (принцип максимума). *Пусть функция $u \in U_0(\Omega_T)$ и удовлетворяет, в указанном выше смысле, неравенству $(Lu)(x,t) \le 0$ ($(Lu)(x,t) \ge 0$), $(x,t) \in \Omega_T$. Тогда функция $u(x,t)$ принимает значение своего положительного максимума (отрицательного минимума) на параболической границе прямоугольника Ω_T (если, конечно, у этой функции они есть).*

Доказательство будем строить от противного. Сначала рассмотрим случай $(Lu)(x,t) \le 0$. Пусть значения положительного максимума есть где-то на $\overline{\Omega}_T$, но на параболической границе они не достигаются. Пусть

$$U_{\max} = \max\{u(x,t) : (x,t) \in \overline{\Omega}_T\} = u(x^*,t^*), \quad u_{\max} = \max\{u(x,t) : (x,t) \in \breve{\partial}\Omega_T\}.$$

Тогда, в соответствии с предположением, $(x^*,t^*) \in \Omega_T$, но при этом $U_{\max} > u_{\max}$. Так как в каждом из прямоугольников составляющих множества P_T и $\Omega_T \backslash \overline{P}_T$ след функции u будет классическим решением уравнения (1), то по принципу максимума для классического решения функция u может принимать значения положительного максимума либо при $x \in A \cup B$, либо при $(x,t) \in \breve{\partial}\Omega_T$, но последнее включение противоречит предположению. Пусть для определенности значение положительного максимума функции u достигается в некоторой точке $(x^*,t^*) = (a_1,t^*)$, $t^* \in (0,T]$. Но тогда в прямоугольнике $Q(t^*) = \{(x,t)\colon 0 < x < a_1, 0 < t \le t^*\}$ будет обязательно выполнено строгое неравенство $u(x,t) < U_{\max} = u(a_1,t^*)$ (в противном случае в силу строгого принципа максимума для классических решений уравнения теплопроводности (см. [3, с. 175]) получим, что во всем этом прямоугольнике $u(x,t) = U_{\max}$, $(x,t) \in \overline{Q}(t^*)$, в том числе при $t = 0$, в противоречии с предположением $U_{\max} > u_{\max}$). В этом случае в силу известной леммы о нормальной производной (см. [2, с. 69]) в точке (a_1,t^*) будет выполнено неравенство $u_x(a_1,t^*) > 0$, что противоречит необходимому условию экстремума. Таким образом, значения положительного максимума не могут достигаться при $x = a_1$, $t > 0$. Аналогично путем последовательного перебора разбираются все остальные случаи $x^* \in A \cup B$. Получаем противоречие с предположением о существовании точки $(x^*,t^*) \in \Omega_T$, в которой $U_{\max} > u_{\max}$, т.е. для случая положительного максимума лемма доказана. Случай отрицательного минимума сводится известным образом к случаю положительного максимума. Лемма 1 полностью доказана.

Следствие 1. Задача (1), (2) в классе функций $U_0(\Omega_T)$ не может иметь двух различных решений.

Следствие 2. Пусть существует решение задачи (1), (2) в классе функций $U_0(\Omega_T)$ и выполнены неравенства $\varphi(x) \ge 0$, $x \in \Omega$, $\mu_1(t) \ge 0$, $\mu_2(t) \ge 0$, $t \in [0,T]$, $g(x,t) \ge 0$, $q(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \Omega_T$. Тогда для функции u, являющейся решением задачи (1), (2), будет справедливо неравенство $u(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \overline{\Omega}_T$. Более того, если при этом хотя бы одна из этих функций отлична от нуля хотя бы в одной точке, то для функции u будет выполнено строгое неравенство $u(x,T) > 0$, $(x,T) \in \Omega_T$. Кроме того, если известно, что $f_k \ge 0$, $h^k \ge 0$, $g \ge 0$, $\varphi \ge 0$, $\mu_1 \ge 0$, $\mu_2 \ge 0$ и хотя бы в одной точке $(x^*,t^*) \in \Omega_T$ справедливо, что $u(x^*,t^*) = 0$, то для любых точек $(x,t) \in \overline{\Omega}_T$, $t \le t^*$ будет выполнено равенство $u(x,t) = 0$.

Следствие 3. Пусть существует решение задачи (1), (2) в классе функций $U_0(\Omega_T)$. Тогда для функции u справедлива априорная оценка

$$|u(x,t)| \le \|u(.,t)\| \le \max\{\|\varphi\|, \|\mu_1\|, \|\mu_2\|\} + \max\{\|f_k\|\} \max\left\{\left\|h^k\right\|\right\} t, (x,t) \in \overline{\Omega}_T.$$

Доказательства этих утверждений проводятся стандартными способами так же, как для классических решений, используя принцип максимума (доказанная выше лемма 1) (см., например, [2, с. 59]).

Докажем теперь теорему существования и единственности решения задачи (1), (2) в определенных выше классах функций $U(\Omega_T)$, $U_0(\Omega_T)$.

Терема 1. *Пусть справедливы включения* $\varphi \in C(\overline{\Omega})$, $\mu_1, \mu_1 \in C[0,T]$, $h^k, g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $f_k \in C^{\alpha}[a_k,b_k]$, $k = 1,\dots,N$, *выполнены условия согласования* $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$. *Тогда задача* (1), (2) *имеет единственное решение в классе функций* $U_0(\Omega_T)$. *Если дополнительно к этим условиям справедливы включения* $h_t^k \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, *то это решение из класса* $U(\Omega_T)$.

Доказательство. Единственность решения следует из следствия 1 леммы 1. Докажем сначала существование решения задачи (1), (2) в классе функций $U_0(\Omega_T)$. Будем строить решение задачи (1), (2) в виде суммы двух функций

$$u(x,t) = u_0(x,t) + w(x,t).$$

В качестве функции u_0 возьмем решение следующей начально-краевой задачи:

$$(Lu_0)(x,t) = g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{3}$$

$$u_0(0,t) = \mu_1(t), \quad u_0(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \quad u_0(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{4}$$

Известно (см. [2, с. 95]), что при указанных в условии теоремы 1 ограничениях существует единственное решение задачи (3), (4) в классе функций $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T) \subset U(\Omega_T)$. Функцию $w \in U_0(\Omega_T)$ будем искать как решение следующей задачи:

$$(Lw)(x,t) = w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = q(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{5}$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad w(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{6}$$

Так как задача (5), (6) линейна, то достаточно доказать существование ее решения при $N = 1$. В этом случае, для удобства, используем следующие упрощенные обозначения:

$$P = (a,b), \quad 0 < a < b < l, \quad \bar{P} = [a,b], \quad P_T = P \times (0,T],$$
$$\widetilde{P}_T = \bar{P} \times (0,T], \quad Q^{(1)} = (0,a), \quad Q^{(2)} = (b,l),$$

$$Q_T^{(k)} = Q^{(k)} \times (0,T], \quad k = 1,2, \quad \widetilde{Q}^{(1)} = (0,a], \quad \widetilde{Q}^{(2)} = [b,l), \quad \widetilde{Q}_T^{(k)} = \widetilde{Q}^{(k)} \times (0,T], \quad k = 1,2.$$

Ясно, что $(0,l) = \widetilde{Q}^{(1)} \cup \bar{P} \cup \widetilde{Q}^{(2)}$, $\Omega_T = \widetilde{Q}_T^{(1)} \cup \widetilde{P}_T \cup \widetilde{Q}_T^{(2)}$. Пусть далее заданы функции $f: \Re \to \Re$, $f(x) = 0$, $x \notin [a,b]$, $f \in C^{\alpha}[a,b]$, $h \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$. Тогда задача (5), (6) при $N = 1$ примет следующий вид:

$$(Lw)(x,t) = f(x)h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{7}$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad w(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{8}$$

Покажем, что задача (7), (8) имеет решение в классе функций $U_0(\Omega_T)$ или, подробнее, в принятых для случая $N = 1$ обозначениях

$$w \in U_0(\Omega_T) = C(\bar{\Omega}_T) \cap C_{x,t}^{2,1}(Q_T^{(1)}) \cap C_{x,t}^{2,1}(P_T) \cap C_{x,t}^{2,1}(Q_T^{(2)}) \cap C_{x,t}^{1,0}(\Omega_T).$$

Пусть $G(x,\xi;t,\tau)$ – функция Грина задачи (7), (8). Определим функцию $w(x,t)$ по правилу

$$w(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x,\xi;t,\tau) f(\xi) h(\xi,\tau) d\xi. \tag{9}$$

Покажем, что определенная формулой (9) функция $w \in U_0(\Omega_T)$ и удовлетворяет всем требованиям к решению задачи (7), (8). По определению функции Грина задачи (7), (8) она имеет вид (см. [1, с. 464])

$$G(x,\xi;t,\tau) = Z(x-\xi,t-\tau) - g(x,\xi;t,\tau),$$

где функция Z – фундаментальное решение уравнения (1), определяемое по формуле

$$Z(x-\xi,t-\tau) = 1/(4\pi^2(t-\tau))^{1/2} \exp\{-(x-\xi)^2/(4(t-\tau))\},$$

функция $g(x,\xi;t,\tau)$ – классическое решение следующей краевой задачи

$$(Lg)(x,\xi;t,\tau) = g_t(x,\xi;t,\tau) - g_{xx}(x,\xi;t,\tau) = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > \tau, \quad 0 < \xi < l,$$

$$g(0,\xi;t,\tau) = Z(-\xi;t-\tau), \quad g(l,\xi;t,\tau) = Z(l-\xi;t-\tau), \quad \tau \le t \le T, \quad g(x,\xi;\tau,\tau) = 0, \quad 0 \le x \le l.$$

Представив выражение функции $g(x,\xi;t,\tau)$ через тепловые потенциалы двойного слоя с носителями при $x = 0$, $x = l$ (см. [1, с. 462], [4, с. 735]) получим, что эта функция бесконечно дифференцируема по x, t при $0 < x < l$, $\tau < t \le T$. Таким образом, формула (9) с учетом того, что носитель функции f лежит на отрезке $[a,b]$, примет вид

$$w(x,t) = \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} Z(x-\xi;t-\tau) f(\xi) h(\xi,\tau) d\xi - \int_0^t d\tau \int_0^l g(x,\xi;t,\tau) f(\xi) h(\xi,\tau) d\xi. \tag{10}$$

Пользуясь свойствами тепловых потенциалов и абсолютной интегрируемостью фундаментального решения, из формулы (10) получаем, что для функции w справедливы условия (8). В формуле (10) второе слагаемое не является несобственным интегралом, удовлетворяет уравнению теплопроводности и, в силу бесконечной дифференцируемости функции $g(x,\xi;t,\tau)$ в Ω_T, лежит в пространстве $C(\bar{\Omega}_T) \cap C^{2,1}_{x,t}(\Omega_T)$. Более того, в силу этих же причин оно есть элемент пространства $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T)$. Для изучения первого слагаемого воспользуемся следующими известными представлениями его производных (см. [1, с. 306], [2, с. 24]):

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} Z(x-\xi;t-\tau)f(\xi)h(\xi,\tau)d\xi = \int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial Z}{\partial x}(x-\xi;t-\tau)f(\xi)h(\xi,\tau)d\xi, \quad 0<t\le T, \quad x\in\Re, \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} Z(x-\xi;t-\tau)f(\xi)h(\xi,\tau)d\xi = \int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x-\xi;t-\tau)[f(\xi)h(\xi,\tau)-\\ -f(x)h(x,\tau)]d\xi, \quad 0<t\le T, \quad x\in\Re, \quad x\ne a, \quad x\ne b,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty} Z(x-\xi;t-\tau)f(\xi)h(\xi,\tau)d\xi = \int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}(x-\xi;t-\tau)[f(\xi)h(\xi,\tau)-\\ -f(x)h(x,\tau)]d\xi + f(x)h(x,t), \quad 0<t\le T, \quad x\in\Re, \quad x\ne a, \quad x\ne b.\end{gathered} \tag{13}$$

Каждый из интегралов (11)–(13) является несобственным только при $a<x<b$. В силу известных оценок фундаментального решения и его производных (см. [2, с. 19]) при указанных ниже постоянных μ справедливы оценки

$$\begin{gathered}|Z(x-\xi,t-\tau)| \le C_1(t-\tau)^{-\mu}|x-\xi|^{2\mu-1}, \quad 0<\mu<1,\\ |Z_x(x-\xi,t-\tau)| \le C_2(t-\tau)^{-\mu}|x-\xi|^{2\mu-1}, \quad 1/2<\mu<1,\\ |Z_{xx}(x-\xi,t-\tau)|\,|[f(\xi)h(\xi,\tau)-f(x)h(x,\tau)]| \le C_3(t-\tau)^{-\mu}|x-\xi|^{-3+2\mu}C_4|x-\xi|^{\alpha} \le\\ \le C_3C_4(t-\tau)^{-\mu}|x-\xi|^{-3+2\mu+\alpha}, \quad 1-\alpha/2<\mu<1.\end{gathered} \tag{14}$$

Из этих оценок следует равномерная сходимость интегралов в формулах (10), (11) при $0<x<l$, в формулах (12), (13) при $a<x<b$ (при $0<x<a$, $b<x<l$ в формулах (12), (13) интегралы не являются несобственными). Таким образом, показали, что функция $w(x,t)$, определенная по формуле (9), является непрерывной на $\bar{\Omega}_T$, ее производная по x, функция $u_x(x,t)$, непрерывна на Ω_T, производные $u_t(x,t), u_{xx}(x,t)$ непрерывны на прямоугольниках $Q_T^{(1)}$, P_T, $Q_T^{(2)}$. В силу указанной выше равномерной сходимости интегралов и известных свойств фундаментального решения Z, непосредственной проверкой устанавливается, что функция w удовлетворяет уравнению (7) при $(x,t)\in\Omega_T$, $x\ne a,b$. То есть доказано существование решения задачи (7), (8) в классе функций $U_0(\Omega_T)$, представимое формулой (9). Покажем далее, что если дополнительно известно, что $h_t\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, то эта функция принадлежит пространству $U(\Omega_T)$, т.е. справедливо включение $w\in U_0(\Omega_T)\cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{P}_T)\cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{Q}_T)$. Для этого рассмотрим функцию $v:\bar{\Omega}_T\to\Re$, определенную по правилу

$$v(x,t) = \int_0^t d\tau\int_0^l G(x,\xi;t,\tau)f(\xi)h_\tau(\xi,\tau)d\xi + \int_0^l G(x,\xi;t,0)f(\xi)h(\xi,0)d\xi = v_1(x,t)+v_2(x,t), \quad (x,t)\in\bar{\Omega}_T. \tag{15}$$

Проводя рассуждения, аналогичные проведенным для функции $w(x,t)$, получаем, что функция v_1, определенная по формуле (15), является элементом пространства $U_0(\Omega_T)$. Для функции $v_2(x,t)$, из определения функции Грина следует, что она бесконечно дифференцируема по x, t

при $0 < x < l$, $0 < t \le T$. Кроме того, используя равенство, справедливое для фундаментального решения

$$\int_{-\infty}^{\infty} Z(x-\xi,t)d\xi = 1, \quad t > 0, \quad x \in \Re,$$

стандартными рассуждениями (см. [5, с. 608]) получаем, что при $t = 0$, $x \ne a$, $x \ne b$ для функции v_2 справедливы начальные условия

$$v_2(x,0) = f(x)h(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \ne a, \quad x \ne b.$$

Пусть

$$\bar{\Omega}_T^* = \{(x,t) : (x,t) \in \bar{\Omega}_T,\, (x,t) \ne (a,0),\, (x,t) \ne (b,0)\}.$$

Определим пространства функций

$$V_0(\Omega_T^*) = C(\bar{\Omega}_T^*) \cap C_{x,t}^{2,1}(P_T) \cap C_{x,t}^{2,1}(\Omega_T \setminus \widetilde{P}_T) \cap C_{x,t}^{1,0}(\Omega_T),$$

$$V(\Omega_T^*) = V_0(\Omega_T^*) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{P}_T) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{Q}_T).$$

Классы функций $V_0(\Omega_T^*)$, $V(\Omega_T^*)$ отличаются от классов функций $U_0(\Omega_T)$, $U(\Omega_T)$ отсутствием, вообще говоря, непрерывности в точках $(a,0)$, $(b,0)$, хотя, как это следует предельным переходом из принципа максимума для классических решений, функции v_1, v_2 допускают оценки $|v_1(x,t)| \le \|f\|\|h_\tau\|T$, $\left|v^{(2)}(x,t)\right| \le \|f\|\|h(.,0)\|$. Проводя рассуждения, аналогичные предыдущим, использованным при изучении функции w, получаем справедливость для функции v_2 включения $v_2 \in V(\Omega_T^*)$ и справедливость задачи

$$(Lv_2)(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{16}$$

$$v_2(0,t) = 0, \quad v_2(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v_2(x,0) = f(x)h(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \ne a, \quad x \ne b. \tag{17}$$

Для функции $v = v_1 + v_2$, $v \in V_0(\Omega_T^*)$, таким образом, получаем справедливость задачи

$$(Lv)(x,t) = f(x)h_t(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{18}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v(x,0) = f(x)h(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \ne a, \quad x \ne b. \tag{19}$$

Установим связь между функциями $u(x,t)$ и $v(x,t)$. Для этого определим характеристическую и срезающую функции отрезка $[a,b]$ (см. [6, с. 11]), функции $\eta, \eta_n : \Re \to \Re$, $\eta(x) = 1$, $x \in [a,b]$, $0, x \notin [a,b]$, $\eta(x)$ – характеристическая функция отрезка $[a,b]$, срезающая функция определена при достаточно больших n и удовлетворяет условиям

$$\eta_n(x) = 1, \quad x \ge a + 1/n, \quad x \le b - 1/n, \quad \eta_n(x) = 0, \quad x \le a, \quad x \ge b,$$

$$\eta_n(x) \ge 0, \quad x \in \Re, \quad \eta_n \in C_0^\infty(\Re).$$

Ясно, что $\eta_n(x) \to \eta(x)$ всюду, кроме точек $x = a$, $x = b$. Определим функции $f^{(n)}(x) = f(x)\eta_n(x)$. Для них справедливо включение $f^{(n)} \in C^\alpha[0,l]$. Рассмотрим последовательности начально-краевых задач для уравнения теплопроводности следующего вида:

$$(Lw^{(n)})(x,t) = f^{(n)}(x)h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{20}$$

$$w^{(n)}(0,t) = 0, \quad w^{(n)}(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad w^{(n)}(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{21}$$

$$(Lv^{(n)})(x,t) = f^{(n)}(x)h_t(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{22}$$

$$v^{(n)}(0,t) = 0, \quad v^{(n)}(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v^{(n)}(x,0) = f^{(n)}(x)h(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{23}$$

Так как правая часть уравнения (20) и ее производная по t лежат в пространстве $C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, то функции $w^{(n)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, решение задач (20), (21) имеют дополнительную производную по t

в прямоугольнике $\bar{\Omega}_T$, удовлетворяющую задаче (22), (23), решения которых есть функции $v^{(n)} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ (см. [2, с. 95]). Таким образом, решения задач (20), (21) и (22), (23) при каждом фиксированном n связаны между собой соотношением

$$w^{(n)}(x,t) = \int_0^t v^{(n)}(x,\tau)d\tau, (x,t) \in \bar{\Omega}_T. \tag{24}$$

Так как при $n \to \infty$ функции $u^{(n)}(x,t)$, $v^{(n)}(x,t)$ сходятся равномерно на Ω_T к соответственно функциям $u(x,t)$, $v(x,t)$, то переходя к пределу в равенстве (24), получаем связь между этими функциями в виде

$$w(x,t) = \int_0^\infty v(x,\tau)d\tau, (x,t) \in \bar{\Omega}_T^*. \tag{25}$$

Таким образом, из формулы (25) получаем, что $u_t(x,t) = v(x,t)$, $0 \le x \le l$, $t > 0$. Получим далее для функции v необходимую для дальнейших рассмотрений оценку. Покажем, что для любого, достаточно малого $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ и любого числа δ такого, что $0 < \delta < 1$, выполнена следующая оценка:

$$\begin{gathered} |v(x_2,t_2) - v(x_1,t_1)| \le C(\varepsilon,\delta)(|x_2 - x_1|^\delta + |t_2 - t_1|^{\delta/2})\|f\|(\|h(.,0)\| + \|h_t\|), \\ x_2, x_1 \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon], \quad t_2, t_1 \ge \varepsilon > 0. \end{gathered} \tag{26}$$

Для функции v_2, удовлетворяющей условиям (16), (17), эта оценка очевидна, так как функция $G(x,\xi;t,0)$ бесконечно дифференцируема по переменным x, t при $0 < x < l$, $0 < t \le T$ и, отступив от значений $t = 0$, $x = 0$, $x = l$ на некоторую, достаточно малую величину $\varepsilon > 0$, получаем требуемую оценку. Докажем ее для функции $v_1 \in U_0(\Omega_T)$, удовлетворяющей следующим условиям:

$$(Lv_1)(x,t) = f(x)h_t(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T,$$

$$v_1(0,t) = 0, \quad v_1(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v_1(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Для этого рассмотрим следующую последовательность начально-краевых задач для уравнения теплопроводности:

$$(Lv_1^{(n)})(x,t) = f^{(n)}(x)h_t(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{27}$$

$$v_1^{(n)}(0,t) = 0, \quad v_1^{(n)}(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v_1^{(n)}(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{28}$$

При каждом фиксированном n для функции $v_1^{(n)}$ справедлива так называемая оценка “$1 + \delta$” (см. [2, с. 238]), имеющая в случае задачи (27), (28) следующий вид:

$$\left|v_1^{(n)}(x_2,t_2) - v_1^{(n)}(x_1,t_1)\right| \le C(\delta)(|x_2 - x_1|^\delta + |t_2 - t_1|^{\delta/2})\|f\|\|h_t\|, \quad (x_2,t_2),(x_1,t_1) \in \bar{\Omega}_T. \tag{29}$$

Так как в оценке (29) постоянная $C(\delta) > 0$ не зависит от n и правой части уравнения (27), то переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (29), получаем для функции v_1 оценку вида

$$|v_1(x_2,t_2) - v_1(x_1,t_1)| \le C(\delta)(|x_2 - x_1|^\delta + |t_2 - t_1|^{\delta/2})\|f\|\|h_t\|, \quad (x_2,t_2),(x_1,t_1) \in \bar{\Omega}_T. \tag{30}$$

Из оценки (30) получаем, окончательно, справедливость оценки (26). Полагая в оценке (26) $\delta = \alpha$, получаем в соответствии с определением пространств Гёльдера справедливость включения $v \in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)$. Запишем теперь уравнение (7), обозначив в нем в соответствии с доказанным $u_t(x,t) = v(x,t)$. Тогда получим тождество

$$v(x,t) = w_{xx} + f(x)h(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T. \tag{31}$$

Из тождества (31), так как $v \in C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)$, $fh \in C^{\alpha,\alpha/2}(\widetilde{P}_T)$, следует, что справедливы включения

$$w_{xx} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\widetilde{P}_T), \quad w_{xx} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\widetilde{Q}_T^{(1)}), \quad u_{xx} \in C^{\alpha,\alpha/2}(\widetilde{Q}_T^{(2)}).$$

Отсюда получаем, что $w \in U(\Omega_T)$. Теорема 1 полностью доказана.

Для произвольной функции v: $\overline{\Omega}_T \to \Re$ и произвольного числа $0 < \delta < 1$ обозначим

$$\|v(.,T)\|_{\omega}^{(\delta)} = \sup\{|v(x,T)| + |v(x_2,T) - v(x_1,T)|/|x_2 - x_1|^{\delta},\ x_2 \neq x_1,\ x, x_1, x_2 \in \overline{P}^{(k)},\ k = 1,\dots,N\}. \quad (32)$$

Используя обозначения (32), получаем следующее следствие из доказательства теоремы 1.

Следствие 1. Пусть $w(x,t)$ – решение следующей задачи в классе функций $U_0(\Omega_T)$:

$$(Lw)(x,t) = w_t(x,t) - w_{xx}(x,t) = f_k(x)h^k(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \quad (33)$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad w(x,0) = 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (34)$$

Пусть $h^k, h_t^k \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $f_k \in C^{\alpha}[a_k,b_k]$, $k = 1,\dots,N$. Тогда для любого числа $0 < \delta < 1$ для решения задачи (33), (34) справедлива оценка

$$\|w_t(.,T)\|_{\omega}^{(\delta)} \le C(\delta)\|f_k\|\left(\|h_t^k\| + \|h^k(.,0)\|\right). \quad (35)$$

При этом в оценке (35) постоянная $C(\delta)$ не зависит от правой части уравнения (33).

Доказательство. Оценка (35) следует из применения оценки (30) к каждому слагаемому в правой части уравнения (33) и их суммирования при фиксированном $\varepsilon = \min\{a_1/2, (l - b_N)/2, T/2\} > 0$. Следствие 1 доказано.

Для формулировки следующего следствия определим множество $\overline{\Omega}_T^*$ и соответствующее функциональное пространство для случая $N > 1$, аналогично случаю $N = 1$. Пусть

$$\overline{\Omega}_T^* = \overline{\Omega}_T \setminus \{(a_1,0),(b_1,0),\dots,(a_N,0),(b_N,0)\}, \quad V(\Omega_T^*) = V_0(\Omega_T^*) \cap C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\widetilde{P}_T).$$

Следствие 2. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (33), (34) в классе функций $U_0(\Omega_T)$, выполнены условия $h^k, h_t^k \in C^{\alpha,\alpha/2}(\overline{\Omega}_T)$, $f_k \in C^{\alpha}[a_k,b_k]$, $k = 1,\dots,N$. Тогда функция $v = u_t \in V(\Omega_T^*)$ удовлетворяет задаче

$$(Lv)(x,t) = v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = f_k(x)h_t^k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_T, \quad (36)$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v(x,0) = f_k(x)h^k(x,0), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad x \notin A \cup B. \quad (37)$$

Доказательство следствия 2 совершенно аналогично проведенному в теореме 1 доказательству этого утверждения для случая $N = 1$.

Перейдем к постановке обратной задачи для уравнения (1). Для этого будем предполагать, что в уравнении (1), кроме функции u, неизвестны еще функции $f_k, k = 1,\dots,N$, но при этом задана дополнительная информация о функции u. Будем предполагать, что, кроме условий (2), известны также следы функции u на отрезках $\overline{\omega}^{(k)}, k = 1,\dots,N$ (такого рода информация при постановке обратной задачи называется обычно переопределением). Далее для удобства изложения будем обозначать $f = (f_1,\dots,f_N)$, $\chi = (\chi_1,\dots,\chi_N)$, $h(x,t) = (h^1(x,t),\dots,h^N(x,t))$. Соответствующие функциональные пространства (очевидно банаховы) обозначим

$$f \in F^{\alpha} = C^{\alpha}[a_1,b_1] \times \dots \times C^{\alpha}[a_N,b_N], \quad \chi \in H^{2,\alpha} = C^{2,\alpha}[a_1,b_1] \times \dots \times C^{2,\alpha}[a_N,b_N].$$

Таким образом, рассмотрим обратную задачу определения $N+1$ функции $(u,f) \in U(\Omega_T) \times F^{\alpha}$ из условий

$$(Lu)(x,t) = f_k(x)h^k(x,t) + g(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \quad (38)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (39)$$

$$u(x,T) = \chi_k(x), \quad x \in [a_k,b_k], \quad k = 1,\dots,N. \quad (40)$$

Обратная задача для уравнения теплопроводности с источниками, имеющими компактный носитель, рассматривалась в работе [7] для случая $N = 2$ и независимости функций h^k от x. В этой работе при другом переопределении изучался вопрос о единственности ее решения и были построены примеры неединственности решения обратной задачи. Другие постановки обратных задач определения источников в уравнении теплопроводности, близкие к задаче (38)–(40), а также историю изучения таких задач см. в работах [8]–[13]. В данной работе для обратной задачи (38)–(40) получены некоторые достаточные условия ее единственности (в том числе носящие глобальный характер), доказана альтернатива Фредгольма и получены некоторые достаточные условия ее однозначной разрешимости.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (36)–(38)

Рассмотрим сначала важнейший для постановки любой обратной задачи вопрос о единственности ее решения. Сначала сформулируем и докажем теорему, дающую достаточные условия единственности решения обратной задачи (38)–(40), имеющие локальный характер.

Теорема 2. *Пусть для функций h выполнены условия $h^k, h_t^k \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\left|h^k(x,T)\right| \geq h_T > 0$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, где $h_T > 0$ – некоторая постоянная. Тогда существует число $\nu_0 > 0$ такое, что для любых не пересекающихся отрезков $\bar{\omega}_k \subset \Omega_T$ таких, что $\max\{b_k - a_k\} < \nu_0$, обратная задача* (38)–(40) *не может иметь двух различных решений.*

Доказательство. В силу линейности задачи (38)–(40) достаточно доказать, что имеет только тривиальное решение обратная задача определения функций $(u, f) \in U(\Omega_T) \times F^{\alpha}$ из следующих условий:

$$(Lu)(x,t) = f_k(x)h^k(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{41}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{42}$$

$$u(x,T) = 0, \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{43}$$

Доказательство строим от противного. Пусть задача (41)–(43) имеет нетривиальное решение. Но тогда, в силу единственности решения прямой задачи (41), (42), обязательно хотя бы одна из функций f_k отлична от тождественного нуля. Подставим в уравнение (41) $t = T$ и $x \in [a_k, b_k]$. В этом случае из условий переопределения (43) получим для функции u условия (по индексу k_0 здесь и далее суммирование не проводится)

$$u_t(x,T) = f_{k_0}(x)h^{k_0}(x,T), \quad x \in [a_{k_0}, b_{k_0}], \quad k_0 = 1,\dots,N. \tag{44}$$

Пусть $u_t = v$. Из равенств (44), в соответствии со следствием 2 теоремы 1 получим, что $N+1$ функция $(v, f) \in U(\Omega_T^*) \times F^{\alpha}$ удовлетворяют условиям

$$(Lv)(x,t) = v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = f_k(x)h_t^k(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{45}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v(x,0) = f_k(x)h^k(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \notin A \cup B. \tag{46}$$

$$v(x,T) = f_{k_0}(x)h^{k_0}(x,T), \quad x \in [a_{k_0}, b_{k_0}], \quad k_0 = 1,\dots,N. \tag{47}$$

Из условий (45), (46), аналогично доказанному утверждению для $N = 1$ в теореме 1, функция $v(x,T)$ представима через функцию Грина в виде

$$v(x,T) = \int_0^T d\tau \int_0^l G(x,\xi;T,\tau) f_k(\xi) h_\tau^k(\xi,\tau) d\xi + \int_0^l G(x,\xi;T,0) f_k(\xi) h^k(\xi,0) d\xi. \tag{48}$$

В силу известных оценок функции Грина (см. [1, с. 469], [2, с. 9]), для любых постоянных $0 < \mu < 1$ справедливы оценки

$$\left|G(x,\xi;T,\tau)\right| \leq C_5 (T-\tau)^{-1/2} \exp\{C_6 \left|x-\xi\right|^2 / (T-\tau)\} \leq C_7 (T-\tau)^{-\mu} \left|x-\xi\right|^{2\mu-1}.$$

Выбирая $\mu = 3/4$, получаем справедливость оценки

$$\left|G(x,\xi;T,\tau)\right| \leq C_8 (T-\tau)^{-3/4} \left|x-\xi\right|^{1/2}. \tag{49}$$

Из условий (47) и представления (48) получаем следующие условия:

$$f_{k_0}(x) = 1/h^{k_0}(x,T)\left(\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^l G(x,\xi;T,\tau)f_k(\xi)h_\tau^k(\xi,\tau)d\xi + \int\limits_0^l G(x,\xi;T,0)f_k(\xi)h^k(\xi,0)d\xi\right),$$
$$x \in [a_{k_0}, b_{k_0}], \quad k_0 = 1,\ldots,N. \tag{50}$$

Будем предполагать, что $\max\{b_k - a_k\} \le \nu_0$. Тогда, оценивая левую часть равенства (50) через его правую часть с помощью оценки (49), после элементарных преобразований получим следующую оценку:

$$\left|f_{k_0}(x)\right| \le C(T)\nu_0^{3/2}/h_T\,\|f_k\|\left(\left\|h_\tau^k\right\| + \left\|h^k(.,0)\right\|\right) \le C(T)\nu_0^{3/2}/h_T\,\|f\|\,N\max\left\{\left\|h_\tau^k\right\| + \left\|h^k(.,0)\right\|\right\} = \lambda\|f\|. \tag{51}$$

Будем считать, что в оценке (51) число ν_0 столь мало, что $\lambda < 1$. Пусть при этом значение $\|f\|$ достигается на функции f_{k^*} в точке $x^* \in [a_{k^*}, b_{k^*}]$. Тогда оценка (51) примет вид

$$\left|f_{k^*}(x^*)\right| = \|f\| \le \lambda\|f\|, \quad \lambda < 1.$$

Получили противоречие. Теорема 2 доказана.

Приведем достаточные условия единственности решения обратной задачи (38)–(40), имеющие глобальный характер и не предполагающие выполнения каких-либо условий малости.

Теорема 3. *Пусть для функций* h *выполнены условия* $h^k, h_t^k \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $h^{k_0}(x,t)h_t^{k_0}(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in P_T^{(k_0)}$, $k_0 = 1,\ldots,N$. *Тогда для единственности решения обратной задачи* (38)–(40) *необходимо и достаточно, чтобы носитель каждой из функций* $h^k(.,T)$ *содержал отрезок* $[a_k, b_k]$, $k = 1,\ldots,N$, *т.е.*

$$\operatorname{supp} h^k(.,T) \supset [a_k, b_k], \quad k = 1,\ldots,N. \tag{52}$$

Замечание. Так как каждая из функций f_k может быть отличной от нуля только на отрезке $[a_k, b_k]$, то накладываемые на носители функций $h^k(.,T)$ ограничения сводятся к ограничениям на носитель следа этих функций на отрезках $\bar{\omega}^{(k)}$. Условия (52) теоремы требуют, чтобы замыкание множества точек $h^k(x,T) \ne 0$, $x \in [a_k, b_k]$, содержало отрезок $[a_k, b_k]$, $k = 1,\ldots,N$. Вне этих отрезков, естественно, никаких ограничений на поведение каждой из функций h^k не накладывается. Кроме этого, справедливость неравенств $h^{k_0}(x,t)h_t^{k_0}(x,t) \ge 0$ можно также считать верной, без ограничения общности, при всех $(x,t) \in \Omega_T$, что и будет далее использоваться, не оговаривая это специально.

Доказательство. Необходимость условий (52) для единственности решения обратной задачи (38)–(40) доказывается совершенно так же, как и доказательство аналогичного факта для задачи с финальным переопределением (на всей верхней крышке) (см. [14]). Докажем достаточность условия (52) для единственности решения. Рассуждаем от противного. Пусть условие (52) выполнено, но обратная задача (41)–(43) имеет нетривиальное решение, т.е. существует N функций $f \in F^\alpha$, $f \ne 0$, таких, что решение прямой задачи (41), (42) удовлетворяет условиям (43). Сделаем сразу же очевидное замечание о характере правой части уравнения (41) в случае справедливости условия (43). Из принципа максимума следует, что правая часть этого уравнения обязательно должна менять знак на прямоугольнике Ω_T. Для дальнейшего проведения доказательства представим каждую из функций f_k в виде

$$f_k(x) = f_k^+(x) - f_k^-(x), \quad f_k^+(x) = \max\{f_k(x), 0\}, \quad f_k^-(x) = \left|f_k(x)\right| - f_k^+(x), \quad x \in \Re. \tag{53}$$

Аналогичным образом представим функцию $h^{(k)}(x,t)$:

$$h^k(x,t) = h^k(x,0) + \int\limits_0^t h_\tau^k(x,\tau)d\tau = (h^k(x,0))^+ - (h^k(x,0))^- + \int\limits_0^t ((h_\tau^k(x,\tau))^+ - ((h_\tau^k(x,\tau))^-))d\tau. \tag{54}$$

Для преобразования формулы (54) понадобится

Лемма 2. *Пусть для функции* $p : \bar{\Omega}_T \to \Re$ *справедливы включения* $p, p_t \in C(\bar{\Omega}_T)$ *и выполнены условия* $p(x,t)p_t(x,t) \ge 0$, $(x,t) \in \Omega_T$. *Тогда для этой функции справедливы следующие свойства*:

1) *если при некотором* $x \in \bar{\Omega}$ *выполнено* $p(x,T) = 0$, *то* $p(x,t) = 0$ *при* $0 \le t \le T$,

2) *если при некотором* $x \in \bar{\Omega}$ *выполнено* $p(x,T) > 0$, *то* $p(x,t) \ge 0$, $p_t(x,t) \ge 0$ *при* $0 \le t \le T$,

3) *если при некотором* $x \in \bar{\Omega}$ *выполнено* $p(x,T) < 0$, *то* $p(x,t) \le 0$, $p_t(x,t) \le 0$ *при* $0 \le t \le T$,

4) *функции* $p^+(x,t)$, $p^-(x,t)$ *непрерывно дифференцируемы по t на* $\bar{\Omega}_T$ *при этом*

$$(p^+(x,t))_t = (p(x,t)_t)^+, \quad (p^-(x,t))_t = (p(x,t)_t)^-. \tag{55}$$

Доказательство. Докажем, например, свойство 1). От противного. Пусть в некоторой точке (x^*,T) будет выполнено равенство $p(x^*,T) = 0$, но при этом в некоторой точке $(x^*,t^*) \in \{x^*\} \times [0,T)$ будет справедливо, например, неравенство $p(x^*,t^*) > 0$. Рассмотрим множество чисел $G = \{t : t^* < t \le T, p(x^*,t) = 0\}$. Оно, очевидно, замкнуто и, следовательно, его нижняя грань ему принадлежит. Пусть это есть число $\bar{t} > t^*$. Из определения этого числа следует, что при $t^* \le t < \bar{t}$ справедливо неравенство $p(x^*,t) > 0$. Тогда, по теореме Лагранжа, существует такое число $\xi \in (t^*,\bar{t})$, что выполнено равенство

$$p(x^*,\bar{t}) - p(x^*,t^*) = p_t(x^*,\xi)(\bar{t} - t^*) = -p(x^*,t^*) < 0. \tag{56}$$

Из равенства (56) следует, что $p_t(x^*,\xi) < 0$, что противоречит условию $p(x^*,\xi)p_t(x^*,\xi) \ge 0$. Свойство 1) доказано. Аналогично доказываются свойства 2) и 3). Свойство 4) проверяется непосредственной проверкой с помощью перебора случаев различных знаков у функции $p(x,T)$. Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, представим уравнение (41) в следующем виде:

$$\begin{gathered}(Lu)(x,t) = f_k(x)h^k(x,t) = \left[f_k(x)^+(h^k(x,0))^+ + f_k(x)^-(h^k(x,0))^- + f_k(x)^+\int_0^t (h^k_\tau(x,\tau))^+ + \right.\\ \left. + f_k(x)^-\int_0^t (h^k_\tau(x,\tau))^- d\tau\right] - \left[f_k(x)^+(h^k(x,0))^- + f_k(x)^-(h^k(x,0))^+ + f_k(x)^+\int_0^t (h^k_\tau(x,\tau))^- + \right.\\ \left. + f_k(x)^-\int_0^t (h^k_\tau(x,\tau))^+ d\tau\right] = q_+(x,t) - q_-(x,t), (x,t) \in \Omega_T.\end{gathered} \tag{57}$$

Определим функции $u_+, u_- \in U(\Omega_T)$ из условий

$$(Lu_+)(x,t) = q_+(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{58}$$

$$u_+(0,t) = 0, \quad u_+(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u_+(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{59}$$

$$(Lu_-)(x,t) = q_-(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{60}$$

$$u_-(0,t) = 0, \quad u_-(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u_-(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}. \tag{61}$$

Как следует из формулы (57), для функций q_+, q_- справедливы включения $q_+, q_-, (q_+)_t$, $(q_-)_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, а тогда по теореме 1 прямые задачи (58), (59), (60), (61) действительно имеют единственное решение в указанном классе. По следствию 2 теоремы 1, примененному к этим задачам, функции $v_+ = (u_+)_t$, $v_- = (u_-)_t \in V(\Omega_T^*)$ и удовлетворяют задачам

$$(Lv_+)(x,t) = (q_+)_t(x,t), \quad (x,t) \in \bar{\Omega}_T, \tag{62}$$

$$v_+(0,t) = 0, \quad v_+(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v_+(x,0) = q_+(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \notin A \cup B. \tag{63}$$

$$(Lv_-)(x,t) = (q_-)_t(x,t), (x,t) \in \bar{\Omega}_T, \tag{64}$$

$$v_-(0,t) = 0, \quad v_-(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v_-(x,0) = q_-(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \notin A \cup B. \tag{65}$$

По принятому предположению $f \ne 0$ и носитель каждой из функций $h^k(.,T)$ содержит отрезок $[a_k,b_k]$. В этом случае, как легко проверить простым перебором различных случаев возможных знаков этих функций (с учетом замечания о характере правой части уравнения (41), сделанного в начале доказательства), правая часть уравнений (58), (60) и либо правая часть уравнений (62), (64), либо начальные условия (63), (65) отличны от тождественного нуля. Тогда по следствию 2 из принципа максимума (лемма 1) получаем, что каждая из функций u_+, u_-, v_+, v_- не отрицательна в прямоугольнике Ω_T и строго положительна при $x \in \Omega$, $t = T$. Из условий переопределения (43) получим связь между функциями u_+, u_-. Для этого заметим, что в силу линейности прямой задачи (41), (42) и единственности ее решения справедливо равенство $u = u_+ - u_-$. Таким образом, из условия (43) получаем равенства

$$u_+(x,T) = u_-(x,T) = \psi^k(x), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{66}$$

Из определения пространства функций $U(\Omega_T)$ следует, что для функций ψ^k справедливы включения $\psi^k \in C^{2,\alpha}[a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$. Полагая в уравнениях (58), (60), $t = T$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, и используя равенства $v_+ = (u_+)_t$, $v_- = (u_-)_t$, получаем следующие условия:

$$v_+(x,T) = \psi^k_{xx}(x) + q_+(x,T), \quad v_-(x,T) = \psi^k_{xx}(x) + q_-(x,T), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{67}$$

Функции u_+, u_- непрерывны на замкнутом множестве $\bar{\Omega}_T$ и, следовательно, достигают на нем значения своего абсолютного максимума. Так как производные этих функций по t, функции v_+, v_- не отрицательны в прямоугольнике Ω_T,то эти положительные значения абсолютного максимума достигаются при $t = T$. Но, как это следует из принципа максимума для классических решений уравнения теплопроводности и леммы о нормальной производной (см. доказательство леммы 1), эти значения абсолютного положительного максимума могут достигаться только при $x \in (a_k, b_k)$, $k = 1,\dots,N$. Но на отрезках ω_k значения функций u_+, u_- совпадают, т.е. функции u_+, u_- принимают одинаковые значения абсолютного максимума в одних и тех же точках. Пусть для определенности $x^* \in (a_1, b_1)$ — точка такого абсолютного максимума. Рассмотрим условия (67) в этой точке. Получим следующие равенства:

$$v_+(x^*,T) - \psi^k_{xx}(x^*) = q_+(x^*T), \quad v_-(x^*,T) - \psi^k_{xx}(x^*) = q_-(x^*T). \tag{68}$$

Заметим, что в силу необходимого признака локального положительного максимума в точке x^* будет выполнено неравенство $\psi^k_{xx}(x^*) \le 0$. Из равенств (68) в этом случае следуют неравенства $q_+(x^*,T) > 0$, $q_-(x^*,T) > 0$. Покажем, что эти два условия приводят к противоречию. В самом деле, из этих неравенств и вида функций q_+, q_- следует, что в точке x^* обязательно выполнено или неравенство $f_1^+(x^*) > 0$, или неравенство $f_1^-(x^*) > 0$. Пусть для определенности выполнено первое из них. Тогда, естественно, справедливо равенство $f_1^-(x^*) = 0$. В этом случае значение функции q_+ в точке x^* будет равно

$$q_+(x^*,T) = f_1^+(x^*)(h^1(x^*,0))^+ + f_1(x^*)^+\int_0^T (h^1_\tau(x^*,\tau))^+ d\tau = f_1^+(x^*)(h^1(x^*,T))^+ > 0. \tag{69}$$

Из условия (69) следует, что $h^1(x^*,T))^+ > 0$, а значит, $h^1(x^*,T))^- = 0$. Но тогда по лемме 2 получаем, что $q_-(x^*,T) = 0$, что противоречит второму из равенств (68). Получили противоречие с предположением $f_1^+(x^*) > 0$. Совершенно также проверяется, что к противоречию приводит предположение $f_1^-(x^*) > 0$. Таким образом, пришли к противоречию с предположением о существовании точки максимума у функций u_+, u_- на промежутке (a_1, b_1). Аналогично проверяется, что точки максимума функций u_+, u_-отсутствуют на других отрезках $\bar{\varpi}^{(k)}, k = 1,\dots,N$. Но это противоречит непрерывности функций u_+, u_- на прямоугольнике $\bar{\Omega}_T$. Противоречие возникло из предположения, что существует нетривиальное решение задачи (41)–(43). Значит, оно не верно. Теорема 3 полностью доказана.

3. ТЕОРЕМЫ ФРЕДГОЛЬМА И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА (38)–(40)

Вопрос о разрешимости обратной задачи (38)–(40) тесно связан с разрешимостью однородной обратной задачи, соответствующей этой задаче. Однородной обратной задачей, соответствующей задаче (38)–(40), будем называть задачу (38)–(40) при $\varphi = 0$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $g = 0$, $\chi_k = 0$, $k = 1,\dots,N$, т.е. задачу определения функций $(u, f) \in U(\Omega_T) \times F^\alpha$ из условий (41)–(43). Связь между задачами (38)–(40) и (41)–(43) устанавливает следующее утверждение, указывающее на некоторую аналогию между теорией Фредгольма, справедливой для уравнений II рода с компактным оператором в банаховом пространстве, и характером разрешимости обратной задачи (38)–(40).

Теорема 4. *Пусть для функций* h *справедливы включения* $h^k, h_t^k \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, *при этом* $\left|h^k(x,T)\right| \ge h_T > 0$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, *где* $h_T > 0$ – *некоторая постоянная. Тогда однородная обратная задача* (41)–(43) *может иметь только конечное число линейно независимых решений. Если дополнительно к этому выполнены условия единственности, сформулированные в теореме* 2 *или теореме* 3, *то для любых функций* $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, $\mu_1, \mu_2 \in C[0,T]$, *удовлетворяющих условиям согласования* $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$ *и любых функций* $g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\theta_k \in C^{\alpha}[a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, *неоднородная обратная задача* (38)–(40) *имеет единственное решение*, *пару функций* (u, f), *удовлетворяющую условиям* (38), (39) *и условиям переопределения* (40) *с некоторыми, однозначно определенными функциями* $\chi \in H^{2,\alpha}$, *при этом для этих функций справедливы равенства* $(\chi_k(x))_{xx} = \theta_k(x)$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$.

Доказательство. Покажем сначала, что если выполнены условия $\left|h^k(x,T)\right| \ge h_T > 0$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, то функция f удовлетворяет в банаховом пространстве F^{α} уравнению Фредгольма II рода с компактным оператором. Определим линейный оператор $A\colon F^{\alpha} \to F^{\alpha}$ по следующему правилу:

$$(A(f))_k(x) = v(x,T;f)/h^k(x,T), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{70}$$

В формуле (70) обозначена для наглядности функция $v(x,T;f) = v(x,t)$, $t = T$, где $v(x,t)$ – решение прямой задачи (45), (46). Тогда условие (40) в силу следствия 2 теоремы 1 можно, аналогично получению условий (67), записать в виде

$$f_k(x) = (A(f))_k(x) - [(\chi_k)_{xx}(x) - (u_0)_{xx}(x,T)]/h^k(x,T), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{71}$$

В уравнении (71) функция $u_0 \in U(\Omega_T)$ есть решение прямой задачи (3), (4). Определим функцию $p \in F^{\alpha}$ по правилу

$$p_k(x) = -[(\chi_k)_{xx}(x) - (u_0)_{xx}(x,T)]/h^k(x,T), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{72}$$

Тогда условие (71), с учетом обозначения (72), примет вид линейного уравнения

$$f = Af + p. \tag{73}$$

В силу следствия 1 теоремы 1, компактности вложения пространства F^{δ} в пространство F^{α}, при условии, что $\alpha < \delta$ (см. [3, с. 147]), и свойств компактных операторов (см. [15, с. 243]), оператор A будет компактным. Таким образом, уравнение (73) будет уравнением II рода с компактным оператором в банаховом пространстве, для которого верны все теоремы Фредгольма (см. [15, с. 468]). Для однородной обратной задачи $p = 0$. Тогда по третьей теореме Фредгольма получаем, что однородное уравнение (73) имеет конечное число линейно независимых решений. Отсюда следует, что однородная обратная задача (41)–(43) в силу линейности также имеет конечное число линейно независимых решений. Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Для доказательства других утверждений воспользуемся справедливостью для уравнения (73) второй теоремы Фредгольма (альтернативы Фредгольма). Заметим, что справедливость условий теоремы 2 означает, что норма оператора A как оператора, действующего из банахового пространства $C_N = C[a_1, b_1] \times \ldots \times C[a_N, b_N]$ в себя, меньше единицы. Отсюда следует, что однородное уравнение (73) имеет только тривиальное решение. Тогда из альтернативы Фредгольма следует, что для любых функций $p \in F^{\alpha}$ уравнение (73) имеет единственное решение. В этом случае для построения решения обратной задачи (38)–(40) фиксируем функции $\theta \in F^{\alpha}$, находим функции p, решая прямую задачу (3), (4), находим решение уравнения (73), функции f (в случае справедливости теоремы 2 можно, очевидно, применить метод последовательных приближений) и с этими функциями решаем прямую задачу (1), (2). Покажем, что в этом случае найденный набор функций (u, f) будет удовлетворять всем условиям (38)–(40). Справедливость уравнения (38) и условий (39) очевидна по построению. Так как решение прямой задачи (38), (39) единственно, то при $t = T, x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, получим некоторые, однозначно определенные функции $\chi \in H^{2,\alpha}$. В соответствии со следствием 2 теоремы 1 и определением оператора A получим, что $(\chi_k(x))_{xx} = \theta(x)$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$. Таким образом, в случае справедливости условий единственности обратной задачи, сформулированных в теореме 2, теорема 4 полностью доказана. Докажем теорему 4 для случая условий единственности решения обратной задачи (38)–(40), доказанных в теореме 3. Для этого, как это следует из анализа только что проведенных рассуждений, достаточно доказать, что однородное уравнение (73) в условиях справедливости теоремы 3 имеет только тривиальное решение. Докажем это. От противного. Пусть выполнены условия теоремы 3, но набор функций $f \in F^{\alpha}$, $f \neq 0$ удовлетворяет уравнению (73) при $p = 0$. Пусть $u \in U(\Omega_T)$ – решение прямой задачи (41), (42), существующее по теореме 1. Тогда эта функция удовлетворяет условиям

$$(Lu)(x,t) = f_k(x)h^k(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{74}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{75}$$

$$u(x,T) = \zeta_k(x), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{76}$$

В условиях (76) для получившегося как следы решения прямой задачи (74), (75) на отрезках ω_k набора функций $\zeta = \zeta_k(x)$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, в соответствии с теоремой 1, справедливо включение $\zeta \in H^{2,\alpha}$. В соответствии со следствием 2 теоремы 1 для функции $v = u_t$ будет справедлива следующая задача:

$$(Lv)(x,t) = v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = f_k(x)h_t^k(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{77}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v(x,0) = f_k(x)h^k(x,0), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \notin A \cup B. \tag{78}$$

$$v(x,T) = (\zeta_k(x))_{xx} + f_k(x)h^k(x,T), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{79}$$

Условие (79), используя определение оператора A, можно представить в виде

$$(f - Af)_k(x) = (\zeta_k)_{xx}(x)/h^k(x,T), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{80}$$

Так как f – нетривиальное решение однородного уравнения (73), то $(\zeta_k)_{xx}(x)/h^k(x,T) = 0$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$. Покажем, что это приводит к противоречию. Представим функцию f в виде (53) и рассмотрим функции u_+, u_- как решения задач (58), (59) и (60), (61) соответственно. Из условий (74), (75) следует, что $u = u_+ - u_-$. Из задач (62), (63), (64), (65) и принципа максимума, аналогично доказательству теоремы 3, получаем, что $v_+(x,T) = (u_+)_t(x,T) > 0$, $v_-(x,T) = (u_-)_t(x,T) > 0$, $(x,t) \in \Omega_T$. При $t = T$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, для этих функций справедлива связь

$$\psi^k(x) = u_+(x,T) = u_-(x,T) + \zeta_k(x), \quad x \in [a_k, b_k], \quad k = 1,\dots,N. \tag{81}$$

Далее рассуждаем аналогично доказательству единственности в теореме 3. Пусть точка (x^*,T), $x^* \in (a_1, b_1)$ точка абсолютного максимума функции u^+. Тогда из условий (81) и уравнений (62), (64) получаем в этой точке условия

$$v_+(x^*,T) - \psi_{xx}^k(x^*) = q_+(x^*,T), \quad v_-(x^*,T) - \psi_{xx}^k(x^*) - (\zeta_k)_{xx}(x^*) = q_-(x^*,T). \tag{82}$$

Так как в точке абсолютного максимума функции u_+ выполнено условие $\psi_{xx}^k(x^*) \le 0$, то в этой точке также будет выполнено неравенство $(u_+)_{xx}(x^*,T) = (u_- + \zeta)_{xx}(x^*,T) = (u_-)_{xx}(x^*,T) \le 0$. Но тогда, как это показано при доказательстве теоремы 3, из неравенств $q_+(x^*,T) > 0$, $q_-(x^*,T) > 0$ получаем противоречие с существованием у функции u_+ максимума. Источник противоречия – предположение о существовании нетривиального решения однородного уравнения (73). Теорема 4 полностью доказана.

4. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (38)–(40).

Рассмотрим предварительно простой пример обратной задачи (38)–(40) при $N = 1$, $h = 1$, $0 < a < b < l$. В этом случае требуется найти пару функций $(u, f) \in U(\Omega_T) \times C^{\alpha}[a,b]$ из условий

$$(Lu)(x,t) = f(x), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{83}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad u(x,0) = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{84}$$

$$u(x,T) = \chi(x), \quad x \in [a,b]. \tag{85}$$

В уравнении (83), в соответствии с предыдущими обозначениями, функция $h(x,t) \equiv 1$. Так как $h_t(x,t) \equiv 0$, то в соответствии с теоремой 4 обратная задача (83)–(85) имеет единственное решение, определяемое с помощью функции χ_{xx}. Уравнение для определения функции f, в соответствии с рассмотрениями этой теоремы, имеет вид

$$f(x) - v(x,T;f) = (f - A(f))(x) = -\chi_{xx}(x), \quad x \in [a,b]. \tag{86}$$

В уравнении (86) функция $v(x,t) = v(x,t;f)$ является решением прямой задачи

$$(Lv)(x,t) = v_t(x,t) - v_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{87}$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad t \in [0,T], \quad v(x,0) = f(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad x \neq a,b. \tag{88}$$

Как показано в теореме 4, уравнение (86) имеет единственное решение для любых функций $\chi_{xx} \in C^{\alpha}[a,b]$. Пусть теперь функция $\chi \in C^{2,\alpha}[a,b]$ такова, что $\chi_{xx} \equiv 0$, $\chi \neq 0$. В этом случае уравнение (86), в соответствии с ранее доказанным, имеет только тривиальное решение. Но тогда будет нулевым и решение прямой задачи (83), (84), что противоречит условию $\chi \neq 0$. Таким образом, для любой линейной и отличной от нуля функции χ обратная задача (83)–(85) решений не имеет. Получим дополнительные условия для функции χ, при которых существует решение обратной задачи (83)–(85). Для этого заметим, что между функциями f и χ_{xx}, как установлено теоремой 4, существует взаимно однозначное соответствие. Функция $\chi(x)$ удовлетворяет условиям

$$\chi_{xx}(x) = v(x,T;f) - f(x), \quad a < x < b, \tag{89}$$

$$\chi(a) = u(a,T;f), \quad \chi(b) = u(b,T;f), \tag{90}$$

где функции $v(x,t;f) = v(x,t)$, $u(x,t;f) = u(x,t)$ удовлетворяют соответственно условиям (87), (88) и (83), (84). Из теоремы 4 следует, что функция f однозначно определяется из уравнения (86). В этом случае можно определить оператор $B: C^{\alpha}[a,b] \to C^{\alpha}[a,b]$, определив его для любой функции $\mu \in C^{\alpha}[a,b]$ по правилу

$$(B\mu)(x) = ((E - A)^{-1}\mu)(x), \quad x \in [a,b]. \tag{91}$$

Тогда условия (90) можно записать в виде

$$\chi(a) = u(a,T;-B(\chi_{xx})), \quad \chi(a) = u(b,T;-B(\chi_{xx})). \tag{92}$$

Так как решение краевой задачи относительно функции χ из условий (89), (90) определяется однозначно, то условия (90) являются условиями согласования между функцией χ и ее второй производной χ_{xx} в граничных точках отрезка $[a,b]$. Так как каждая обратная задача (83)–(85) является прямой задачей (83), (84) то эти условия согласования являются необходимыми и достаточными для того, чтобы произвольная функция $\chi \in C^{2,\alpha}[a,b]$ была следом решения прямой задачи (83), (84) при $t = T, x \in [a,b]$.

Проведем аналогичные построения в общем случае $N > 1$ для обратной задачи (38)–(40). Будем предполагать выполненными для функций h условия теоремы 4, т.е. $\left|h^k(x,T)\right| \geq h_T > 0$, $x \in [a_k,b_k]$, $k = 1,\ldots,N$, и условия единственности, сформулированные в теореме 2 или теореме 3. В этом случае определим оператор $B: F^{\alpha} \to F^{\alpha}$ для любых функций $\mu \in F^{\alpha}$по правилу

$$(B\mu)(x) = ((E - A)^{-1}\mu)(x), \quad x \in [a_k,b_k], \quad k = 1,\ldots,N. \tag{93}$$

В формуле (93) E, как обычно, единичный оператор, оператор B, в соответствии с теоремой 4 и теоремой Банаха об обратном операторе, линейный ограниченный оператор.

Будем говорить, что функции $\chi \in H^{2,\alpha}$ удовлетворяют условиям согласования, если для них выполнены равенства

$$\chi(a_k) = u(a_k, T; -B(\chi_{xx} + u_0(x,T))), \quad \chi(b_k) = u(b_k, T; -B(\chi_{xx} + u_0(x,T))), \quad k = 1,\dots,N. \tag{94}$$

Роль условий согласования в этом случае проясняет следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть для функций h выполнены условия теоремы* 4, *справедливы включения* $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, $\mu_1, \mu_1 \in C[0,T]$, $g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $f_k \in C^{\alpha}[a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, *выполнены условия согласования* $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$. *Тогда функции* $\chi \in H^{2,\alpha}$ *будут следами решений прямой задачи* (1), (2) *на отрезках* $\bar{\omega}_k$, $k = 1,\dots,N$, *в том и только в том случае, когда для них будут выполнены условия согласования* (94).

Доказательство леммы 3 проводится совершенно аналогично доказанному выше аналогичному утверждению для случая $N = 1$.

Для обратной задачи (38)–(40) получаем окончательно следующую теорему существования и единственности.

Теорема 5. *Пусть для функций h справедливы включения* $h^k, h^k_t \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, *при этом* $\left|h^k(x,T)\right| \geq h_T > 0$, $x \in [a_k, b_k]$, $k = 1,\dots,N$, *где* $h_T > 0$ *— некоторая постоянная, выполнены условия единственности, сформулированные в теореме* 2 *или теореме* 3, *то для любых функций* $\varphi \in C(\bar{\Omega})$, $\mu_1, \mu_2 \in C[0,T]$, *удовлетворяющих условиям согласования* $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$, *любых функций* $g \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{\Omega}_T)$, $\chi \in H^{2,\alpha}$, *удовлетворяющих условиям согласования* (94), *обратная задача* (38)–(40) *имеет единственное решение, пару функций* (u, f), *удовлетворяющую условиям* (38)–(40).

Доказательство теоремы 5 проводится совершенно аналогично случаю $N = 1$, рассмотренному в начале раздела.

В заключение автор выражает глубокую благодарность всем участникам семинара по обратным задачам на механико-математическом факультете МГУ под руководством В.А. Садовничего и А.И. Прилепко за интерес, проявленный к изложенным выше исследованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
2. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
3. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. М.: Наука, 1971.
4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, т. 4. М.: ГИФМЛ, 1958.
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, т. 2. М.: ГИФМЛ, 1961.
6. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.
7. *Денисов А.М.* Задачи определения неизвестного источника в параболическом и гиперболическом уравнениях // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 5. С. 830–835.
8. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.
9. *Лаврентьев М.М.* Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1973.
10. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York–Basel: Marcel Dekker Inc. 2000.
11. *Isakov V.* Inverse problems for Partial Differential Equations. New York.: Springer, 2006.
12. *Костин А.Б.* Обратная задача восстановления источника в параболическом уравнении по условиям нелокального наблюдения // Матем. сб. 2013. Т. 204. № 10. С. 3–46.
13. *Соловьёв В.В.* О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 9. С. 1577–1583.
14. *Соловьёв В.В., Ткаченко Д.С.* Определение источника в уравнении теплопроводности для случая негладких краевых и начальных условий // Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”, 2017. Т. 6. С. 1–9.
15. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981.