

УДК 517.95

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ПУАЗЕЙЛЯ–КУЭТТА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ¹⁾

© 2020 г. В. Б. Заметаев^{1,2,3}

¹ 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия

² 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, ФИЦ ИУ РАН, Россия

³ 140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ЦАГИ, Россия

e-mail: zametaev.vb@mipt.ru

Поступила в редакцию 17.05.2020 г.

Переработанный вариант 20.05.2020 г.

Принята к публикации 01.06.2020 г.

В работе рассматривается развитое турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости в канале малой толщины при больших числах Рейнольдса. Мгновенная скорость потока представлена как сумма стационарной компоненты и малых возмущений, вообще говоря, отличных от традиционной осредненной скорости и пульсаций. Исследование ограничивается поиском и рассмотрением именно стационарных составляющих решения. Для анализа задачи асимптотический метод многих масштабов применяется к уравнениям Навье–Стокса, а не к уравнениям Рейнольдса, что позволяет найти и исследовать такое стационарное течение в канале без каких-либо гипотез замыкания. Основным явлением в течении Пуазейля оказывается самоиндуцированное перетекание жидкости из центра канала к стенкам, что обеспечивает подачу кинетической энергии из зоны максимальной скорости в зону генерации турбулентности вблизи обтекаемых стенок, хотя суммарная осредненная нормальная скорость конечно равна нулю. Стационарные решения для нормальной и продольной скоростей оказываются вязкими на всей толщине канала, что подтверждает хорошо известную физическую концепцию крупномасштабной “турбулентной вязкости”. Библ. 15. Фиг. 5.

Ключевые слова: турбулентность, течение в канале, математическое моделирование, асимптотические методы.

DOI: 10.31857/S0044466920090185

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной статьи является асимптотический анализ полных уравнений Навье–Стокса для описания свойств турбулентного течения в плоском канале без дополнительных, даже физически обоснованных гипотез замыкания. В работе не исследуются уравнения Рейнольдса (RANS) с некоторыми гипотезами замыкания, используя асимптотические методы (всесторонне изученные многими авторами, например, в [1]–[3]), а уравнения Навье–Стокса в предположении большого числа Рейнольдса, малой толщины канала и малой амплитуды турбулентных пульсаций. Течение в канале является классическим объектом исследования, поэтому в статье не будут описываться хорошо известные многочисленные экспериментальные, теоретические и расчетные результаты (DNS), кроме существенных для целей данной работы.

Исследование опирается на результаты работ [4]–[6], в которых для анализа нестационарных уравнений Навье–Стокса используется метод многих масштабов. Предложенный в этих статьях метод был успешно применен авторами для тонкого турбулентного слоя смешения [4], для тонкой турбулентной двумерной свободной струи [5] и для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине [6]. Оказалось, что для таких, в осредненном смысле “двумерных” течений, можно представить искомые скорости как сумму стационарных и малых пульсационных составляющих, вообще говоря, не совпадающих с классическими осредненными и пульсационными

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 20-11-20006) в МФТИ. Компьютерная поддержка обеспечена в ЦАГИ и ФИЦ ИУ РАН.

величинами. Для стационарных составляющих вертикальной и продольной скоростей удалось выделить универсальную вязкую систему уравнений, причем характерный вязкий размер – это толщина изучаемого тонкого слоя. Иными словами, данные исследования подтверждают концепцию “турбулентной вязкости”, характерный размер которой заметно превышает масштаб вязкой диссипации Колмогорова. Такие стационарные решения были названы авторами вторичными, так как являются следствием быстрых пульсаций в турбулентных потоках. Важно отметить, что основным явлением в продольных тонких несжимаемых турбулентных течениях является вертикальное стационарное перетекание жидкости из областей с высокими скоростями в зону генерации турбулентности. Уравнение для вертикальной стационарной скорости оказывается вязким и нелинейным, оно отделяется и может быть решено независимо от продольного стационарного течения. Это означает основную роль именно вертикального стационарного перетекания, а продольное течение оказывается зависимым и управляется также вязким уравнением. В работах [4]–[6] удалось найти аналитические решения сформулированной фундаментальной системы уравнений.

Закономерный вопрос о поведении турбулентных пульсаций в описанных течениях изучался в частном случае в работах [7], [8]. В последней из них было проведено асимптотическое исследование двухмерных вязких пульсаций в несжимаемом турбулентном пограничном слое (ТПС), развивающемся вдоль плоской пластины. Рассмотрение коснулось только локальной задачи в зоне генерации турбулентности и в ламинарном вязком подслое.

В данной статье предложенный метод применяется для отыскания стационарного регулярно-го решения в канале на длинах, сравнимых с длиной канала. Для анализа полных нестационарных уравнений Навье–Стокса используется метод многих масштабов, в котором число Рейнольдса велико, относительная толщина канала мала и амплитуда пульсаций стремится к нулю. В исследовании показывается, что выведенная ранее фундаментальная система уравнений справедлива для плоского канала и может быть решена для известных классических течений.

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

Рассматривается турбулентный направленный поток вязкой несжимаемой жидкости в канале длины L и толщины $2h$ (см. фиг. 1). Характерные время, размер и максимальная скорость потока равны L/U_c , L , U_c соответственно, поперечный размер канала бесконечен. Давление вводится по формуле $p_{\text{phys}} = p_0 + (\Delta p/L)x + \rho U_c^2 p$, где Δp – перепад давления вдоль канала, ρ – плотность жидкости. Все гидродинамические функции, длины и время обезразмерены традиционным способом, используя введенные параметры потока. Здесь и далее все величины и уравнения предполагаются безразмерными, а половинная толщина канала $\delta = h/L$ полагается малой величиной. Число Рейнольдса вводится как $Re = \rho U_c L/\mu$ и предполагается большим в данном асимптотическом исследовании, μ – коэффициент динамической вязкости. Традиционно при исследовании внутренних течений число Рейнольдса вычисляется по толщине канала, однако в данной работе более удобно его вычислять по длине. Данный выбор не является принципиальным, но более удобен для автора при сопоставлении с другими тонкими турбулентными течениями. Предполагается, что течение в канале является турбулентным, имея в виду наличие малых пульсаций давления и скоростей относительно некоторого основного стационарного профиля продольной скорости $u_0(y_1)$.

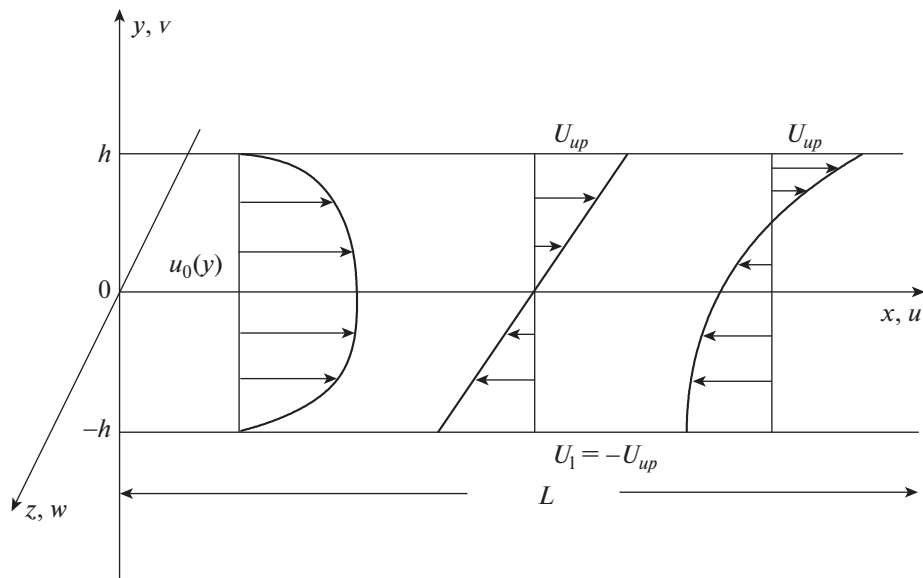
Удобно записать безразмерные уравнения Навье–Стокса для приращения давления p , нормальной скорости v , поперечной скорости w и продольной скорости u в виде

$$\nabla^2 p = -2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} - 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.4)$$



Фиг. 1. Схема изучаемых течений в канале: течение Пуазейля (слева), течение Куэтта (в середине) и поток с нулевым напряжением трения на нижней стенке (справа).

Для решения системы (2.1)–(2.4) используется метод многих масштабов, поскольку течение содержит как минимум два очевидных характерных размера: длину L и толщину $2h$. Но поскольку метод является асимптотическим, возникает принципиальный вопрос о форме асимптотического разложения решения. Обычно при рассмотрении турбулентных течений предполагается [9], что в основной части канала можно ввести осредненный профиль скорости, относительно которого имеются пульсации, но эта осредненная скорость имеет логарифмическое поведение при приближении к стенкам. Осредненная амплитуда пульсаций, рассчитанная за некоторый длительный период времени, полагается равной нулю. Однако такой подход не является достаточно общим с математической точки зрения, если решение значительно варьируется по всем осям и неизвестен период осреднения. В данной статье вместо осредненного рассматривается и ищется некоторый стационарный регулярный профиль скорости u_0 , а уже к нему добавляются пульсации. Мгновенную скорость можно получить, сложив стационарную скорость u_0 и пульсации, среднее значение которых, вообще говоря, не равно нулю. Теория таких пульсаций, которые имеют особенность на обтекаемой поверхности, была предложена в [7], [8].

Дальнейший анализ в статье опирается на принципиальный факт, найденный в экспериментах [9], [10] и в теории [11], согласно которому основная часть кинетической энергии пульсаций содержится в так называемых невязках вихрях, принадлежащих «инерционному» диапазону спектра. Их характерные размеры в канале равны по порядку величины по всем осям и сопоставимы с толщиной канала δ (см. фиг. 1). Такая кубическая, невязкая в главном приближении область течения будет рассматриваться в качестве основной в дальнейшем анализе. Далее в статье учитывается, что, согласно гипотезе Рейнольдса, квадраты пульсаций (осредненные величины которых известны как напряжения Рейнольдса) должны влиять на основной поток. В результате получаем формальные оценки для пульсаций в тонком канале

$$\left. \begin{aligned} v' \partial u' / \partial y' &\sim u_0 \partial u_0 / \partial x \\ x' \sim y' \sim z' &\sim \delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow v' \sim u' \sim w' \sim \delta^{1/2}.$$

Найдено, что амплитуды пульсаций должны быть малы в тонком канале, хотя в реальных течениях это может быть и не так. Однако статья посвящена моделированию турбулентного течения асимптотическими методами и данное предположение вполне допустимо. Из приведенных

выше фактов и предположений следует, что асимптотические разложения решения и характерные переменные следует искать при $\delta \rightarrow 0$, $\text{Re} \rightarrow \infty$ в виде

$$\begin{aligned} u &= u_0(y_1) + \delta^{1/2} u_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta u_2 + \dots, \\ v &= \delta^{1/2} v_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta v_2 + \dots, \\ w &= \delta^{1/2} w_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta w_2 + \dots, \\ p &= \delta^{1/2} p_1(x_1, y_1, z_1, t_1, x) + \delta p_2 + \dots, \\ y_1 &= \frac{y}{\delta}, \quad x_1 = \frac{x}{\delta}, \quad z_1 = \frac{z}{\delta}, \quad t_1 = \frac{t}{\delta}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Искомые функции зависят от медленной переменной x , нормированной на длину канала, и от быстрых переменных, обозначенных индексом 1. Быстрые переменные, в том числе время, нормированы на толщину канала δ . Хорошо известно, что в турбулентных течениях существуют и другие масштабы, например, малый вязкий размер Колмогорова, однако в данном исследовании любые другие масштабы будут вводиться по мере необходимости.

Подставляя асимптотические разложения (2.5) в (2.1)–(2.4) и последовательно выделяя старшие члены в уравнениях Навье–Стокса, получаем в качестве главной систему уравнений для возмущений первого порядка v_1 , p_1 и w_1 , u_1 :

$$\begin{aligned} O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \quad & \frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 p_1}{\partial z_1^2} + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \\ O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \quad & \frac{\partial v_1}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0 + O\left(\frac{1}{\text{Re} \delta}\right), \\ & y_1 = \pm 1: \quad v_1 = 0; \quad \frac{\partial p_1}{\partial y_1} = 0, \\ O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \quad & \frac{\partial w_1}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1} = 0 + O\left(\frac{1}{\text{Re} \delta}\right), \\ O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \quad & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В результате найдена невязкая линейная система уравнений, введенная ранее в [12], для описания эволюции малых возмущений в канале. Для полноты изложения в (2.6) указаны порядки величин отброшенных вязких членов. Отметим, что уравнения для пульсаций v_1 , p_1 отделяются и представляют собой замкнутую задачу, в которой только лапласиан давления является трехмерным. Это означает, что если в канале с базовой скоростью u_0 имеется турбулентное течение, то основными являются пульсации v_1 , p_1 . Зная p_1 , можно найти поперечные пульсации w_1 из соответствующего уравнения импульса и продольные пульсации u_1 из уравнения неразрывности.

В теории устойчивости решения невязкой линейной задачи (2.6) традиционно ищутся в виде бегущих волн $v_1 \sim \exp(i\alpha(x_1 - ct_1))$, причем α действительное, см. [13]. Следует отметить, что такие решения (названные автором решениями Первого типа) ограничены вблизи обтекаемой поверхности, в отличие от турбулентных пульсаций, которые нарастают по мере приближения к стенке. Решения первого типа хорошо известны в теории устойчивости, но, по-видимому, неприменимы для изучения турбулентности.

Второй тип невязких решений системы (2.6), имеющих сингулярность на обтекаемых стенках, был предложен в работах [7], [8] как более соответствующий турбулентным течениям.

Система (2.6) однородна и содержит производные только по быстрым переменным и в общем случае пульсации v_1 , p_1 , u_1 должны иметь в качестве слагаемых стационарные члены (обозначим их как Третий тип решений), зависящие от медленной переменной x . Что касается пульсации w_1 , то, если нет физических причин для появления стационарной поперечной скорости в исследуемом потоке, то и такого члена не должно быть. В результате, в общем случае, в силу линейности

задачи (2.6), любое ее решение является суперпозицией функций всех трех типов. Уместно выделить явно стационарные медленные члены в решении

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10}(x, y_1) + v_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), & p_1 &= p_{10}(x) + p_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), \\ w_1 &= w_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), & u_1 &= u_{10}(x, y_1) + u_{11}(x_1, y_1, z_1, t_1, x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подстановка формул (2.7) в (2.6) показывает, что медленные функции с индексами, содержащими ноль, не влияют на решение системы (2.6) и она может быть переписана без изменений для v_{11}, p_{11} .

Медленные функции v_{10}, u_{10} остаются произвольными при рассмотрении задачи (2.6) и если v_{10} нетривиальна, то в течении можно выделить стационарный обмен жидкостью между центральной областью канала и пристеночными зонами. Важно подчеркнуть, что стационарная вертикальная скорость v_{10} не зависит от быстрой переменной x_1 . Такое решение ранее не было известно и представляет особый интерес. В данной статье будут изучаться именно эти медленные стационарные нормальные скорости в каждом приближении, как имеющие особое значение, хотя из физики течения в каналах ясно, что суммарная осредненная вертикальная скорость конечно должна быть нулем.

Анализ турбулентного течения, приведенный в данной статье, в принципиальных моментах совпадает с методом, изложенным в работах [4]–[6], и фундаментальная система уравнений для стационарных скоростей в канале оказывается в точности такой же. Поэтому вывод данной системы, учитывающий особенности течения несжимаемой вязкой жидкости в канале, вынесен в Приложение. Уместно отметить, что при произвольных v_{10}, u_{10} задача для вертикальной стационарной скорости во втором приближении оказывается неоднородной и допускает линейный рост скорости v_2 по быстрой переменной x_1 , что нарушает справедливость асимптотического разложения (2.5). В работе удалось найти условие разрешимости, при выполнении которого скорость v_2 не растет линейно и разложения (2.5) справедливы. Это условие сводится к следующей нелинейной системе дифференциальных уравнений относительно v_{10}, u_{10} :

$$\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} v_{10}''' - v_{10} v_{10}'' + (v_{10}')^2 = 0, \quad \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} u_{10}'' - v_{10} u_{10}' + v_{10}' u_{10} = 0. \quad (2.8)$$

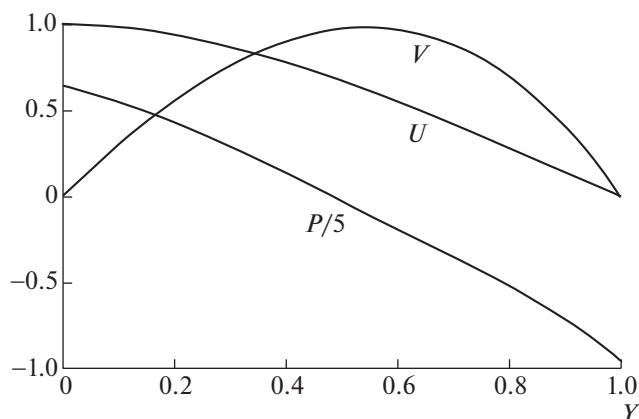
3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

3.1. Течение Пуазейля в канале

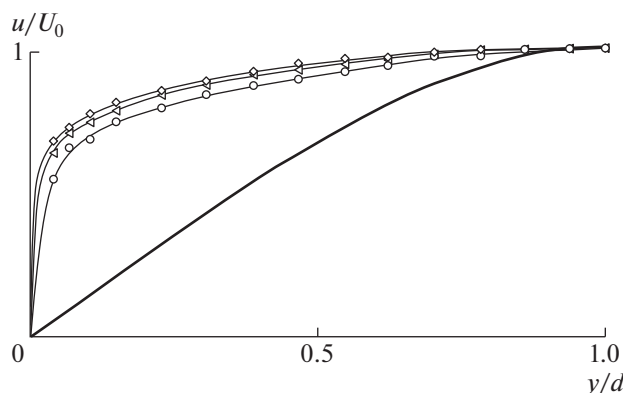
Удобно сформулировать исследуемую задачу, вводя нормированные вторичные стационарные скорости и давление по следующим формулам:

$$\begin{aligned} u_0 &= U(y_1), & v_{10} &= \frac{V(y_1)}{\text{Re} \delta^{3/2}}, & p_{20} &= \left(\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \right)^2 P(y_1), & y_1 &= [-1; 1], \\ V''' - VV'' + V'^2 &= 0, & V(0) &= V(1) = 0, & V'(0) &= \gamma, \\ U'' - VU + VU &= 0, & U(0) &= 1, & U'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В силу симметрии течения целесообразно рассмотреть половину канала и выполнить два условия непротекания для скорости V : на оси симметрии канала и на стенке и, задавая производную вертикальной скорости на оси $V'(0)$ в качестве третьего условия, можно найти различные решения сформулированной задачи. Однако существует единственное значение $\gamma = 3.21$, при котором продольная вторичная скорость U симметрична относительно оси канала и равна нулю на стенке (см. фиг. 2). Из рисунка видно, что скорость $V > 0$, т.е. происходит стационарный отток высокоэнергетической жидкости из центральной части канала к стенкам в зону генерации турбулентности. С другой стороны, совершенно ясно, что осредненная, нормальная к оси канала скорость должна быть равна нулю в любой точке внутри канала. Таким образом, можно констатировать два эффекта с противоположным действием: стационарное вязкое течение из центральной части канала в сторону стенки с вязким размером порядка толщины канала и пульсации, генерация которых сосредоточена на малых размерах вблизи стенки и которые распространяются по всей толщине канала, компенсируя в среднем найденную стационарную скорость. Давление также падает от центра канала к стенке. Следует отметить свойства гладкости вторичного решения: давление на оси канала непрерывно, но его первая производная разрывна. Ско-



Фиг. 2. Теоретическое стационарное решение для течения Пуазейля.



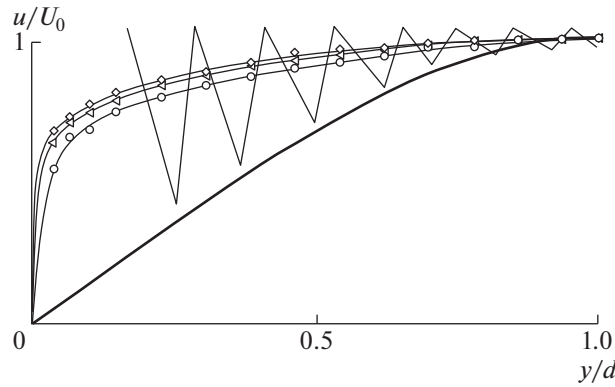
Фиг. 3. Вторичная стационарная теоретическая скорость, наложенная на эксперимент Лауфера [14].

рость V и ее первая производная на оси непрерывны, но ее вторая производная является разрывной. Функция U непрерывна на оси вместе с ее первой и второй производными.

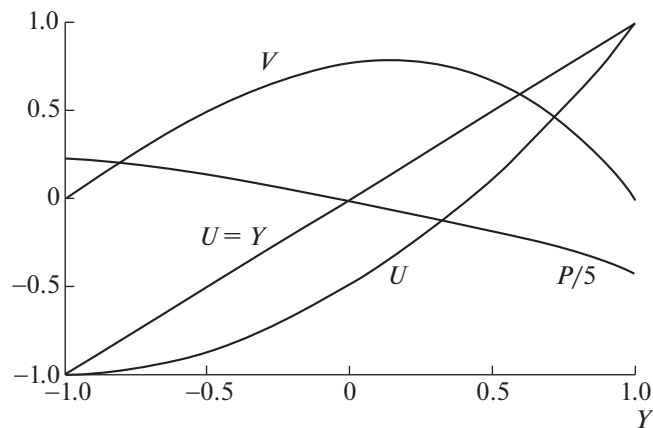
На фиг. 3 стационарная вторичная скорость U нанесена на распределение осредненной скорости из эксперимента Лауфера [14]. Для этого были совмещены скорости на стенке и на оси канала.

Именно на фоне такого профиля вторичной стационарной скорости могут поддерживаться турбулентные пульсации в канале, а перенос жидкости из ядра потока к стенкам канала обеспечивает турбулентные пульсации кинетической энергией. Зона генерации турбулентности находится рядом с обтекаемой стенкой и именно туда должна подаваться высокоэнергетическая жидкость из ядра потока. Это фундаментальная проблема снабжения энергией. Стоит отметить, что основной профиль продольной скорости находится из уравнения для линейных возмущений, т.е. процедуру осреднения следует использовать с осторожностью при анализе турбулентных течений.

Следует сказать, что в данной асимптотической модели при приближении к стенке вторичная продольная стационарная скорость существенно отличается от экспериментальных результатов, в отличие от работ [4], [5] для свободной турбулентности. Это отличие является естественным, так как существует сильная сингулярность в пульсациях скорости непосредственно около стенки, а влияние пульсаций в канале является существенным вплоть до центра. Аналитические пульсации такого типа были описаны в [7], [8] для частного двухмерного случая. Качественно структура турбулентного потока в канале показана на фиг. 4, а именно, мгновенная скорость представляет собой сумму стационарной части и сингулярных пульсаций (условно показаны ломаной линией).



Фиг. 4. Предлагаемая структура скорости в течении Пуазейля как сумма стационарной составляющей и сингулярных пульсаций (показаны ломаной линией).



Фиг. 5. Распределение вторичных стационарных скоростей и давления в течении Куэтта–Пуазейля без градиента (кривая $U = Y$) и с заданным градиентом (кривая U) давления. Напряжение трения равно нулю на нижней стенке.

3.2. Турбулентное течение Куэтта в канале

Ламинарные и турбулентные течения Куэтта хорошо известны, и их осредненные скорости могут быть взяты, например, из [15]. Линейный профиль скорости соответствует ламинарному течению Куэтта, а в турбулентном случае профиль скорости существенно менее наполнен и имеет максимальные скорости на движущихся стенках. Течение обладает свойством антисимметрии. Примечательно, что самые быстрые жидкие частицы уже находятся прямо у стенок в зонах генерации турбулентности и передача кинетической энергии в зоны генерации не требуется.

В результате задача для стационарных составляющих скорости в течении Куэтта может быть сформулирована следующим образом:

$$\begin{aligned} V''' - VV'' + V'^2 &= 0, & V(-1) = V(1) &= 0, & V(0) &= 0, \\ U''' - VU'' + V'U &= 0, & U(-1) &= -1, & U(1) &= 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение задачи в канале оказывается вырожденным с нулевой вторичной скоростью, перпендикулярной стенке, $V = 0, U = Y, Y \in [-1; 1]$, и это объяснимо, поскольку частицы жидкости, имеющие максимальные скорости, уже находятся в зоне генерации турбулентности вблизи стенок.

3.3. Течение Куэтта–Пуазейля с нулевым напряжением трения на нижней стенке

Накладывая градиент давления на течение Куэтта, можно найти целый класс так называемых течений Куэтта–Пуазейля. В исследуемой формулировке уравнение (3.2) для V допускает раз-

личные решения для разных значений $V'(-1) = \gamma$. Например, на фиг. 5 показано решение для $\gamma = 1.13$, которое соответствует нулевому напряжению трения на нижней подвижной пластине канала. Видно, что положительная скорость V означает отток жидкости в верхнюю часть канала, давление падает в том же направлении. Такой результат может быть достигнут при падении давления вдоль направления движения нижней стенки. Генерация турбулентности в этой ситуации будет только у верхней стенки. Согласно работе [8] нулевое напряжение стационарного вторичного потока на нижней стенке останавливает генерацию турбулентности.

4. ВЫВОДЫ

Построена асимптотическая теория вторичного стационарного течения в канале для турбулентного режима движения. Обнаружено, что, в отличие от ламинарных течений, в рассматриваемых задачах основным явлением являются быстрые пульсации нормальной скорости и давления, которые порождают стационарный перенос жидкости из ядра потока в зону генерации турбулентности (зону самоподдерживающихся пульсаций). Показано, что вторичное стационарное течение является вязким по всей толщине канала, что позволяет говорить о крупномасштабной вязкости, и оправдывает хорошо известную физическую концепцию “турбулентной вязкости”. Для течения Пуазейля в канале жидкость увлекается из ядра потока к стенкам. Для течения Куэтта решение вырождается. Найденное стационарное решение может быть названо “нелинейным механизмом подачи кинетической энергии” в зону генерации турбулентности, вообще говоря, независимо от типа генерации. Изменение давления поперек канала является существенным в таких течениях. Оказывается, что в предположении малости амплитуд возмущений, ни логарифмическая область, ни область диссипации Колмогорова не влияют на найденные решения в главном приближении.

Автор благодарен А.Р. Горбушину и И.И. Липатову за полезные дискуссии во время выполнения исследования.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Задача для возмущений второго приближения имеет вид

$$\begin{aligned}
 O\left(\frac{\delta}{\delta^2}\right): \quad \nabla^2 p_2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= -2 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2 - 2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} - 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_1}\right)^2 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial z_1}, \\
 O\left(\frac{\delta}{\delta}\right): \quad \frac{\partial v_2}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial y_1} &= -u_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} \nabla^2 v_1, \\
 O\left(\frac{\delta}{\delta}\right): \quad \frac{\partial w_2}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial z_1} &= -u_1 \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - v_1 \frac{\partial w_1}{\partial y_1} - w_1 \frac{\partial w_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\text{Re } \delta^{3/2}} \nabla^2 w_1, \\
 O\left(\frac{\delta}{\delta}\right): \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} + \frac{\partial w_2}{\partial z_1} &= -\frac{\partial u_0}{\partial x}.
 \end{aligned} \tag{П.1}$$

В уравнениях (П.1) для возмущений второго порядка линейные операторы совпадают с такими в (2.6), но появляются неоднородные квадратичные члены. Вязкие члены сохраняются в соответствии с результатами, приведенными в [8], где установлено, что значение параметра $Z_i = \text{Re } \delta^{3/2}$ может принимать конечные, хотя и большие значения в турбулентной области после ламинарно-турбулентного перехода. Кроме того, позже будет показано, что параметр Z_i может быть исключен из результирующих уравнений путем аффинного преобразования.

Подставляя (2.7) в систему уравнений (П.1), формулируем для задачи v_2, p_2 :

$$\nabla^2 p_2 + 2 \frac{\partial u_0}{\partial y_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -2 \underbrace{\left(\frac{\partial v_{10}}{\partial y_1}\right)^2}_{\text{slow term} = G} -$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{-2 \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} - 2 \left(2 \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} + \left(\frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \frac{\partial w_1}{\partial z_1} - 2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial z_1} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial z_1} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial w_1}{\partial y_1} \frac{\partial v_1}{\partial z_1}}_{\text{fast term}} \\
 & \frac{\partial v_2}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial p_2}{\partial y_1} = \underbrace{-v_{10} \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} + \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial y_1^2}}_{\text{slow term} = E} - \\
 & \underbrace{-u_1 \frac{\partial v_{11}}{\partial x_1} - (v_{10} + v_{11}) \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} - v_{11} \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} - w_1 \frac{\partial v_1}{\partial z_1} + \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \nabla^2 v_{11}}_{\text{fast term}}.
 \end{aligned} \tag{П.2}$$

Линейные операторы, зависящие от быстрых нестационарных переменных, записываются в левой части уравнений, а нестационарные быстрые и стационарные медленные (G , E) неоднородные члены размещаются в правой части. Вклад в стационарные неоднородные члены дает только скорость v_1 ; следовательно, только она разлагается на компоненты в (П.2), где это необходимо. В силу линейности решение задачи (П.2) можно представить в виде суммы быстрых нестационарных и медленных стационарных частных решений. Детальный анализ частного нестационарного решения можно выполнить, зная первое приближение, но на этом этапе достаточно потребовать, чтобы быстрое нестационарное неоднородное решение задачи (П.2) не росло по пространственной координате x_1 . Это требование типично для метода многих масштабов при выводе уравнения эволюции амплитуд пульсаций по медленной координате, а также соответствует экспериментам, в которых установлено, что в канале амплитуда пульсаций не растет в направлении основного потока.

Что касается частного решения задачи (П.2), обусловленного стационарной медленной неоднородностью, то оно имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 v_2 &= x_1 V_m(y_1), \quad p_2 = p_{20}(y_1), \\
 V_m &= \frac{E - p'_{20}}{u_0}, \quad p'_{20} = -u_0^2 \int_{y_1}^{+\infty} \left(\frac{G}{u_0^2} - \frac{2u'_0}{u_0^3} E \right) d\eta.
 \end{aligned} \tag{П.3}$$

Если стационарные правые части G и E в уравнениях (П.2) произвольны, то формулы (П.3) означают появление векового члена в вертикальной скорости v_2 , линейно растущего по x_1 (в отличие от первого приближения v_{10}). В результате нарушается справедливость исходного асимптотического разложения решения (2.5). Чтобы исключить нефизические растущие решения (П.3), нужно приравнять к нулю $V_m(y_1)$, из чего следует необходимое условие отсутствия секулярных членов (условие разрешимости):

$$\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} v_{10}''' - v_{10} v_{10}'' + (v_{10}')^2 = 0, \quad v_{10}(-1) = v_{10}(1) = 0. \tag{П.4}$$

Это условие оказалось обычным нелинейным дифференциальным уравнением третьего порядка для вертикальной вторичной стационарной скорости и для него можно задать только два очевидных граничных условия – условия непротекания на стенках. Следует отметить, что условие (П.4) не зависит от продольной скорости u_0 , и медленная переменная x является лишь параметром в этой задаче. Следовательно, вторичное возмущенное давление должно удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial p_{20}}{\partial y_1} = -v_{10} \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} + \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial y_1^2}. \tag{П.5}$$

Получен важный результат: для того чтобы решения уравнений (П.2) не содержали стационарных вековых слагаемых, условие (П.4) должно выполняться. Это может быть достигнуто двумя способами: задать нулевую вертикальную скорость $v_{10} = 0$ или удовлетворить уравнение (П.4)

и найти ненулевую скорость $v_{10} \neq 0$. Параметр, содержащий число Рейнольдса и толщину канала, можно исключить из (П.4) с помощью преобразования

$$v_{10} = \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} V(x, y_1). \quad (\text{П.6})$$

Важно отметить нетрадиционное действие вязкости в этом случае. Обычно малая вязкость действует поперек направления движения основного потока, как это происходит в ламинарном течении. При умеренных числах Рейнольдса уже лапласиан скорости определяет вязкие эффекты. В рассматриваемом случае ситуация иная, поскольку основным стационарным потоком является вертикальное течение и от лапласиана вертикальной скорости остается только вторая производная в том же направлении. В результате, как видно из преобразования решения (П.6), коэффициент молекулярной вязкости определяет амплитуду вертикальной скорости, но не вязкую толщину. Следует отметить, что описанная ситуация соответствует физическому понятию “турбулентная вязкость”, поскольку она определяет всю толщину канала как “вязкий” размер, но при этом искусственные гипотезы не используются. Необходимо еще раз подчеркнуть полную независимость обнаруженного вертикального перетекания от продольной скорости потока, что объясняется фундаментальным изменением свойств потока в канале при переходе в турбулентное состояние. Если в ламинарной фазе течение в канале является параболическим, а развитие малых возмущений проявляет некоторые эллиптические свойства, то после ламинарно-турбулентного перехода параболичность исчезает, и пульсации скорости и давления начинают доминировать над плавным изменением осредненных величин. Это выражается в порядке постановки и решения возникающих задач. Сначала необходимо решить быструю задачу эволюции пульсаций (2.6) в первом приближении и она основная. Затем необходимо вычислить неоднородности во втором приближении (П.2) и решить соответствующие линейные уравнения, затем в третьем приближении и т.д. Исключение возможных вековых слагаемых на каждом этапе приводит к появлению медленного стационарного вторичного потока и определяет условия для амплитуд пульсаций. В результате основной стационарный вторичный поток представляет собой самоиндуцированный, вязкий и распределенный перенос жидкости из ядра потока в канале к его стенкам. Он описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим только от вертикальной координаты. Самоиндуцированность заключается в том, что ненулевая скорость оттока уменьшает давление (П.5) на стенке канала, что, в свою очередь, увеличивает скорость оттока, что дополнительно увеличивает падение давления и т.д., пока нелинейные эффекты не уравновесят решение.

Важно отметить, что вторичное стационарное решение может где-то совпадать (а где-то не совпадать!) с осредненными скоростями и давлением, измеренными в экспериментах. Этот факт объясняется типом генерации турбулентности. В свободных турбулентных слоях генерация распределенная, а амплитуды пульсаций меньше, и в результате теоретическая вторичная продольная скорость [4], [5] хорошо совпадает с экспериментами. В турбулентном пограничном слое [6] и в этой работе генерация сосредоточена в узкой области вблизи стенок, и следует ожидать больших амплитуд пульсаций и широкой области их влияния.

В первом приближении давление должно быть равно нулю $p_{10}(x) = 0$, поскольку внешнее давление является заданным, а возмущенное давление во втором приближении p_{20} можно записать в виде

$$p_{20} = \frac{1}{(\text{Re} \delta^{3/2})^2} \left(\frac{\partial V}{\partial y_1} - \frac{V^2}{2} + \text{const} \right). \quad (\text{П.7})$$

Понятно, что в общем случае v_2, p_2 также содержат члены, зависящие от медленной переменной:

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{20}(x, y_1) + v_{21}(x_1, y_1, z_1, t_1, x), \\ p_2 &= p_{20}(x, y_1) + p_{21}(x_1, y_1, z_1, t_1, x). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Следующим этапом исследования является поиск вторичной продольной скорости в канале на фоне сформированного оттока жидкости из ядра течения. Из уравнения неразрывности в первом приближении можно найти быстрое возмущение продольной скорости:

$$O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \frac{\partial u_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial v_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} + \frac{\partial w_{11}}{\partial z_1} = 0 \rightarrow u_{11} = -\frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} x_1 + u_{12}. \quad (\text{П.9})$$

Чтобы найти базовую скорость u_0 , обратимся к стандартному уравнению продольного импульса в системе Навье–Стокса. Оно не записано в (2.1)–(2.4), но имеет хорошо известный вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u. \quad (\text{П.10})$$

Подставив в него асимптотические разложения решения (2.5) и последовательно выделяя старшие члены в уравнении, можно получить следующее уравнение для возмущений первого порядка:

$$O\left(\frac{\delta^{1/2}}{\delta}\right): \frac{\partial u_{12}}{\partial t_1} + u_0 \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} = \underbrace{u_0 \frac{\partial v_{10}}{\partial y_1} - v_{10} \frac{\partial u_0}{\partial y_1}}_{\text{slow term}} + \frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y_1^2} - \underbrace{v_{11} \frac{\partial u_0}{\partial y_1} - \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}}_{\text{fast term}}. \quad (\text{П.11})$$

Как и в уравнении для вертикальных пульсаций, в левой части составлен оператор, зависящий от быстрых переменных, а в правой части – стационарные медленные и нестационарные быстрые неоднородные члены. В формуле (П.11) вязкие члены сохраняются в соответствии с результатами, полученными в [8], которые устанавливают, что параметр $Z_i = \text{Re} \delta^{3/2}$ может принимать конечные значения в области турбулентного потока после ламинарно-турбулентного перехода. Более того, из решения (П.6) следует, что этот параметр определяет только амплитуду скорости оттока, но не поведение решения и поэтому можно рассматривать и его очень большие значения, что не приводит к вырождению задачи. Продольная пульсация скорости u_{12} не может содержать стационарный линейный член по x_1 (так как он уже выделен), что возможно, только если медленная правая часть в (П.11) равна нулю:

$$\frac{1}{\text{Re} \delta^{3/2}} u_0'' - v_{10} u_0' + v_{10}' u_0 = 0. \quad (\text{П.12})$$

Следует отметить, что параметр $Z_i = \text{Re} \delta^{3/2}$ исключается из (П.12) при подстановке решения (П.6). Это уравнение оказалось линейным и имеет два линейно независимых решения. Полученное уравнение, несомненно, является вязким, но это большой “турбулентный вязкий размер” в отличие от малого масштаба вязкости в зоне генерации турбулентности. Граничные условия для (П.12) зависят от поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сычев В.В., Сычев Вик.В. О структуре турбулентного пограничного слоя // Прикл. матем. и механ. 1987. Т. 51. № 4. С. 593–599.
2. Schneider W. Boundary-layer theory of free turbulent shear flows // Z. Flugwiss. Weltraumforsch. (J. Flight Sci. Space Res.). 1991. V. 15 (3). P. 143–158.
3. Smith F.T., Scheichl B., Klumick A. On turbulent separation // J. Engng Math. 2010. V. 68. Issue 3. P. 373–400.
4. Zametaev V.B., Gorbushin A.R., Lipatov I.I. Steady secondary flow in a turbulent mixing layer // Internat. Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. V. 132. P. 655–661.
5. Горбушин А.Р., Заметаев В.Б., Липатов И.И. Стационарное вторичное течение в двухмерной турбулентной свободной струе // Изв. РАН МЖГ. 2019. Т. 54. № 2. С. 1–13.
6. Zametaev V.B., Gorbushin A.R. Stationary secondary flow in a turbulent boundary layer // Internat. Conference on High-Speed Vehicle Science and Technology (HiSST). 2018. Moscow.
7. Zametaev V.B., Gorbushin A.R. Evolution of vortices in 2D boundary layer and in the Couette flow // AIP Conference Proceedings. 2016. 1770. 030044. <https://doi.org/10.1063/1.4963986>
8. Горбушин А.Р., Заметаев В.Б. Асимптотический анализ вязких пульсаций в турбулентных пограничных слоях // Изв. РАН МЖГ. 2018. Т. 53. № 1. С. 9–20.
9. Reichardt H. Messungen turbulenter Schwankungen // Naturwissenschaften. 1938. 404.
10. Klebanoff P.S. Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient // NACA Rep. 1247. 1955.
11. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // Докл. АН СССР. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
12. Rayleigh L. On the stability, or instability, of certain fluid motions // Sci. Papers. Cambridge: Univ. Press., 1. 1880. P. 474–487.
13. Drazin P.G., Reid W.H. Hydrodynamic Stability. Second Ed. Cambridge University Press, 2004.
14. Laufer J. Investigation of Turbulent Flow in a Two-Dimensional Channel // NACA Rep. 1053. 1951.
15. Reichardt H. Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer eradlinigturbulenten Couette-Stromung // ZAMM. 1956. V. 36. Sonderheft. P. 26–29.