ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 1, с. 57–84

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.928.4

# АСИМПТОТИКА КОНТРАСТНОЙ СТРУКТУРЫ ТИПА СТУПЕНЬКИ В СТАЦИОНАРНОЙ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ[1)]


**В. Ф. Бутузов**

*119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. ф-т, Россия*

*e-mail: butuzov@phys.msu.ru*

Поступила в редакцию 18.06.2020 г.
Переработанный вариант 18.06.2020 г.
Принята к публикации 18.09.2020 г.

Рассматривается краевая задача для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, одно из которых второго, а другое – первого порядка, с малым параметром при производных в каждом уравнении. Установлены условия, при которых существует решение этой задачи, обладающее внутренним переходным слоем в окрестности некоторой точки, где происходит быстрый переход решения из малой окрестности одного решения соответствующей вырожденной системы в малую окрестность другого решения вырожденной системы. Решение такого типа называется контрастной структурой типа ступеньки (КСТС). Построено и обосновано асимптотическое приближение КСТС по малому параметру. Оно имеет определенные отличия от КСТС в других сингулярно возмущенных задачах. Это касается, прежде всего, структуры асимптотики решения в переходном слое. Обоснование построенной асимптотики проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств, применение которого в рассмотренной задаче также имеет свои качественные особенности. Библ. 10.

**Ключевые слова:** сингулярно возмущенная стационарная частично диссипативная система уравнений, контрастная структура типа ступеньки, асимптотический метод дифференциальных неравенств.

**DOI:** 10.31857/S0044466920120029

## 1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

*1.1. Рассмотрим систему уравнений*

$$\begin{gathered}\varepsilon^2\left(\frac{d^2u}{dx^2} - w(x)\frac{du}{dx}\right) = F(u,v,x,\varepsilon),\\ \varepsilon^2\frac{dv}{dx} = f(u,v,x,\varepsilon), \quad x \in (0;1),\end{gathered} \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$u(0,\varepsilon) = u^0, \quad v(0;\varepsilon) = v^0, \quad u(1,\varepsilon) = u^1. \tag{2}$$

Здесь $u$ и $v$ – искомые скалярные функции, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $w$, $F$ и $f$ – заданные достаточно гладкие функции соответственно на отрезке $0 \le x \le 1$ и в области

$$D = \{(u,v,x,\varepsilon) : u \in I_u,\ v \in I_v,\ x \in [0;1],\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]\}, \tag{3}$$

где $I_u$, $I_v$ – некоторые интервалы, $\varepsilon_0 > 0$.

Система вида (1) относится к классу так называемых частично диссипативных систем, поскольку член со второй производной (диффузионный член) содержится только в одном уравнении. Такие системы возникают, в частности, в стационарных задачах химической кинетики в

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-01-00424.

случае быстрых реакций. В этом случае $u$ и $v$ – концентрации реагирующих веществ, $\varepsilon^{-2}$ – так называемая константа скорости быстрой реакции (большая величина).

При $\varepsilon = 0$ из (1) получаем вырожденную систему

$$F(u,v,x,0) = 0, \quad f(u,v,x,0) = 0. \tag{4}$$

Цель работы – доказать, что при определенных условиях существует решение задачи (1), (2) с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки $x_*$ отрезка $0 \le x \le 1$ (точки перехода), где решение задачи совершает резкий переход из малой окрестности одного решения вырожденной системы (4) в малую окрестность другого решения системы (4) (образуется "ступенька"). Такое решение называется *контрастной структурой типа ступеньки* (КСТС).

Наряду с доказательством существования КСТС будет построено ее асимптотическое приближение по малому параметру $\varepsilon$.

Отметим, что в [1] для системы (1) с краевыми условиями (2) построена и обоснована асимптотика погранслойного решения, т.е. такого решения, которое при $\varepsilon \to 0$ стремится на всем интервале $0 < x < 1$ к одному и тому же решению вырожденной системы (4) и отлично от него только в малых окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ (пограничных слоях). Результаты работы [1] будут использоваться в данной работе как при построении асимптотики КСТС, так и при ее обосновании, поскольку искомая КСТС будет получена в результате объединения двух погранслойных решений системы (1), построенных раздельно на отрезках $[0, x_*]$ и $[x_*, 1]$.

Опишем кратко структуру работы.

В п. 1.2 представлены условия, которые будут обеспечивать существования искомой КСТС в задаче (1), (2). В разд. 2 при этих условиях построена формальная асимптотика КСТС, причем построение ведется раздельно на отрезках $[0, x_*]$ и $[x_*, 1]$, где $x_*$ – искомая точка перехода, а затем в результате сшивания в точке $x_*$ формальных асимптотик, построенных на этих двух отрезках, получено представление $x_*$ в виде асимптотического ряда по степеням $\varepsilon$. В разд. 3 и 4 рассмотрены две вспомогательные краевые задачи для системы (1) соответственно на отрезках $[0, x_\delta]$ и $[x_\delta, 1]$, где точка $x_\delta$ выбирается с использованием ряда для $x_*$, полученного в разд. 2. Доказано существование решений этих задач, обладающих построенной в разд. 2 асимптотикой. В разд. 5 показано, что точку $x_\delta$ можно выбрать так, что функции $u(x,\varepsilon)$ и $v(x,\varepsilon)$, составленные из решений двух вспомогательных задач, образуют искомую КСТС. В разд. 6 содержатся некоторые замечания в отношении рассмотренной задачи, а также других возможных задач о контрастных структурах в частично диссипативных системах уравнений.

Отметим, что контрастные структуры в различных сингулярно возмущенных задачах исследовались во многих работах, например, [2]–[8]. Асимптотика КСТС в данной работе имеет свои качественные особенности, относящиеся, прежде всего, к переходному слою.

### *1.2. Условия*

Сформулируем условия, при которых будет доказано существование КСТС в задаче (1), (2) (для достаточно малых $\varepsilon$) и построено асимптотическое приближение КСТС.

В п. 1.1 говорилось о достаточной гладкости заданных функций $w$, $F$, $f$. Как обычно, требуемый порядок гладкости зависит от порядка асимптотики, которую хотят построить. Поскольку речь пойдет об асимптотике произвольного порядка, будем считать эти функции бесконечно дифференцируемыми.

**Условие А1.** $w(x) \in C^\infty[0; 1]$, $F \in C^\infty(D)$, $f \in C^\infty(D)$,

где область $D$ определена в (3), и пусть $u^0 \in I_u$, $v^0 \in I_v$, $u^1 \in I_u$, где $I_u$ и $I_v$ – интервалы, фигурирующие в определении области $D$.

Следующее условие относится к вырожденной системе (4).

**Условие А2.** Уравнение

$$f(u,v,x,0) = 0$$

имеет бесконечно дифференцируемый простой (т.е. однократный) корень

$$v = \varphi(u,x) \in I_v \quad \text{при} \quad u \in I_u, \quad x \in [0; 1],$$

а уравнение
$$g(u,x) := F(u,\varphi(u,x),x,0) = 0 \tag{5}$$
имеет ровно три бесконечно дифференцируемых простых корня
$$u = \psi_i(x), \quad x \in [0;1], \quad i = 1, 2, 3,$$
причем
$$\psi_1(x) < \psi_2(x) < \psi_3(x), \quad \psi_i(x) \in I_u \quad \text{при} \quad x \in [0;1]. \tag{6}$$

Следующее условие относится к уравнению относительно $x_0$:
$$I(x_0) := \int\limits_{\psi_1(x_0)}^{\psi_3(x_0)} g(u,x_0)du = 0. \tag{7}$$

**Условие A3.** Уравнение (7) имеет корень $x_0 = \bar{x}_0 \in (0;1)$, и
$$I'(\bar{x}_0) \neq 0. \tag{8}$$
Забегая вперед, отметим, что искомая точка перехода $x_*$ будет иметь представление
$$x_* = \bar{x}_0 + O(\varepsilon).$$

Остальные условия связаны с производными функций $g$, $f$, $F$. Чтобы сформулировать эти условия, определим несколько кривых на плоскости переменных $(u,x)$ и в пространстве переменных $(u,v,x)$.

Кривые на плоскости $(u,x)$:
$$l_1 = \{(u,x) : u \in [u^0, \psi_1(0)],\ x = 0\},$$
$$l_2 = \{(u,x) : u = \psi_1(x),\ x \in [0, \bar{x}_0]\},$$
$$l_3 = \{(u,x) : u \in [\psi_1(\bar{x}_0), \psi_2(\bar{x}_0)],\ x = \bar{x}_0\},$$
$$l_4 = \{(u,x) : u \in [\psi_2(\bar{x}_0), \psi_3(\bar{x}_0)],\ x = \bar{x}_0\},$$
$$l_5 = \{(u,x) : u = \psi_3(x),\ x \in [\bar{x}_0, 1]\},$$
$$l_6 = \{(u,x) : u \in [\psi_3(1), u^1],\ x = 1\}, \quad l = \bigcup_{i=1}^{6} l_i.$$

Отметим, что кривые $l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$ являются гладкими, а кривая $l$ — непрерывная кривая, составленная из шести гладких звеньев $l_1, \ldots, l_6$.

Кривые в пространстве $(u,v,x)$:
$$L_0 = \{(u,v,x) : u = u^0,\ v \in [v^0, \varphi(u^0,0)],\ x = 0\},$$
$$L_i\{(u,v,x) : v = \varphi(u,x), (u,x) \in l_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \tag{9}$$
$$L^{(-)} = \bigcup_{i=0}^{3} L_i, \quad L^{(+)} = \bigcup_{i=4}^{6} L_i, \quad L = L^{(-)} \cup L^{(+)}.$$

Отметим также, что некоторые из введенных кривых могут вырождаться в точку. Например, если $v^0 = \varphi(u^0,0)$, то отрезок $L_0$ вырождается в точку $(u^0, v^0, 0)$, которая является одним из концов кривой $L_1$. Для определенности будем считать, что $L_0$ — невырожденный отрезок.

Сформулируем теперь остальные условия.

**Условие A4.** $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,x) > 0$ в точках кривых $l_1 \cup l_2$ и $l_5 \cup l_6$.

**Условие A5.** $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,x,0) < 0$ в точках кривой $\bigcup_{i=1}^{6} L_i$, и $f(u,v,x,0) \neq 0$ на отрезке $L_0$, за исключением его конца $(u^0, \varphi(u^0,0), 0)$.

**Условие A6.** $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v,x,0) < 0$ в точках кривой $L$.

**Условие A7.** $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,0) > 0$ в точках кривой $L$.

**Условие A8.** $R^{(-)}(u,\bar{x}_0) := \bar{F}_u^{(-)}(\bar{x}_0) + \bar{F}_v^{(-)}(\bar{x}_0)\varphi_u(u,\bar{x}_0) > 0$ при $\psi_1(\bar{x}_0) \le u \le \psi_2(\bar{x}_0)$, т.е. в точках кривой $l_3$;

$R^{(+)}(u,\bar{x}_0) := \bar{F}_u^{(+)}(\bar{x}_0) + \bar{F}_v^{(+)}(\bar{x}_0)\varphi_u(u,\bar{x}_0) > 0$ при $\psi_2(\bar{x}_0) \le u \le \psi_3(\bar{x}_0)$, т.е. в точках кривой $l_4$;
здесь

$$\begin{aligned} \bar{F}_u^{(-)}(x) &= \frac{\partial F}{\partial u}\big(\psi_1(x), \varphi(\psi_1(x),x), x, 0\big), \\ \bar{F}_v^{(-)}(x) &= \frac{\partial F}{\partial v}\big(\psi_1(x), \varphi(\psi_1(x),x), x, 0\big), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \bar{F}_u^{(+)}(x) = \frac{\partial F}{\partial u}\big(\psi_3(x), \varphi(\psi_3(x),x), x, 0\big), \\ \bar{F}_v^{(+)}(x) = \frac{\partial F}{\partial v}\big(\psi_3(x), \varphi(\psi_3(x),x), x, 0\big), \quad \varphi_u(u,x) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,x). \end{gathered} \tag{11}$$

Приведем простой пример функций $F$ и $f$, удовлетворяющих условиям A1–A8:

$$F(u,v,x,\varepsilon) = g(u,x) + u - v + \varepsilon F_1(u,v,x,\varepsilon),$$
$$f(u,v,x,\varepsilon) = u - v + \varepsilon f_1(u,v,x,\varepsilon),$$

где

$$g(u,x) = \big(u-\psi_1(x)\big)\big(u-\psi_2(x)\big)\big(u-\psi_3(x)\big),$$

причем выполнены неравенства (6) и условие A3, а граничные значения $u^0$ и $u^1$ достаточно близки соответственно к $\psi_1(0)$ и $\psi_3(1)$.

Заметим, что если в определениях кривых $l$ и $L$ заменить $\bar{x}_0$ на $x_*$, то неравенства в условиях A4–A8 останутся верными для всех значений $x_*$ из некоторой достаточно малой и независящей от $\varepsilon$ окрестности точки $\bar{x}_0$. Будем этим пользоваться при построении формальной асимптотики КСТС в разд. 2.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ КСТС

### *2.1. Вид асимптотики*

Возьмем произвольное значение $x_*$ из указанной в конце п. 1.2 достаточно малой окрестности точки $\bar{x}_0$ и будем строить формальную асимптотику КСТС в задаче (1), (2) в виде

$$U(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0,x_*], \\ U^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [x_*,1], \end{cases} \qquad V(x,\varepsilon) = \begin{cases} V^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0,x_*], \\ V^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [x_*,1], \end{cases}$$

где

$$U^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon) + P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon) + Q^{(-)}u(\sigma,\varepsilon), \tag{12}$$

$$V^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon) + \Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon) + P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon) + Q^{(-)}v(\sigma,\varepsilon), \tag{13}$$

$$U^{(+)}(x,\varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) + Q^{(+)}u(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(+)}u(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{14}$$

$$V^{(+)}(x,\varepsilon) = \bar{v}(x,\varepsilon) + Q^{(+)}v(\sigma,\varepsilon) + \Pi^{(+)}v(\tilde{\xi},\varepsilon), \tag{15}$$

$\bar{u}^{(\pm)}$, $\bar{v}^{(\pm)}$ – регулярные части асимптотики; $\Pi^{(-)}u$, $\Pi^{(-)}v$ и $P^{(-)}u$, $P^{(-)}v$ – погранслойные части, описывающие погранслойное поведение решения в окрестности точки $x = 0$, $\xi = x/\varepsilon$ и $\zeta = x/\varepsilon^2$ – погранслойные переменные; $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ и $Q^{(+)}u$, $Q^{(+)}v$ – внутрислойные части асимптотики, описывающие поведение решения в окрестности точки перехода $x_*$ (во внутреннем переходном слое) слева и справа от точки $x_*$, $\sigma = (x - x_*)/\varepsilon$ — внутрислойная переменная; $\Pi^{(+)}u$, $\Pi^{(+)}v$ — погранслойные части асимптотики в окрестности точки $x = 1$, $\tilde{\xi} = (x-1)/\varepsilon$ — погранслойная переменная.

Точку $x_*$ определим условием

$$U^{(-)}(x_*, \varepsilon) = U^{(+)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*). \tag{16}$$

Все слагаемые в правых частях (12)—(15) будут построены в виде рядов по целым степеням $\varepsilon$ с помощью известного алгоритма А.Б. Васильевой (см. [9]). При этом будут использоваться краевые условия, вытекающие из (2) и (16):

$$U^{(-)}(0,\varepsilon) = u^0, \quad V^{(-)}(0,\varepsilon) = v^0, \quad U^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*), \tag{17}$$

$$U^{(+)}(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*), \quad U^{(+)}(1,\varepsilon) = u^1. \tag{18}$$

*2.2. Построение асимптотики на отрезке* $[0, x_*]$

На отрезке $[0, x_*]$ асимптотика $U^{(-)}(x,\varepsilon)$, $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ вида (12), (13) является асимптотикой погранслойного типа. Построение такой асимптотики подробно описано в [1], поэтому ограничимся здесь более кратким описанием.

**2.2.1. Регулярные части асимптотики.** Построим их в виде

$$\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(-)}(x), \quad \bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{v}_i^{(-)}(x). \tag{19}$$

Стандартным способом, т.е. подставив ряды (19) в систему (1) вместо $u$ и $v$, разложив правые части уравнений в ряды по степеням $\varepsilon$ и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $\varepsilon$ в левой и правой частях каждого уравнения, получим последовательно для $i = 0, 1, 2, \ldots$ системы уравнений относительно $u_i^{(-)}(x)$, $\bar{v}_i^{(-)}(x)$. Для $\bar{u}_0^{(-)}(x)$, $\bar{v}_0^{(-)}(x)$ получается вырожденная система (4):

$$F(\bar{u}_0^{(-)}, \bar{v}_0^{(-)}, x, 0) = 0, \quad f(\bar{u}_0^{(-)}, \bar{v}_0^{(-)}, x, 0) = 0.$$

В качестве ее решения возьмем (см. условие А2)

$$\bar{u}_0^{(-)}(x) = \psi_1(x), \quad \bar{v}_0^{(-)}(x) = \varphi(\psi_1(x), x), \quad x \in [0; x_*].$$

Для $\bar{u}_i^{(-)}(x)$, $\bar{v}_I^{(-)}(x)$ при $i \ge 1$ получается система линейных уравнений

$$\begin{aligned} \bar{F}_u^{(-)}(x)\bar{u}_i^{(-)} + \bar{F}_v^{(-)}(x)\bar{v}_i^{(-)} &= F_i^{(-)}(x), \\ \bar{f}_u^{(-)}(x)\bar{u}_i^{(-)} + \bar{f}_v^{(-)}(x)\bar{v}_i^{(-)} &= f_i^{(-)}(x), \end{aligned} \tag{20}$$

где $\bar{F}_u^{(-)}(x)$ и $\bar{F}_v^{(-)}(x)$ определены в (10), $\bar{f}_u^{(-)}(x)$ и $\bar{f}_v^{(-)}(x)$ имеют аналогичные выражения, а функции $F_i(x)$ и $f_i(x)$ выражаются рекуррентно через $\bar{u}_j^{(-)}(x)$, $\bar{v}_j^{(-)}(x)$ с номерами $j < i$.

Определитель $\Delta^{(-)}(x)$ системы (20) запишем в виде

$$\Delta^{(-)}(x) = \bar{F}_u^{(-)}(x)\bar{f}_v^{(-)}(x) - \bar{F}_v^{(-)}(x)\bar{f}_u^{(-)}(x) = \bar{f}_v^{(-)}(x)\bar{g}_u^{(-)}(x),$$

где

$$\bar{g}_u^{(-)}(x) := \frac{\partial g}{\partial u}(\psi_1(x), x).$$

Так как $\bar{f}_v^{(-)}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v, x, 0)$ при $(u, v, x) \in L_2$, т.е. производная $\bar{f}_v^{(-)}(x)$ вычисляется в точках кривой $L_2$, то в силу условия А5 справедливо неравенство

$$\bar{f}_v^{(-)}(x) < 0, \quad x \in [0; x_*].$$

Аналогично, $\overline{g}_u^{(-)}(x) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,x)$ при $(u,x) \in l_2$, поэтому в силу условия А4

$$\overline{g}_u^{(-)}(x) > 0, \quad x \in [0; x_*].$$

Следовательно, $\Delta^{(-)}(x) < 0$, $x \in [0, x_*]$, и, значит, система (20) имеет единственное решение.

Таким образом, ряды (19) построены.

**2.2.2. Погранслойные части асимптотики $\Pi^{(-)}\mathbf{u}$, $\Pi^{(-)}\mathbf{v}$ и $\mathbf{P}^{(-)}\mathbf{u}$, $\mathbf{P}^{(-)}\mathbf{v}$.** Построим их в виде

$$\begin{gathered} \Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i^{(-)} u(\xi), \\ \Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \Pi_i^{(-)} v(\xi), \quad \xi = x/\varepsilon \ge 0; \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} P^{(-)}u(\zeta,\varepsilon) = \varepsilon^2 \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i^{(-)} u(\zeta), \\ P^{(-)}v(\zeta,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i P_i^{(-)} v(\zeta), \quad \zeta = x/\varepsilon^2 \ge 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Стандартным способом (см. [9]) для $\Pi^{(-)}u$, $\Pi^{(-)}v$ получается система уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d^2\Pi^{(-)}u}{d\xi^2} - \varepsilon w(\varepsilon\xi)\frac{d\Pi^{(-)}u}{d\xi} = \Pi^{(-)}F := F(\overline{u}^{(-)}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \Pi^{(-)}u, \overline{v}^{(-)}(\varepsilon\xi,\varepsilon) + \\ + \Pi^{(-)}v, \varepsilon\xi, \varepsilon) - F(\overline{u}^{(-)}(\varepsilon\xi,\varepsilon), \overline{v}^{(-)}(\varepsilon\xi,\varepsilon), \varepsilon\xi, \varepsilon), \\ \varepsilon\frac{d\Pi^{(-)}v}{d\xi} = \Pi^{(-)}f, \quad \xi \ge 0, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\Pi^{(-)}f$ имеет выражение, аналогичное $\Pi^{(-)}F$, а для $P^{(-)}u$, $P^{(-)}v$ получается система уравнений

$$\begin{gathered} \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2P^{(-)}u}{d\zeta^2} - w(\varepsilon^2\zeta)\frac{dP^{(-)}u}{d\zeta} = P^{(-)}F := F(\overline{u}^{(-)}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon) + \Pi^{(-)}u(\varepsilon\zeta,\varepsilon) + \\ + P^{(-)}u, \overline{v}^{(-)}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon) + \Pi^{(-)}v(\varepsilon\zeta,\varepsilon) + P^{(-)}v, \varepsilon^2\zeta, \varepsilon) - F(\overline{u}^{(-)}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon) + \\ + \Pi^{(-)}u(\varepsilon\zeta,\varepsilon), \overline{v}^{(-)}(\varepsilon^2\zeta,\varepsilon) + \Pi^{(-)}v(\varepsilon\zeta,\varepsilon), \varepsilon^2\zeta, \varepsilon), \\ \frac{dP^{(-)}v}{d\zeta} = P^{(-)}f, \quad \zeta \ge 0, \end{gathered} \tag{24}$$

где $P^{(-)}f$ имеет выражение, аналогичное $P^{(-)}F$.

Из (23) будем извлекать последовательно для $i = 0, 1, 2, \ldots$ уравнения относительно $\Pi_i^{(-)}u$, $\Pi_i^{(-)}v$, а из (24) – уравнения относительно $P_i^{(-)}u$, $P_i^{(-)}v$. Для каждого $i$ эти функции будут определяться в таком порядке:

$$\Pi_i^{(-)}u \to \Pi_i^{(-)}v \to P_i^{(-)}v \to P_i^{(-)}u.$$

Для $\Pi_0^{(-)}u$, $\Pi_0^{(-)}v$ из (23) следует система уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d^2\Pi_0^{(-)}u}{d\xi^2} = F(\overline{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u, \overline{v}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}v, 0, 0), \\ 0 = f(\overline{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u, \overline{v}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}v, 0, 0), \quad \xi \ge 0. \end{gathered} \tag{25}$$

Из второго уравнения, используя условие А2, получаем

$$\overline{v}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}v = \varphi(\overline{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u, 0). \tag{26}$$

Подставляя в первое уравнение, приходим к уравнению для $\Pi_0^{(-)}u$:

$$\frac{d^2\Pi_0^{(-)}u}{d\xi^2} = g(\overline{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0 u, 0), \quad \xi \geq 0. \tag{27}$$

К этому уравнению нужно добавить граничные условия.

Чтобы получить граничное условие при $\xi = 0$, подставим выражение (12) для $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ в граничное условие $U^{(-)}(0,\varepsilon) = u^0$ (см. (17)) с учетом того, что все члены ряда $Q^{(-)}u(\xi,\varepsilon)$ равны нулю при $x = 0$ (см. замечание 1 в конце пп. 2.2.3). Получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i (\overline{u}_i^{(-)}(0) + \Pi_i^{(-)}u(0) + \varepsilon^2 P_i^{(-)}u(0)) = u^0. \tag{28}$$

Отсюда имеем $\overline{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u(0) = u^0$, и, следовательно, граничное условие для $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ при $\xi = 0$ имеет вид

$$\Pi_0^{(-)}u(0) = u^0 - \overline{u}_0(0) = u^0 - \psi_1(0). \tag{29}$$

В качестве второго граничного условия для $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ и также для остальных функций $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$ возьмем стандартное для пограничных функций условие на бесконечности

$$\Pi_i^{(-)}u(\infty) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots . \tag{30}$$

Заметим, что $g(\overline{u}_0(0), 0) = g(\psi_1(0), 0) = 0$ в силу условия A2, поэтому, если $u^0 = \psi_1(0)$, то $\Pi_0^{(-)}u(\xi) = 0$ при $\xi \geq 0$.

Если же $u^0 \neq \psi_1(0)$, то воспользуемся тем, что в силу условия A4 производная $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,x) > 0$ на кривой $l_1$, т.е. при $\{u \in [u^0, \psi_1, (0)], x = 0\}$, и, следовательно, $g(\overline{u}_0(0) + \Pi_0^{(-)}u, 0) \neq 0$ при $\Pi_0^{(-)}u \in [u^0 - \psi_1(0), 0]$. Поэтому задача для $\Pi_0^{(-)}u$ сводится стандартным образом к уравнению первого порядка

$$\frac{d\Pi_0^{(-)}u}{d\xi} = \pm\left[2\int_0^{\Pi_0^{(-)}u} g(\psi_1(0) + s, 0)ds\right]^{1/2}, \quad \xi \geq 0, \tag{31}$$

с начальным условием (29), причем в правой части (31) берется знак плюс, если $u^0 < \psi_1(0)$, и знак минус, если $u^0 > \psi_1(0)$. Уравнение (31) интегрируется в квадратурах, функция $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ является монотонной функцией при $\xi \geq 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$\left|\Pi_0^{(-)}u(\xi)\right| \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{32}$$

Такого же вида оценка верна для производной $\dfrac{d\Pi_0^{(-)}u}{d\xi}(\xi)$ и функции $\Pi_0^{(-)}v(\xi)$, которая определяется теперь из (26).

Здесь и в дальнейшем буквами $c$ и $\kappa$ (иногда через $c_1$, $\kappa_1$, ...) обозначаются не зависящие от $\varepsilon$ подходящие положительные числа, вообще говоря, различные в разных оценках.

Для $P_0^{(-)}u$, $P_0^{(-)}v$ из (24) получаем систему уравнений

$$\frac{d^2 P_0^{(-)}u}{d\zeta^2} = F(u^0, \varphi(u^0, 0) + P_0^{(-)}v, 0, 0) - F(u^0, \varphi(u^0, 0), 0, 0), \tag{33}$$

$$\frac{dP_0^{(-)}v}{d\zeta} = f(u^0, \varphi(u^0, 0) + P_0^{(-)}v, 0, 0), \quad \zeta \geq 0. \tag{34}$$

Зададим для $P_0^{(-)}u(\zeta)$ граничное условие на бесконечности

$$P_0^{(-)}u(\infty) = 0, \tag{35}$$

а для $P_0^{(-)}v(\zeta)$ – начальное условие при $\zeta = 0$. Чтобы его получить, подставим выражение (13) для $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ в граничное условие $V^{(-)}(0,\varepsilon) = v^0$ (см. (17)), учитывая, что все члены ряда $Q^{(-)}v(\xi,\varepsilon)$ равны нулю при $x = 0$ (см. замечание 1 в конце пп. 2.2.3). Получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i(\bar{v}_i^{(-)}(0) + \Pi_i^{(-)}v(0) + P_i^{(-)}v(0)) = v^0. \tag{36}$$

Отсюда имеем

$$P_0^{(-)}v(0) = v^0 - (\bar{v}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}v(0)) = v^0 - \varphi(u^0,0) =: P_0^{(-)}. \tag{37}$$

Заметим, что $f(u^0,\varphi(u^0,0),0,0) = 0$ в силу условия А2, и, значит, $P_0^{(-)}v = 0$ является точкой покоя уравнения (34) асимптотически устойчивой в силу неравенства $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u^0,\varphi(u^0,0),0,0) < 0$ (см. условие А5). Если $v^0 = \varphi(u^0,0)$, то $P_0^{(-)} = 0$, и тогда $P_0^{(-)}v(\zeta) = 0$ при $\zeta \ge 0$. Если же $P_0^{(-)} \ne 0$, то $f(u^0,\varphi(u^0,0) + s,0,0) \ne 0$ при $s \in (0,P_0^{(-)}]$ в силу условия А5, поэтому решение задачи (34), (37) является монотонной функцией и имеет экспоненциальную оценку

$$\left|P_0^{(-)}v(\zeta)\right| \le c\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \ge 0. \tag{38}$$

Так как функция $P_0^{(-)}v(\zeta)$ найдена, то правая часть уравнения (33) является теперь известной функцией, имеющей такую же экспоненциальную оценку, как (38). Обозначив эту функцию $\chi_0^{(-)}(\zeta)$, запишем решение уравнения (33) с граничным условием (35) в виде

$$P_0^{(-)}u(\zeta) = \int_{\infty}^{\zeta}ds\int_{\infty}^{s}\chi_0^{(-)}(t)dt. \tag{39}$$

Отсюда следует, что $P_0^{(-)}u(\zeta)$ и ее производная $\dfrac{dP_0^{(-)}u}{d\zeta}(\zeta)$ имеют оценки вида (38).

Таким образом, главные члены погранслойных рядов (21) и (22) определены и имеют оценки вида (32) и (38).

При $i \ge 1$ для $\Pi_i^{(-)}u$, $\Pi_i^{(-)}v$ из (23) получается система уравнений

$$\begin{gathered}\frac{d^2\Pi_i^{(-)}u}{d\xi^2} = F_u^{(-)}(\xi)\Pi_i^{(-)}u + F_v^{(-)}(\xi)\Pi_i^{(-)}v + r_i^{(-)}(\xi),\\ f_u^{(-)}(\xi)\Pi_i^{(-)}u + f_v^{(-)}(\xi)\Pi_i^{(-)}v + \varrho_i^{(-)}(\xi) = 0,\end{gathered} \tag{40}$$

где

$$F_u^{(-)}(\xi) := \frac{\partial F}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u(\xi),\bar{v}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}v(\xi),0,0), \tag{41}$$

и такой же смысл имеют обозначения $F_v^{(-)}(\xi)$, $f_u^{(-)}(\xi)$, $f_v^{(-)}(\xi)$, а $r_i^{(-)}(\xi)$ и $\varrho_i^{(-)}(\xi)$ – известные на $i$-м шаге функции, рекуррентно выражающиеся через уже найденные функции $\Pi_j^{(-)}u(\xi)$, $\Pi_j^{(-)}v(\xi)$ с номерами $j < i$ и имеющие экспоненциальные оценки вида (32), если такие же оценки имеют функции $\Pi_j^{(-)}u$, $\dfrac{d\Pi_j^{(-)}u}{d\xi}$, $\Pi_j^{(-)}v$ с номерами $j < i$.

Так как

$$
\begin{gathered}
f_v^{(-)}(\xi) := \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0(0) + \Pi_0^{(-)}u(\xi), \varphi(\bar{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u(\xi), 0), 0, 0) = \\
= \frac{\partial f}{\partial v}(u, \varphi(u, 0), 0, 0) \quad \text{при} \quad u = \bar{u}_0(0) + \Pi_0^{(-)}u(\xi),
\end{gathered} \tag{42}
$$

и так как

$$
u = (\bar{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u(\xi)) \in [u^0, \psi_1(0)) \quad \text{при} \quad \xi \geq 0
$$

(в силу монотонности $\Pi_0^{(-)}u(\xi)$ при $\xi \geq 0$), то значения производной $f_v^{(-)}(\xi)$ при $\xi \geq 0$ совпадают со значениями $\dfrac{\partial f}{\partial v}(u, v, x, 0)$ на кривой $L_1$. Поэтому в силу условия A5

$$
f_v^{(-)}(\xi) \leq -\kappa < 0 \quad \text{при} \quad \xi \geq 0. \tag{43}
$$

Это дает возможность выразить $\Pi_i^{(-)}v$ через $\Pi_i^{(-)}u$ из второго уравнения системы (40):

$$
\Pi_i^{(-)}v = \varphi_u^{(-)}(\xi)\Pi_i^{(-)}u - (f_v^{(-)}(\xi))^{-1}\varrho_i^{(-)}\xi), \tag{44}
$$

где

$$
\varphi_u^{(-)}(\xi) := -(f_v^{(-)}(\xi))^{-1} f_u^{(-)}(\xi) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u(\xi), 0). \tag{45}
$$

Подставляя выражение (44) в первое уравнение системы (40), приходим к уравнению для $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$:

$$
\frac{d^2\Pi_i^{(-)}u}{d\xi^2} = g_u^{(-)}(\xi)\Pi_i^{(-)}u + \pi_i^{(-)}(\xi), \quad \xi \geq 0, \tag{46}
$$

где

$$
g_u^{(-)}(\xi) := \frac{\partial g}{\partial u}(u_0^{(-)}(0) + \Pi_0^{(-)}u(\xi), 0),
$$

$\pi_i^{(-)}(\xi)$ – известная функция, имеющая оценку вида (32).

Из (28) и (30) получаем граничные условия для $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$:

$$
\Pi_i^{(-)}u(0) = -\bar{u}_i(0) - P_{i-2}^{(-)}u(0) =: \Pi_i^0, \quad \Pi_i^{(-)}u(\infty) = 0, \tag{47}
$$

где $P_{i-2}^{(-)}u(0)$ – известное на $i$-м шаге число, в частности, $P_{-1}^{(-)}u(0)$ считаем равным нулю. Решение задачи (46), (47) запишем в виде

$$
\Pi_i^{(-)}u(\xi) = \Phi(\xi)\Phi^{-1}(0)\Pi_i^0 + \Phi(\xi)\int_0^\xi \Phi^{-2}(s)\int_\infty^s \Phi(t)\pi_i^{(-)}(t)\,dt\,ds, \tag{48}
$$

где $\Phi(\xi) = \dfrac{d\Pi_0^{(-)}u}{d\xi}(\xi)$. Используя оценки вида (32) для $\Phi(\xi)$ и $\pi_i^{(-)}(\xi)$, из (48) получаем экспоненциальную оценку для $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$:

$$
\left|\Pi_i^{(-)}u(\xi)\right| \leq c\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \geq 0. \tag{49}
$$

Такую же оценку имеют производная $\dfrac{d\Pi_i^{(-)}u}{d\xi}(\xi)$ и функция $\Pi_i^{(-)}v(\xi)$, которая определяется теперь равенством (44).

Перейдем к функциям $P_i^{(-)}u(\zeta)$, $P_i^{(-)}v(\zeta)$ при $i \geq 1$. Для них из (24) получается система уравнений

$$\frac{d^2 P_i^{(-)}u}{d\zeta^2} = \hat{F}_v^{(-)}(\zeta) P_i^{(-)}v(\zeta) + \chi_i^{(-)}(\zeta), \tag{50}$$

$$\frac{dP_i^{(-)}v}{d\zeta} = \hat{f}v^{(-)}(\zeta) P_i^{(-)}v + p_i^{(-)}(\zeta), \quad \zeta \geq 0, \tag{51}$$

где

$$\begin{aligned} \hat{F}_v^{(-)}(\zeta) &:= \frac{\partial F}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0,0) + P_0^{(-)}v(\zeta), 0, 0), \\ \hat{f}_v^{(-)}(\zeta) &:= \frac{\partial f}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0,0) + P_0^{(-)}v(\zeta), 0, 0), \end{aligned} \tag{52}$$

а $\chi_i^{(-)}(\zeta)$ и $p_i^{(-)}(\zeta)$ – известные на $i$-м шаге функции, рекуррентно выражающиеся через $P_j^{(-)}u(\zeta)$, $P_j^{(-)}v(\zeta)$ с номерами $j < i$ и имеющие экспоненциальные оценки вида (38), если такие же оценки имеют функции $P_j^{(-)}u$, $\dfrac{dP_j^{(-)}u}{d\zeta}$, $P_j^{(-)}v$ с номерами $j < i$.

Зададим для $P_i^{(-)}u(\zeta)$ граничное условие, аналогичное (35):

$$P_i^{(-)}u(\infty) = 0, \tag{53}$$

а для $P_i^{(-)}v(\zeta)$ из (36) получаем начальное условие

$$P_i^{(-)}v(0) = -\overline{v}_i^{(-)}(0) - \Pi_i^{(-)}v(0) =: P_i^{(-)}. \tag{54}$$

Решение задачи (51), (54) имеет вид

$$P_i^{(-)}v(\zeta) = K^{(-)}(\zeta,0)P_i^{(-)} + \int_0^\zeta K^{(-)}(\zeta,s)p_i^{(-)}(s)ds, \tag{55}$$

где

$$K^{(-)}(\zeta,s) = \exp\left(\int_s^\zeta \hat{f}_v^{(-)}(t)dt\right).$$

Так как (см. (52) и (42))

$$\hat{f}_v^{(-)}(\zeta) = \frac{\partial f}{\partial v}(u^0, \varphi(u^0,0), 0, 0) + O(P_0^{(-)}v(\zeta)) = f_v^{(-)}(\xi)\Big|_{\xi=0} + O(P_0^{(-)}v(\zeta)),$$

то (см. (43) и (38))

$$\hat{f}_v^{(-)}(\zeta) \leq -\kappa + c\exp(-\kappa_1\zeta), \quad \zeta \geq 0.$$

Поэтому

$$K^{(-)}(\zeta,s) \leq c_1 \exp\left(-\kappa(\zeta - s)\right), \quad 0 \leq s \leq \zeta.$$

В силу этой оценки и оценки вида (38) для $p_i^{(-)}(\zeta)$ из (55) получается экспоненциальная оценка для $P_i^{(-)}v(\zeta)$:

$$\left|P_i^{(-)}v(\zeta)\right| \leq c\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \geq 0. \tag{56}$$

Поскольку функция $P_i^{(-)}v(\zeta)$ найдена, то правая часть уравнения (50) является теперь известной функцией, имеющей оценку вида (56).

Решение задачи (50), (53) имеет вид, аналогичный (39):

$$P_i^{(-)}u(\zeta) = \int_{\infty}^{\zeta} ds \int_{\infty}^{s} (\hat{F}_v^{(-)}(t)P_i^{(-)}v(t) + \chi_i^{(-)}(t))dt,$$

откуда следует, что $P_i^{(-)}u(\zeta)$ и ее производная $\frac{dP_i^{(-)}u}{d\zeta}(\zeta)$ имеют оценки вида (56).

Итак, погранслойные ряды (21) и (22) построены, причем пограничные функции $\Pi_i^{(-)}u$, $\Pi_i^{(-)}v$ и $P_i^{(-)}u$, $P_i^{(-)}v$ имеют экспоненциальные оценки вида (49) и (56).

**2.2.3. Внутрислойные части асимптотики $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$.** Такое название мы дали рядам $Q^{(-)}u(\sigma,\varepsilon)$ и $Q^{(-)}v(\sigma,\varepsilon)$, имея в виду, что они будут описывать быстрое изменение решения исходной задачи (1), (2) в переходном слое слева от точки $x_*$. Эти ряды построим в виде

$$Q^{(-)}u(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(-)}u(\sigma),$$
$$Q^{(-)}v(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(-)}v(\sigma), \quad \sigma = (x - x_*)/\varepsilon \le 0. \tag{57}$$

Для $Q^{(-)}u$, $Q^{(-)}v$ стандартным способом получается система уравнений

$$\frac{d^2Q^{(-)}u}{d\sigma^2} - \varepsilon w(x_* + \varepsilon\sigma)\frac{dQ^{(-)}u}{d\sigma} = Q^{(-)}F := F(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon\sigma,\varepsilon) + Q^{(-)}u, \bar{v}^{(-)}(x_* + \varepsilon\sigma,\varepsilon) +$$
$$+ Q^{(-)}v, x_* + \varepsilon\sigma,\varepsilon) - F(\bar{u}^{(-)}(x_* + \varepsilon\sigma,\varepsilon), \bar{v}^{(-)}(x_* + \varepsilon\sigma,\varepsilon), x_* + \varepsilon\sigma,\varepsilon), \tag{58}$$
$$\varepsilon\frac{dQ^{(-)}v}{d\sigma} = Q^{(-)}f, \quad \sigma \le 0,$$

где $Q^{(-)}f$ имеет выражение, аналогичное $Q^{(-)}F$.

Из системы (58) для $Q_0^{(-)}u$, $Q_0^{(-)}v$ следует система уравнений, аналогичная (25):

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}u}{d\sigma^2} = F(\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u, \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v, x_*, 0),$$
$$0 = f(\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u, \bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v, x_*, 0), \quad \sigma \le 0.$$

Из второго уравнения, используя условие A2, получаем

$$\bar{v}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}v = \varphi(\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u, x_*). \tag{59}$$

Подставляя в первое уравнение, приходим к уравнению для $Q_0^{(-)}u$ такого же типа, как уравнение (27) для $\Pi_0^{(-)}u$:

$$\frac{d^2Q_0^{(-)}u}{d\sigma^2} = g(\bar{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u, x_*), \quad \sigma \le 0. \tag{60}$$

Чтобы получить для $Q_0^{(-)}u(\sigma)$ граничное условие при $\sigma = 0$, подставим выражение (12) для $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ в граничное условие $U^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*)$ (см. (17)) с учетом того, что все члены рядов $\Pi^{(-)}u$ и $P^{(-)}u$ равны нулю при $x = x_*$ (см. замечание 1 в конце этого подпункта). Получим равенство

$$\sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(-)}(x_*) + \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(-)}u(0) = \psi_2(x_*),$$

откуда имеем $\overline{u}_0^{(-)}(x_*) + Q_0^{(-)}u(0) = \psi_2(x_*)$, и, следовательно, граничное условие для $Q_0^{(-)}u(\sigma)$ при $\sigma = 0$ имеет вид

$$Q_0^{(-)}u(0) = \psi_2(x_*) - \overline{u}_0^{(-)}(x_*) = \psi_2(x_*) - \psi_1(x_*) > 0. \tag{61}$$

Второе граничное условие для $Q_0^{(-)}u(\sigma)$ — стандартное условие на бесконечности

$$Q_0^{(-)}u(-\infty) = 0. \tag{62}$$

Задача (60)–(62) для $Q_0^{(-)}u(\sigma)$ сводится стандартным образом к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\sigma} = \left[2\int\limits_0^{Q_0^{(-)}u} g(\psi_1(x_*) + s, x_*)ds\right]^{1/2}, \quad \sigma \le 0, \tag{63}$$

с начальным условием (61). Отметим, что функция $g(\psi_1(x_*) + s, x_*)$ равна нулю при $s = 0$ и также при $s = \psi_2(x_*) - \psi_1(x_*)$ и не равна нулю при $0 < s < \psi_2(x_*) - \psi_1(x_*)$ в силу условия A2, а так как ее производная $\dfrac{\partial g}{\partial u} > 0$ при $s = 0$ в силу условия A4, то

$$g(\psi_1(x_*) + s, x_*) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < s < \psi_2(x_*) - \psi_1(x_*).$$

Уравнение (63) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (61) является положительной возрастающей функцией на полупрямой $\sigma \le 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$\left|Q_0^{(-)}u(\sigma)\right| \le c\exp(\kappa\sigma), \quad \sigma \le 0. \tag{64}$$

Такого же типа оценка верна для $\dfrac{dQ_0^{(-)}u}{d\sigma}(\sigma)$.

Из (63) при $\sigma = 0$ получаем

$$\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\sigma}(0) = \left[2\int\limits_0^{\psi_2(x_*)-\psi_1(x_*)} g(\psi_1(x_*) + s, x_*)ds\right]^{1/2} = \left[2\int\limits_{\psi_1(x_*)}^{\psi_2(x_*)} g(u, x_*)du\right]^{1/2}. \tag{65}$$

Эта формула будет использована в п. 2.4.

Зная $Q_0^{(-)}u(\sigma)$, из (59) находим функцию $Q_0^{(-)}v(\sigma)$, которая также имеет оценку вида (64).

Функции $Q_i^{(-)}u(\sigma)$ и $Q_i^{(-)}v(\sigma)$ при $i \ge 1$ определяются аналогично тому, как в пп. 2.2.2 были определены функции $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$ и $\Pi_i^{(-)}v(\xi)$, и имеют оценки вида (64).

Итак, ряды (57) построены, и тем самым завершено построение формальной асимптотики на отрезке $[0, x_*]$.

**Замечание 1.** При построении рядов (21), (22) и (57) говорилось о том, что все функции $Q_i^{(-)}u$ и $Q_i^{(-)}v$ равны нулю при $x = 0$, а функции $\Pi_i^{(-)}u$, $\Pi_i^{(-)}v$ и $P_i^{(-)}u$, $P_i^{(-)}v$ равны нулю при $x = x_*$. Это достигается применением стандартной процедуры умножения этих функций на срезающие функции (см. [1]), что не влияет на построенные асимптотические разложения. За подправленными пограничными функциями сохраняем старые обозначения. Будем считать, что

$$\begin{gathered} Q_i^{(-)}u = Q_i^{(-)}v = 0 \quad \text{при} \quad x \in [0; x_*/2], \\ \Pi_i^{(-)}u = \Pi_i^{(-)}v = P_i^{(-)}u = P_i^{(-)}v = 0 \quad \text{при} \quad x \in [x_*/2; x_*]. \end{gathered} \tag{66}$$

**Замечание 2.** Обозначим через $U_k^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V_k^{(-)}(x,\varepsilon)$ частичные суммы $k$-го порядка построенных рядов (12) и (13):

$$U_k^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k}\varepsilon^i(\overline{u}_i^{(-)}(x) + \Pi_i^{(-)}u(\xi) + \varepsilon^2 P_i^{(-)}u(\zeta) + Q_i^{(-)}u(\sigma)), \tag{67}$$

$$V_k^{(-)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i (\bar{v}_i^{(-)}(x) + \Pi_i^{(-)}v(\xi) + P_i^{(-)}v(\zeta) + Q_i^{(-)}v(\sigma)). \tag{68}$$

Из самого способа построения рядов (12) и (13) следует, что для $U_k^{(-)}$, $V_k^{(-)}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы равенства

$$L_\varepsilon(U_k^{(-)}, V_k^{(-)}) := \varepsilon^2 \left( \frac{d^2 U_k^{(-)}}{dx^2} - w(x) \frac{dU_k^{(-)}}{dx} \right) - F(U_k^{(-)}, V_k^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1}), \quad x \in (0, x_*),$$

$$M_\varepsilon(V_k^{(-)}, U_k^{(-)}) := \varepsilon^2 \frac{dV_k^{(-)}}{dx} - f(U_k^{(-)}, V_k^{(-)}, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^{k+1}), \quad x \in (0, x_*), \tag{69}$$

$$U_k^{(-)}(0,\varepsilon) = u^0 + O(\varepsilon^{k+1}), \quad V_k^{(-)}(0,\varepsilon) = v^0, \quad U_k^{(-)}(x_*,\varepsilon) = \psi_2(x_*).$$

### *2.3. Построение асимптотики на отрезке* $[x_*, 1]$

Заметим, прежде всего, что вид асимптотики $U^{(+)}(x,\varepsilon)$, $V^{(+)}(x,\varepsilon)$ на отрезке $[x_*, 1]$ (см. (14), (15)) существенно отличается от вида $U^{(-)}(x,\varepsilon)$, $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ (см. (12), (13)). Отличие состоит в том, что $U^{(+)}$ и $V^{(+)}$ не содержат $P$-функций. Это соответствует тому, что краевые условия (18) не содержат условия для $V^{(+)}$ (в отличие от (17)). На первый взгляд может показаться, что для $V^{(+)}(x,\varepsilon)$ следует задать в точке $x_*$ краевое условие $V^{(+)}(x_*,\varepsilon) = V^{(-)}(x_*,\varepsilon)$, чтобы обеспечить непрерывное сшивание асимптотик $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ в точке $x_*$. Однако, как будет показано ниже, непрерывное и, более того, сколь угодно гладкое сшивание $V^{(+)}$ и $V^{(-)}$ в точке $x_*$ будет достигнуто за счет выбора точки $x_*$.

Регулярные части асимптотики $\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $\bar{v}^{(+)}(x,\varepsilon)$ строятся в виде, аналогичном (19):

$$\bar{u}^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{u}_i^{(+)}(x), \quad \bar{v}^{(+)}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \bar{v}_i^{(+)}(x).$$

Главные члены $\bar{u}_0^{(+)}(x)$ и $\bar{v}_0^{(+)}(x)$ этих рядов являются решением вырожденной системы (4), связанным с корнем $u = \psi_3(x)$ уравнения (5):

$$\bar{u}_0^{(+)}(x) = \psi_3(x), \quad \bar{v}_0^{(+)}(x) = \varphi(\psi_3(x), x).$$

Функции $\bar{u}_i^{(+)}(x)$, $\bar{v}_i^{(+)}(x)$ при $i \geq 1$ определяются из линейных систем вида (20) (с заменой индекса $(-)$ на $(+)$), определитель которых $\Delta^{(+)}(x) = f_v^{(+)}(x)\bar{g}_u^{(+)}(x) < 0$ в силу неравенств из условий A5 и A4, относящихся к кривым $L_5$ и $l_5$.

Внутрислойные части асимптотики $Q^{(+)}u(\sigma,\varepsilon)$, $Q^{(+)}v(\sigma,\varepsilon)$ построим в виде

$$Q^{(+)}u(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(+)}u(\sigma), \quad Q^{(+)}v(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i Q_i^{(+)}v(\sigma), \quad \sigma = (x - x_*)/\varepsilon \geq 0.$$

Для $Q^{(+)}u$, $Q^{(+)}v$ стандартным способом получается система такого же типа, как (58), откуда для $Q_0^{(+)}u$, $Q_0^{(+)}v$ имеем систему уравнений

$$\frac{d^2 Q_0^{(+)}u}{d\sigma^2} = F(\bar{u}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}u, \bar{v}_0(x_*) + Q_0^{(+)}v, x_*, 0),$$

$$0 = f(\bar{u}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}u, \bar{v}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}v, x_*, 0), \quad \sigma \geq 0.$$

Из второго уравнения, используя условие A2, получаем

$$\bar{v}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}v = \varphi(\bar{u}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}u, x_*). \tag{70}$$

Подставляя в первое уравнение, приходим к уравнению для $Q_0^{(+)}u$, аналогичному уравнению (60) для $Q_0^{(-)}u$:

$$\frac{d^2Q_0^{(+)}u}{d\sigma^2} = g(\bar{u}_0^{(+)}(x_*) + Q_0^{(+)}u, x_*), \quad \sigma \ge 0. \tag{71}$$

Также стандартным способом добавляем граничные условия

$$Q_0^{(+)}u(0) = \psi_2(x_*) - u_0^{(+)}(x_*) = \psi_2(x_*) - \psi_3(x_*) < 0, \tag{72}$$

$$Q_0^{(+)}u(\infty) = 0 \tag{73}$$

и сводим задачу (71)–(73) к уравнению первого порядка

$$\frac{dQ_0^{(+)}u}{d\sigma} = \left[2\int\limits_0^{Q_0^{(+)}u} g(\psi_3(x_*) + s, x_*)ds\right]^{1/2}, \quad \sigma \ge 0, \tag{74}$$

с начальным условием (72).

Уравнение (74) интегрируется в квадратурах, его решение с начальным условием (72) является отрицательной возрастающей функцией и имеет экспоненциальную оценку

$$\left|Q_0^{(+)}u(\sigma)\right| \le c\exp(-\kappa\sigma), \quad \sigma \ge 0. \tag{75}$$

После этого функция $Q_0^{(+)}v(\sigma)$ находится из (70) и также имеет оценку вида (75). Такую же оценку имеет производная $\dfrac{dQ_0^{(+)}u}{d\sigma}(\sigma)$.

Из (74) при $\sigma = 0$ получаем

$$\frac{dQ_0^{(+)}u}{d\sigma}(0) = \left[2\int\limits_{\psi_3(x_*)}^{\psi_2(x_*)} g(u, x_*)du\right]^{1/2}. \tag{76}$$

Эта формула будет использована в п. 2.4.

Функции $Q_i^{(+)}u(\sigma)$ и $Q_i^{(+)}v(\sigma)$ при $i \ge 1$ определяются аналогично тому, как в пп. 2.2.2 были определены функции $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$ и $\Pi_i^{(-)}v(\xi)$, и имеют оценки вида (75).

Итак, внутрислойные ряды $Q^{(+)}u(\sigma,\varepsilon)$ и $Q^{(+)}v(\sigma,\varepsilon)$ построены.

Погранслойные части асимптотики $\Pi^{(+)}u(\tilde{\xi},\varepsilon)$, $\Pi^{(+)}v(\tilde{\xi},\varepsilon)$ строятся в виде рядов

$$\Pi^{(+)}u(\tilde{\xi},\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_i^{(+)}u(\tilde{\xi}),$$

$$\Pi^{(+)}v(\tilde{\xi},\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\Pi_i^{(+)}v(\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} = (x-1)/\varepsilon \le 0,$$

аналогично построению рядов $\Pi^{(-)}u(\xi,\varepsilon)$, $\Pi^{(-)}v(\xi,\varepsilon)$.

Стандартным способом для $\Pi_0^{(+)}u$, $\Pi_0^{(+)}v$ получается система уравнений, аналогичная (25):

$$\frac{d^2\Pi_0^{(+)}u}{d\tilde{\xi}^2} = F(\bar{u}_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}u, \bar{v}_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}v, 1, 0),$$

$$0 = f(\bar{u}_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}u, v_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}v, 1, 0), \quad \tilde{\xi} \le 0.$$

Из второго уравнения имеем

$$\bar{v}_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}v = \varphi(\bar{u}_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}u, 1). \tag{77}$$

Подставляя в первое уравнение, приходим к уравнению для $\Pi_0^{(+)}u$, аналогичному (27):

$$\frac{d^2\Pi_0^{(+)}u}{d\tilde{\xi}^2} = g(\bar{u}_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}u, 1), \quad \tilde{\xi} \le 0. \tag{78}$$

Также стандартным образом получаем граничные условия

$$\Pi_0^{(+)}u(0) = u^1 - \bar{u}_0^{(+)}(1) = u^1 - \psi_3(1), \quad \Pi_0^{(+)}u(-\infty) = 0. \tag{79}$$

Если $u^1 = \psi_3(1)$, то $\Pi_0^{(+)}u(\tilde{\xi}) = 0$ при $\tilde{\xi} \le 0$, а если $u^1 \ne \psi_3(1)$, то задача (78), (79) сводится к уравнению первого порядка

$$\frac{d\Pi_0^{(+)}u}{d\tilde{\xi}} = \pm\left[2\int_0^{\Pi_0^{(+)}u} g(\psi_3(1) + s, 1)ds\right]^{1/2}, \quad \tilde{\xi} \le 0, \tag{80}$$

с начальным условием при $\tilde{\xi} = 0$ из (79), причем в правой части (80) берется знак плюс, если $u^1 > \psi_3(1)$, и знак минус, если $u^1 < \psi_3(1)$.

Уравнение (80) интегрируется в квадратурах, функция $\Pi_0^{(+)}u(\tilde{\xi})$ является монотонной при $\tilde{\xi} \le 0$ и имеет экспоненциальную оценку

$$\left|\Pi_0^{(+)}u(\tilde{\xi})\right| \le c\exp(\kappa\tilde{\xi}), \quad \tilde{\xi} \le 0. \tag{81}$$

Такую же оценку имеют производная $\dfrac{d\Pi_0^{(+)}u}{d\tilde{\xi}}(\tilde{\xi})$ и функция $\Pi_0^{(+)}v(\tilde{\xi})$, которая определяется теперь из (77).

Функции $\Pi_i^{(+)}u(\tilde{\xi})$, $\Pi_i^{(+)}v(\tilde{\xi})$ при $i \ge 1$ определяются аналогично тому, как в пп. 2.2.2 были определены функции $\Pi_i^{(-)}u(\xi)$, $\Pi_i^{(-)}v(\xi)$ и имеют оценки вида (81).

Таким образом, завершено построение формальной асимптотики на отрезке $[x_*, 1]$.

**Замечание 3.** Как и при построении асимптотики на отрезке $[0, x_*]$, считаем, что все функции $Q_i^{(+)}u$, $Q_i^{(+)}v$ и $\Pi_i^{(+)}u$, $\Pi_i^{(+)}v$ умножены на соответствующие срезающие функции.

**Замечание 4.** Обозначим через $U_k^{(+)}(x,\varepsilon)$, $V_k^{(+)}(x,\varepsilon)$ частичные суммы $k$-го порядка построенных рядов (14) и (15):

$$\begin{aligned} U_k^{(+)}(x,\varepsilon) &= \sum_{i=0}^{k} \varepsilon^i(\bar{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}u(\sigma) + \Pi_i^{(+)}u(\tilde{\xi})), \\ V_k^{(+)}(x,\varepsilon) &= \sum_{i-0}^{k} \varepsilon^i(\bar{v}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}v(\sigma) + \Pi_i^{(+)}v(\tilde{\xi})). \end{aligned} \tag{82}$$

Из самого способа построения рядов (14) и (15) следует, что $U_k^{(+)}$ и $V_k^{(+)}$ удовлетворяют для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ равенствам (операторы $L_\varepsilon$ и $M_\varepsilon$ определены в (69))

$$L_\varepsilon(U_k^{(+)}, V_k^{(+)}) = O(\varepsilon^{k+1}), \quad x \in (x_*, 1), \tag{83}$$

$$M_\varepsilon(V_k^{(+)}, U_k^{(+)}) = O(\varepsilon^{k+1}), \quad x \in (x_*, 1), \tag{84}$$

$$U_k^{(+)}(x_*, \varepsilon) = \psi_2(x_*), \quad U_k^{(+)}(x_*, \varepsilon) = u^1. \tag{85}$$

### *2.4. Сшивание формальных асимптотик в точке $x_*$*

Построенные формальные ряды $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$ удовлетворяют равенству

$$U^{(-)}(x_*, \varepsilon) = U^{(+)}(x_*, \varepsilon), \tag{86}$$

так как обе части этого формального равенства равны $\psi_2(x_*)$ (см. (17) и (18)). Аналогичное равенство для $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V^{(+)}(x,\varepsilon)$ не имеет места при произвольном $x_*$. Оказывается, однако, что формальное равенство

$$V^{(-)}(x_*,\varepsilon) = V^{(+)}(x_*,\varepsilon) \tag{87}$$

будет выполнено, если $x_*$ выбрать так, чтобы в точке $x_*$ выполнялось формальное равенство производных $\dfrac{dU^{(-)}}{dx}$ и $\dfrac{dU^{(+)}}{dx}$. Используя выражения (12) и (14), учитывая замечания 1 и 3 и умножив указанные производные в точке $x_*$ на $\varepsilon$, запишем равенство в виде

$$\varepsilon\frac{d\bar{u}^{(-)}}{dx}(x_*,\varepsilon) + \frac{dQ^{(-)}u}{d\sigma}(0,\varepsilon) = \varepsilon\frac{d\bar{u}^{(+)}}{dx}(x_*,\varepsilon) + \frac{dQ^{(+)}u}{d\sigma}(0,\varepsilon).$$

Подставив в это равенство выражения для $\bar{u}^{(\pm)}$ и $Q^{(\pm)}u$ в виде рядов и учитывая, что функции $Q_i^{(\pm)}u$ зависят не только от $\sigma$, но и от $x_*$, т.е. $Q_i^{(\pm)}u = Q_i^{(\pm)}u(\sigma,x_*)$, перепишем равенство в виде

$$\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\left(\frac{dQ_i^{(-)}u}{d\sigma}(0,x_*) - \frac{dQ_i^{(+)}u}{d\sigma}(0,x_*)\right) + \varepsilon\sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\left(\frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(x_*) - \frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(x_*)\right) = 0. \tag{88}$$

Равенство (88) является уравнением относительно $x_*$. Будем искать $x_*$ в виде ряда

$$x_* = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i x_i. \tag{89}$$

Подставим это выражение в (88), разложим левую часть уравнения в ряд по степеням $\varepsilon$ и будем приравнивать нулю коэффициенты разложения. В нулевом приближении получим

$$\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\sigma}(0,x_0) - \frac{dQ_0^{(+)}u}{d\sigma}(0,x_0) = 0,$$

т.е. (см. (65) и (76))

$$J(x_0) := \left[2\int_{\psi_1(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(u,x_0)du\right]^{1/2} - \left[2\int_{\psi_3(x_0)}^{\psi_2(x_0)} g(u,x_0)du\right]^{1/2} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (7) из условия A3, поэтому оно имеет корень $x_0 = \bar{x}_0 \in (0;1)$, причем $J'(\bar{x}_0) \neq 0$ в силу (8).

Для следующих коэффициентов $x_i$ ряда (89) последовательно при $i = 1, 2, \ldots$ получаются линейные уравнения

$$J'(\bar{x}_0)x_i + k_i = 0, \tag{90}$$

где $k_i$ – известные на $i$-м шаге числа, выражающиеся определенным образом через найденные уже коэффициенты $x_j$ с номерами $j < i$. Так как $J'(\bar{x}_0) \neq 0$, то уравнение (90) имеет единственное решение, которое обозначим $\bar{x}_i$:

$$\bar{x}_i = -\left(J'(\bar{x}_0)\right)^{-1}k_i, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Итак, для точки перехода $x_*$ получено формальное разложение

$$x_* = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i\bar{x}_i =: \bar{x}_*, \tag{91}$$

обеспечивающее выполнение формального равенства

$$\frac{dU^{(-)}}{dx}(\bar{x}_*,\varepsilon) = \frac{dU^{(+)}}{dx}(\bar{x}_*,\varepsilon). \tag{92}$$

Докажем, что для точки $x_* = \bar{x}_*$ с формальным разложением (91) выполнены также формальное равенство (87) и формальное равенство

$$\frac{dV^{(-)}}{dx}(\bar{x}_*, \varepsilon) = \frac{dV^{(+)}}{dx}(\bar{x}_*, \varepsilon). \tag{93}$$

С этой целью введем обозначения

$$u^{(-)}(\sigma,\varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(\bar{x}_* + \varepsilon\sigma, \varepsilon) + Q^{(-)}u(\sigma, \bar{x}_*, \varepsilon),$$

$$v^{(-)}(\sigma,\varepsilon) = \bar{v}^{(-)}(\bar{x}_* + \varepsilon\sigma, \varepsilon) + Q^{(-)}v(\sigma, \bar{x}_*, \varepsilon),$$

где $\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(-)}(x,\varepsilon)$ – ряды (19), $Q^{(-)}u(\sigma,\bar{x}_*,\varepsilon)$, $Q^{(-)}v(\sigma,\bar{x}_*,\varepsilon)$ – ряды (57), $\bar{x}_*$ – ряд (91).

Для $u^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, $v^{(-)}(\sigma,\varepsilon)$, используя (58), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u^{(-)}}{d\sigma^2} - \varepsilon w(\bar{x}_* + \varepsilon\sigma)\frac{du^{(-)}}{d\sigma} = F(u^{(-)}(\sigma,\varepsilon), v^{(-)}(\sigma,\varepsilon), \bar{x}_* + \varepsilon\sigma, \varepsilon),\\ &\varepsilon\frac{dv^{(-)}}{d\sigma} = f(u^{(-)}(\sigma,\varepsilon), v^{(-)}(\sigma,\varepsilon), \bar{x}_* + \varepsilon\sigma, \varepsilon), \quad \sigma \le 0. \end{aligned} \tag{94}$$

Такая же система уравнений с заменой индекса (–) на (+) имеет место для

$$u^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(\bar{x}_* + \varepsilon\sigma, \varepsilon) + Q^{(+)}u(\sigma, \bar{x}_*, \varepsilon),$$

$$v^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \bar{v}^{(+)}(\bar{x}_* + \varepsilon\sigma, \varepsilon) + Q^{(+)}v(\sigma, \bar{x}_*, \varepsilon)$$

при $\sigma \ge 0$.

Напишем формальные разложения $u^{(\pm)}(\sigma,\varepsilon)$ и $v^{(\pm)}(\sigma,\varepsilon)$ в ряды по степеням $\varepsilon$:

$$u^{(-)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i^{(-)}(\sigma), \quad v^{(-)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_i^{(-)}(\sigma), \quad \sigma \le 0, \tag{95}$$

$$u^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i^{(+)}(\sigma), \quad v^{(+)}(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i v_i^{(+)}(\sigma), \quad \sigma \ge 0. \tag{96}$$

Главные члены этих разложений имеют вид

$$u_0^{(\pm)}(\sigma) = u_0^{(\pm)}(\bar{x}_0) + Q_0^{(\pm)}u(\sigma,\bar{x}_0), \quad v_0^{(\pm)}(\sigma) = v_0^{(\pm)}(\bar{x}_0) + Q_0^{(\pm)}v(\sigma,\bar{x}_0). \tag{97}$$

Из (86) при $x_* = \bar{x}_*$ и (92) следуют равенства

$$u_i^{(-)}(0) = u_i^{(+)}(0), \quad \frac{du_i^{(-)}}{d\sigma}(0) = \frac{du_i^{(\pm)}}{d\sigma}(0), \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{98}$$

Докажем, что аналогичные равенства имеют место для $v_i^{(\pm)}(\sigma)$, т.е.

$$v_i^{(-)}(0) = v_i^{(+)}(0), \quad \frac{dv_i^{(-)}}{d\sigma}(0) = \frac{dv_i^{(+)}}{d\sigma}(0), \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{99}$$

Отсюда последуют формальные равенства (87) при $x_* = \bar{x}_*$ и (93). Введем функции для $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$u_i(\sigma) = \begin{cases} u_i^{(-)}(\sigma), & \sigma \le 0,\\ u_i^{(+)}(\sigma), & \sigma \ge 0, \end{cases} \quad v_i(\sigma) = \begin{cases} v_i^{(-)}(\sigma), & \sigma \le 0,\\ v_i^{(-)}(\sigma), & \sigma > 0, \end{cases}$$

в частности (см. (97))

$$u_0(\sigma) = \begin{cases} \bar{u}_0^{(-)}(\bar{x}_0) + Q_0^{(-)}u(\sigma,\bar{x}_0), & \sigma \le 0,\\ \bar{u}_0^{(+)}(\bar{x}_0) + Q_0^{(+)}u(\sigma,\bar{x}_0), & \sigma \ge 0, \end{cases} \quad v_0(\sigma) = \begin{cases} \bar{v}_0^{(-)}(\bar{x}_0) + Q_0^{(-)}v(\sigma,\bar{x}_0), & \sigma \le 0,\\ \bar{v}_0^{(-)}(\bar{x}_0) + Q_0^{(-)}v(\sigma,\bar{x}_0), & \sigma > 0. \end{cases}$$

Из (60) и (71) следует, что функция $u_0(\sigma)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u_0}{d\sigma^2} = g(u_0, \bar{x}_0), \quad -\infty < \sigma < \infty,$$

а равенства (98) при $i = 0$ показывают, что это решение удовлетворяет начальным условиям

$$u_0(0) = \psi_2(\bar{x}_0), \quad \frac{du_0}{d\sigma}(0) = \left[2\int\limits_{\psi_1\bar{x}_0}^{\psi_2(\bar{x}_0)} g(u, \bar{x}_0)du\right]^{1/2}.$$

Следовательно, $u_0(\sigma)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty < \sigma < \infty$.

Функцию $v_0(\sigma)$ можно записать в виде (см. (59) и (70))

$$v_0(\sigma) = \varphi(u_0(\sigma), \bar{x}_0),$$

откуда следует, что $v_0(\sigma)$ также бесконечно гладкая функция при $-\infty < \sigma < \infty$, и, значит, выполнены равенства (99) для $i = 0$.

Далее по индукции докажем, что $u_i(\sigma)$ и $v_i(\sigma)$ – бесконечно гладкие функции при $\infty < \sigma < \infty$ для всех $i \geq 1$. Пусть $u_i(\sigma)$, $v_i(\sigma)$ – бесконечно гладкие функции для $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Покажем, что тогда $u_k(\sigma)$, $v_k(\sigma)$ также будут бесконечно гладкими функциями при $-\infty < \sigma < \infty$.

Подставим выражения (95) для $u^{(-)}$, $v^{(-)}$ в систему уравнений (94), а выражения (96) – в аналогичную систему уравнений для $u^{(+)}$, $v^{(+)}$, и приравняем коэффициенты при $\varepsilon^k$ в разложениях левой и правой части каждого уравнения. Получим систему уравнений

$$\frac{d^2u_k^{(\pm)}}{d\sigma^2} = F_u(\sigma)u_k^{(\pm)} + F_v(\sigma)v_k^{(\pm)} + r_k(\sigma), \tag{100}$$

$$f_u(\sigma)u_k^{(\pm)} + f_v(\sigma)v_k^{(\pm)} + \gamma_k(\sigma) = 0, \tag{101}$$

где $F_u(\sigma) := \frac{\partial F}{\partial u}(u_0(\sigma), v_0(\sigma), \bar{x}_0, 0)$, обозначения $F_v(\sigma)$, $f_u(\sigma)$, $f_v(\sigma)$ имеют аналогичный смысл, а $r_k(\sigma)$ и $\gamma_k(\sigma)$ выражаются через $u_i(\sigma)$, $v_i(\sigma)$ с номерами $i \leq k-1$ и являются бесконечно гладкими функциями при $-\infty < \sigma < \infty$ в силу индуктивного предположения. Так как $f_v(\sigma) \leq -\kappa < 0$ (это следует из условия A5 аналогично тому, как было получено неравенство (43)), то из (101) имеем

$$v_k^{(\pm)} = -f_v^{-1}(\sigma)[f_u(\sigma)u_k^{(\pm)} + \gamma_k(\sigma)]. \tag{102}$$

Подставляя это выражение в (100), приходим к уравнению для $u_k^{(\pm)}$:

$$\frac{d^2u_k^{(\pm)}}{d\sigma^2} = g_u(\sigma)u_k^{(\pm)} + h_k(\sigma),$$

где $g_u(\sigma) := \frac{\partial g}{\partial u}(u_0(\sigma), \bar{x}_0)$ – бесконечно гладкая функция при $-\infty < \sigma < \infty$. Следовательно, функция $u_k(\sigma)$ является решением уравнения

$$\frac{d^2u_k}{d\sigma^2} = g_u(\sigma)u_k + h_k(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty,$$

с начальными условиями (см. (98))

$$u_k(0) = u_k^{(-)}(0) = u_k^{(+)}(0), \quad \frac{du_k}{d\sigma}(0) = \frac{du_k^{(-)}}{d\sigma}(0) = \frac{du_k^{(+)}}{d\sigma}(0).$$

Поэтому $u_k(\sigma)$ – бесконечно гладкая функция. Из (102) следует теперь, что $v_k(\sigma) = -f_v^{-1}(\sigma)[f_u(\sigma)u_k(\sigma) + \gamma_k(\sigma)]$ – также бесконечно гладкая функция при $-\infty < \sigma < \infty$, и, следовательно, равенства (99) выполнены для $i = k$.

Таким образом, для $x_* = \bar{x}_*$ с разложением (91) выполнены формальные равенства (87) и (93).

## 3. ПЕРВАЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Возьмем какое-нибудь целое число $n \geq 0$, положим

$$x_\delta := X_{n+1} + \varepsilon^{n+1}\delta, \tag{103}$$

где $X_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \bar{x}_i$, $\bar{x}_i$ – коэффициенты ряда (91), а $\delta$ – является величиной порядка $O(\varepsilon)$, и рассмотрим краевую задачу для системы (1) на отрезке $[0, x_\delta]$ с краевыми условиями:

$$u(0,\varepsilon) = u^0, \quad v(0,\varepsilon) = v^0, \quad u(x_\delta,\varepsilon) = \psi_2(x_\delta). \tag{104}$$

Для достаточно малых $\varepsilon$ точка $x_\delta$ сколь угодно близка к $\bar{x}_0$, поэтому для задачи (1), (104) можно построить формальные асимптотические ряды $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ (см. (12) и (13)), в которых $x_* = x_\delta$. Составим частичные суммы $U^{(-)}_{n+1}(x,\varepsilon)$ и $V^{(-)}_{n+1}(x,\varepsilon)$ этих рядов по формулам (67) и (68). Аргумент $\sigma$ функций $Q_i^{(-)}u$ и $Q_i^{(-)}v$ в этих суммах равен $(x - x_\delta)/\varepsilon$.

**Теорема 1.** *Если выполнены условия* A1–A8, *то для достаточно малых* $\varepsilon$ *задача* (1), (104) *имеет решение* $u = u^{(-)}(x,\varepsilon,\delta)$, $v = v^{(-)}(x,\varepsilon,\delta)$, *для которого справедливы асимптотические равенства*

$$\begin{aligned} u^{(-)}(x,\varepsilon,\delta) &= U^{(-)}_{n+1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+2}), \\ v^{(-)}(x,\varepsilon,\delta) &= V^{(-)}_{n+1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+2}), \quad x \in [0, x_\delta]. \end{aligned} \tag{105}$$

**Доказательство.** Доказательство теоремы проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. [10]), суть которого состоит в том, что нижнее и верхнее решения задачи (1), (104) конструируются на основе построенной в разд. 2 формальной асимптотики. Это делается во многом так же, как в аналогичной задаче в [1], поэтому ограничимся кратким изложением схемы доказательства. Напомним понятия нижнего и верхнего решений применительно к задаче (1), (104).

**Определение 1.** Две пары функций $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$ и $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ называются *упорядоченными нижним и верхним решениями задачи* (1), (104), если они удовлетворяют следующим условиям:

$$1^\circ. \quad \underline{U}(x,\varepsilon) \leq \overline{U}(x,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) \leq \overline{V}(x,\varepsilon), \quad x \in [0, x_\delta]$$

(условие упорядоченности).

$$2^\circ. \quad L_\varepsilon(\underline{U}, v) := \varepsilon^2\left(\frac{d^2\underline{U}}{dx^2} - w(x)\frac{d\underline{U}}{dx}\right) - F(\underline{U}, v, x, \varepsilon) \geq 0 \geq L_\varepsilon(\overline{U}, v)$$

при $\underline{V}(x,\varepsilon) \leq v \leq \overline{V}(x,\varepsilon)$, $0 < x < x_\delta$;

$$M_\varepsilon(\underline{V}, u) := \varepsilon^2\frac{d\underline{V}}{dx} - f(u, \underline{V}, x, \varepsilon) \leq 0 \leq M_\varepsilon(\overline{V}, u)$$

при $\underline{U}(x,\varepsilon) \leq u \leq \overline{U}(x,\varepsilon)$, $0 < x \leq x_\delta$.

$$3^\circ. \quad \underline{U}(0,\varepsilon) \leq u^0 \leq \overline{U}(0,\varepsilon), \quad \underline{V}(0,\varepsilon) \leq v^0 \leq \overline{V}(0,\varepsilon),$$

$$\underline{U}(x_\delta,\varepsilon) \leq \psi_2(x_\delta) \leq \overline{U}(x_\delta,\varepsilon).$$

Если существуют упорядоченные нижнее и верхнее решения задачи (1), (104), то эта задача имеет решение $u = u^{(-)}(x,\varepsilon,\delta)$, $v = v^{(-)}(x,\varepsilon,\delta)$ (возможно, не единственное), удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} \underline{U}(x,\varepsilon) &\leq u^{(-)}(x,\varepsilon,\delta) \leq \overline{U}(x,\varepsilon), \\ \underline{V}(x,\varepsilon) &\leq v^{(-)}(x,\varepsilon,\delta) \leq \overline{V}(x,\varepsilon), \quad x \in [0, x_\delta]. \end{aligned} \tag{106}$$

Видно, что если функция $F(u,v,x,\varepsilon)$ является невозрастающей функцией аргумента $v$, а функция $f(u,v,x,\varepsilon)$ – неубывающей функцией аргумента $u$ в области

$$G_0 = \{(u,v,x,\varepsilon) : \underline{U}(x,\varepsilon) \leq u \leq \overline{U}(x,\varepsilon), \underline{V}(x,\varepsilon) \leq v \leq \overline{V}(x,\varepsilon), 0 \leq x \leq x_\delta, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0\} \tag{107}$$

(в таком случае говорят, что функции $F$ и $f$ удовлетворяют условию квазимонотонности в области $G_0$), то для выполнения условия 2° из определения 1 достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$L_\varepsilon(\underline{U},\underline{V}) \geq 0 \geq L_\varepsilon(\overline{U},\overline{V}), \quad x \in (0, x_\delta), \tag{108}$$

$$M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) \leq 0 \leq M_\varepsilon(\overline{V},\overline{U}), \quad x \in (0, x_\delta]. \tag{109}$$

Это очевидное утверждение используется ниже при доказательстве теоремы 1.

Нижнее и верхнее решения задачи (1), (104) строятся в виде

$$\begin{gathered}\underline{U}(x,\varepsilon) = U_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) - (\alpha(x,\xi) + \gamma(\xi) + \tilde{\gamma}(\sigma))\varepsilon^{n+2} + G(\zeta)\varepsilon^{n+4},\\ \underline{V}(x,\varepsilon) = V_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) - (\beta(x,\xi) + \varphi_u^{(-)}(\xi)\gamma(\xi) + \tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma}(\sigma) + H(\zeta))\varepsilon^{n+2},\end{gathered} \tag{110}$$

$$\begin{gathered}\overline{U}(x,\varepsilon) = U_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) + \left(\alpha(x,\xi) + \gamma(\xi) + \tilde{\gamma}(\sigma)\right)\varepsilon^{n+2} - G(\zeta)\varepsilon^{n+4},\\ \overline{V}(x,\varepsilon) = V_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) + (\beta(x,\xi) + \varphi_u^{(-)}(\xi)\gamma(\xi) + \tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma}(\sigma) + H(\zeta))\varepsilon^{n+2}.\end{gathered} \tag{111}$$

Здесь $\alpha(x,\xi)$, $\beta(x,\xi)$ — решение линейной системы уравнений

$$\hat{F}_u(x,\xi)\alpha + \hat{F}_v(x,\xi)\beta = A, \quad \hat{f}_u(x,\xi)\alpha + \hat{f}_v(x,\xi)\beta = -kA, \tag{112}$$

где

$$\hat{F}_u(x,\xi) := \frac{\partial F}{\partial u}(\overline{u}_0^{(-)}(x) + \Pi_0^{(-)}u(\xi), \varphi(\overline{u}_0(x) + \Pi_0^{(-)}u(\xi), x), x, 0) = \overline{F}_u^{(-)}(x) + F_u^{(-)}(\xi) - \overline{F}_u^{(-)}(0) + O(\varepsilon), \tag{113}$$

$\overline{F}_u^{(-)}(x)$ и $F_u^{(-)}(\xi)$ определены в (10) и (41), $\hat{F}_v(x,\xi)$, $\hat{f}_u(x,\xi)$, $\hat{f}_v(x,\xi)$ имеют выражения, аналогичные выражениям для $\hat{F}_u(x,\xi)$, $A$ и $k$ — независящие от $\varepsilon$ положительные числа, выбор которых уточняется ниже.

В силу условий A6, A7, A5 справедливы неравенства

$$\hat{F}_v(x,\xi) \leq -c < 0, \quad \hat{f}_u(x,\xi) \geq c > 0, \quad \hat{f}_v(x,\xi) \leq -c < 0, \quad x \in [0; x_\delta], \tag{114}$$

а в силу условия A4 — неравенство

$$\hat{g}_u(x,\xi) := \frac{\partial g}{\partial u}\left(\overline{u}_0^{(-)}(x) + \Pi_0^{(-)}u(\xi), x\right) \geq c > 0, \quad x \in [0, x_\delta]. \tag{115}$$

Так как

$$\hat{g}_u(x,\xi) = \hat{F}_u(x,\xi) - \hat{F}_v(x,\xi)\hat{f}_v^{-1}(x,\xi)\hat{f}_u(x,\xi),$$

то из (114) и (115) следует, что

$$\hat{F}_u(x,\xi) \geq c > 0, \quad x \in [0, x_\delta].$$

Из (114) и (115) следует также, что определитель $\Delta(x,\xi)$ линейной системы (112) удовлетворяет неравенству

$$\Delta(x,\xi) = \hat{F}_u(x,\xi)\hat{f}_v(x,\xi) - \hat{F}_v(x,\xi)\hat{f}_u(x,\xi) = \hat{f}_v(x,\xi)\hat{g}_u(x,\xi) \leq -c < 0, \quad x \in [0, x_\delta]. \tag{116}$$

Поэтому система (112) имеет единственное решение

$$\begin{gathered}\alpha(x,\xi) = (\hat{f}_v(x,\xi) + k\hat{F}_v(x,\xi))\Delta^{-1}(x,\xi)A \geq c(1+k)A,\\ \beta(x,\xi) = -(\hat{f}_u(x,\xi) + k\hat{F}_u(x,\xi))\Delta^{-1}(x,\xi)A \geq c(1+k)A.\end{gathered} \tag{117}$$

Функция $\varphi_u^{(-)}(\xi)$, входящая в выражения для $\underline{V}$ и $\overline{V}$, определена в (45), функция $\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)$ имеет аналогичное выражение:

$$\hat{\varphi}_u^{(-)}(\sigma) = -(\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma))^{-1}\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\overline{u}_0^{(-)}(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma), x_\delta), \tag{118}$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma) &:= \frac{\partial f}{\partial v}(\bar{u}_0^{(-)}(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma), \bar{v}_0^{(-)}(x_\delta) + Q_0^{(-)}v(\sigma), x_\delta, 0),\\ \tilde{f}_u^{(-)}(\sigma) &:= \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma), \bar{v}_0^{(-)}(x_\delta) + Q_0^{(-)}v(\sigma), x_\delta, 0).\end{aligned} \tag{119}$$

Ниже нам понадобится также оценка для $\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)$, аналогичная (43):

$$\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma) \le -\kappa < 0 \quad \text{при} \quad \sigma \le 0. \tag{120}$$

Функции $\gamma(\xi)$, $\tilde{\gamma}(\sigma)$, $G(\zeta)$, $H(\zeta)$, входящие в выражения (110) и (111), выбираются в точности так же, как в [1], и имеют оценки

$$\begin{gathered}0 \le \gamma(\xi) \le c(1+k)A\exp(-\kappa\xi), \quad \xi \ge 0; \quad 0 \le \tilde{\gamma}(\sigma) \le c(1+k)A\exp(\kappa\sigma), \quad \sigma \le 0,\\ 0 \le G(\zeta) \le c(1+k)A\exp(-\kappa\zeta), \quad 0 \le H(\zeta) \le c(1+k)A\exp(-\kappa\zeta), \quad \zeta \ge 0.\end{gathered} \tag{121}$$

Кроме того, эти функции умножаются на срезающие функции, в результате чего

$$\begin{gathered}\gamma(\xi) = 0, \quad G(\zeta) = 0, \quad H(\zeta) = 0 \quad \text{на отрезке} \quad [x_\delta/2; x_\delta],\\ \tilde{\gamma}(\sigma) = 0 \quad \text{на отрезке} \quad [0; x_\delta/2].\end{gathered} \tag{122}$$

Заметим теперь, что кривая

$$L_\varepsilon^{(-)} := \{(u, v, x) : u = U_n^{(-)}(x,\varepsilon),\ v = V_n^{(-)}(x,\varepsilon),\ x \in [0; x_\delta]\}$$

для достаточно малых $\varepsilon$ расположена в такой малой окрестности кривой $L^{(-)}$ (см. (9)), в которой выполняются неравенства $\dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v,x,\varepsilon) < 0$ и $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,x,\varepsilon) > 0$ в силу условий A6 и A7. Поэтому для достаточно малого $\varepsilon_0$ функции $F$ и $f$ удовлетворяют условию квазимонотонности в области $G_0$, определенной в (107), и, следовательно, для выполнения условия 2° из определения 1 достаточно, чтобы были выполнены неравенства (108) и (109). Проверка выполнения этих неравенств для достаточно больших $A$, $k$ и достаточно малых $\varepsilon$ проводится раздельно на промежутках $(0; x_\delta/2]$ и $[x_\delta/2; x_\delta]$, причем выполнение неравенств (108) на обоих промежутках и неравенств (109) на промежутке $(0; x_\delta/2]$ проверяется в точности так же, как в [1]. При этом число $k$ можно считать фиксированным, а число $A$ выбирается достаточно большим.

Отличие от работы [1] возникает при проверке выполнения неравенств (109) на отрезке $[x_\delta/2; x_\delta]$. Именно здесь выбор числа $k$ играет важную роль. Рассмотрим отрезок $[x_\delta/2; x_\delta]$, учитывая, что на этом отрезке $\Pi_i^{(-)}u = \Pi_i^{(-)}v = P_i^{(-)}u = P_i^{(-)}v = 0$ (см. (66)), $\gamma(\xi) = 0$, $G(\zeta) = 0$, $H(\zeta) = 0$ (см. (122)), $\hat{F}_u(x,\xi) = \bar{F}_u^{(-)}(x)$, $\hat{F}_v(x,\xi) = \bar{F}_v^{(-)}(x)$, $\hat{f}_u(x,\xi) = \bar{f}_u^{(-)}(x)$, $\hat{f}_v(x,\xi) = \bar{f}_v^{(-)}(x)$, и, следовательно, (см. (117))

$$\begin{aligned}\alpha(x,\xi) = \bar{\alpha}(x) &:= (\bar{f}_v^{(-)}(x) + k\bar{F}_v^{(-)}(x))\Delta^{-1}(x)A,\\ \beta(x,\xi) = \bar{\beta}(x) &:= -(\bar{f}_u^{(-)}(x) + k\bar{F}_u^{(-)}(x))\Delta^{-1}(x)A,\end{aligned} \tag{123}$$

где

$$\Delta^{-1} = (\bar{f}_v^{(-)}(x)\bar{g}_u^{(-)}(x))^{-1} \le -c < 0, \quad x \in [x_\delta/2; x_\delta], \tag{124}$$

а формулы (110) и (111) принимают вид

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) - (\bar{\alpha}(x) + \tilde{\gamma}(\sigma))\varepsilon^{n+2},$$

$$\underline{V}(x,\varepsilon) = V_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) - (\bar{\beta}(x) + \tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma}(\sigma))\varepsilon^{n+2},$$

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = U_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) + (\bar{\alpha}(x) + \tilde{\gamma}(\sigma))\varepsilon^{n+2},$$

$$\overline{V}(x,\varepsilon) = V_{n+1}^{(-)}(x,\varepsilon) + (\bar{\beta}(x) + \tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma}(\sigma))\varepsilon^{n+2}.$$

Рассмотрим выражение для $M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U})$ на отрезке $[x_\delta/2; x_\delta]$:

$$
\begin{gathered}
M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) = M_\varepsilon(V_{n+1}^{(-)},U_{n+1}^{(-)}) - \varepsilon^2 \frac{d\overline{\beta}}{dx}\varepsilon^{n+2} - \varepsilon \frac{d}{d\sigma}(\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma})\varepsilon^{n+2} - [f(U_{n+1}^{(-)} - (\overline{\alpha} + \tilde{\gamma})\varepsilon^{n+2}, \\
V_{n+1}^{(-)} - (\overline{\beta} + \tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma})\varepsilon^{n+2}, x, \varepsilon) - f(U_{n+1}^{(-)}, V_{n+1}^{(-)}, x, \varepsilon)] = M_\varepsilon(V_{n+1}^{(-)},U_{n+1}^{(-)}) + \\
+ O((1+k)A)\varepsilon^{n+3} + f_a(x,\varepsilon)(\overline{\alpha} + \tilde{\gamma})\varepsilon^{n+2} + f_v(x,\varepsilon)(\overline{\beta} + \tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma})\varepsilon^{n+2} + O((1+k)^2A^2)\varepsilon^{2n+4},
\end{gathered} \tag{125}
$$

где

$$
f_u(x,\varepsilon) := \frac{\partial f}{\partial u}(U_{n+1}^{(-)}, V_{n+1}^{(-)}, x, \varepsilon) = \tilde{f}_u(x,\sigma) + O(\varepsilon),
$$

$$
f_v(x,\varepsilon) := \frac{\partial f}{\partial v}(U_{n+1}^{(-)}, V_{n+1}^{(-)}, x, \varepsilon) = \tilde{f}_v(x,\sigma) + O(\varepsilon),
$$

$$
\tilde{f}_u(x,\sigma) := \frac{\partial f}{\partial u}(\tilde{u}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}u(\sigma), \overline{v}_0^{(-)}(x) + Q_0^{(-)}v(\sigma), x, 0),
$$

$\tilde{f}_v(x,\sigma)$ имеет аналогичное выражение. Производные $\tilde{f}_u(x,\sigma)$ и $\tilde{f}_v(x,\sigma)$ представим в виде, аналогичном (113):

$$
\tilde{f}_u(x,\sigma) = \overline{f}_u^{(-)}(x) + \tilde{f}_u^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_u^{(-)}(x_*) + O(\varepsilon),
$$

$$
\tilde{f}_v(x,\sigma) = \overline{f}_v^{(-)}(x) + \tilde{f}_v^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_v^{(-)}(x_*) + O(\varepsilon),
$$

где $\overline{f}_u^{(-)}(x)$ и $\overline{f}_v^{(-)}(x)$ выражаются формулами типа (10), а $\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma)$ и $\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)$ определены в (119).

Используя написанные выражения для производных, получаем

$$
\begin{gathered}
f_u(x,\varepsilon)(\overline{\alpha} + \tilde{\gamma}) + f_v(x,\varepsilon)(\overline{\beta} + \tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma}) = \overline{f}_u^{(-)}(x)\overline{\alpha}(x) + (\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_u^{(-)}(x_\delta))[\overline{\alpha}(x_\delta) + (\overline{\alpha}(x) - \overline{\alpha}(x_\delta))] + \\
+ [(\overline{f}_u^{(-)}(x) - \overline{f}_u^{(-)}(x_\delta)) + \tilde{f}_u^{(-)}(\sigma)]\tilde{\gamma}(\sigma) + \overline{f}_v^{(-)}(x)\overline{\beta}(x) + (\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_v^{(-)}(x_\delta))[\overline{\beta}(x_\delta) + (\overline{\beta}(x) - \overline{\beta}(x_\delta))] + \\
+ [(\overline{f}_v^{(-)}(x) - \overline{f}_v^{(-)}(x_\delta)) + \tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)]\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma}(\sigma) + O((1+k)A)\varepsilon = \\
= \tilde{f}_u^{(-)}(\sigma)\overline{\alpha}(x_\delta) + \tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)\overline{\beta}(x_\delta) + O((1+k)A)\varepsilon,
\end{gathered} \tag{126}
$$

мы воспользовались здесь равенствами

$$
\overline{f}_u^{(-)}(x)\overline{\alpha}(x) + \overline{f}_v^{(-)}(x)\overline{\beta}(x) = -kA, \quad -\overline{f}_u^{(-)}(x_\delta)\overline{\alpha}(x_\delta) - \overline{f}_v^{(-)}(x_\delta)\overline{\beta}(x_\delta) = kA,
$$

$$
\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma) + \tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma) = 0 \quad (\text{см. } (118)),
$$

$$
\begin{gathered}
(\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_u^{(-)}(x_\delta))(\overline{\alpha}(x) - \overline{\alpha}(x_\delta)) + (\overline{f}_u^{(-)}(x) - \overline{f}_u^{(-)}(x_\delta))\tilde{\gamma}(\sigma) + (\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_v^{(-)}(x_\delta))(\overline{\beta}(x) - \overline{\beta}(x_\delta)) + \\
+ (\overline{f}_v^{(-)}(x) - \overline{f}_v^{(-)}(x_\delta))\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)\tilde{\gamma}(\sigma) = O((1+k)A)\varepsilon,
\end{gathered}
$$

последнее равенство имеет место в силу экспоненциальных оценок типа (64) для разностей $(\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_u^{(-)}(x_\delta))$, $(\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma) - \overline{f}_v^{(-)}(x_\delta))$ и оценки (121) для функции $\tilde{\gamma}(\sigma)$.

Введем обозначение

$$
T(\sigma, x_\delta) := \tilde{f}_u^{(-)}(\sigma)\overline{\alpha}(x_\delta) + \tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)\overline{\beta}(x_\delta).
$$

Используя равенство (126) и учитывая, что

$$
M_\varepsilon(V_{n+1}^{(-)}, U_{n+1}^{(-)}) = O(\varepsilon^{n+2}) \quad (\text{см. } (84)),
$$

запишем равенство (125) в виде

$$
M_\varepsilon(\underline{V},\underline{U}) = O(\varepsilon^{n+2}) + O((1+k)A)\varepsilon^{n+3} + T(\sigma,x_\delta)\varepsilon^{n+2} + O((1+k)^2A^2)\varepsilon^{2n+4}, \tag{127}
$$

где первое слагаемое в правой части не зависит от $A$ и $k$.

Докажем, что для достаточно большого $k$ функция $T(\sigma, x_\delta)$ удовлетворяет неравенству

$$
T(\sigma, x_\delta) \le -A, \quad \sigma \le 0. \tag{128}
$$

С этой целью, используя выражения (123) для $\bar{\alpha}(x)$ и $\bar{\beta}(x)$ и равенство $\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma) = -(\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma))^{-1}\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma)$, запишем $T(\sigma, x_\delta)$ в виде

$$\begin{gathered}T(\sigma, x_\delta) = [\tilde{f}_u^{(-)}(\sigma)(\bar{f}_v^{(-)}(x_\delta) + k\bar{F}_v^{(-)}(x_\delta)) - \tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)(\bar{f}_u^{(-)}(x_\delta) + k\bar{F}_u^{(-)}(x_\delta))]\Delta^{-1}(x_\delta)A = \\ = -[k(\bar{F}_u^{(-)}(x_\delta) + \bar{F}_v^{(-)}(x_\delta)\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma)) + (\bar{f}_u^{(-)}(x_\delta) + \bar{f}_v^{(-)}(x_\delta)\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma))]\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma)\Delta^{-1}(x_\delta)A.\end{gathered} \tag{129}$$

Заметим, что (см. (118))

$$\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(\bar{u}_0^{(-)}(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma), x_\delta) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, x_\delta)$$

при

$$u = \bar{u}_0^{(-)}(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma) = \psi_1(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma),$$

причем

$$\psi_1(x_\delta) \le u = \psi_1(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma) \le \psi_2(x_\delta) \quad \text{при} \quad \sigma \in (-\infty, 0]$$

в силу того, что $Q_0^{(-)}u(\sigma)$ – монотонная функция на полупрямой $-\infty < \sigma \le 0$. Поэтому

$$\bar{F}_u^{(-)}(x_\delta) + \bar{F}_v^{(-)}(x_\delta)\tilde{\varphi}_u^{(-)}(\sigma) = R^{(-)}(\psi_1(x_\delta) + Q_0^{(-)}u(\sigma), x_\delta) \ge c > 0$$

при $\sigma \le 0$ для достаточно малых $\varepsilon$ в силу условия A8.

Так как $\tilde{f}_v^{(-)}(\sigma) \le -\kappa < 0$ (см. (120)) и $\Delta^{-1}(x_\delta) \le -c < 0$ (см. (124)), то для достаточно большого $k$ из (129) получаем неравенство (128). В силу (128) из (127) следует неравенство

$$M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) \le O(\varepsilon^{n+2}) + O((1+k)A)\varepsilon^{n+3} - A\varepsilon^{n+2} + O((1+k)^2A^2)\varepsilon^{2n+4},$$

где первое слагаемое в правой части не зависит от $A$. Следовательно, для достаточно большого $A$ и достаточно малых $\varepsilon$ слагаемое $(-A\varepsilon^{n+2})$ в правой части обеспечит выполнение неравенства

$$M_\varepsilon(\underline{V}, \underline{U}) < 0, \quad x \in [x_\delta/2; x_\delta].$$

Аналогично доказывается, что для достаточно больших $k$, $A$ и достаточно малых $\varepsilon$ выполняется неравенство

$$M_\varepsilon(\bar{V}, \bar{U}) > 0, \quad x \in [x_\delta/2; x_\delta].$$

Выполнение условий 1° и 3° из определения 1 проверяется в точности так же, как в [1].

Таким образом, пары функций $\underline{U}$, $\underline{V}$ и $\bar{U}$, $\bar{V}$, определенные в (110) и (111), для достаточно больших чисел $A$ и $k$ и достаточно малых $\varepsilon$ являются упорядоченными нижним и верхним решениями задачи (1), (104).

Отсюда следует, что эта задача имеет для достаточно малых $\varepsilon$ решение $u = u^{(-)}(x, \varepsilon, \delta)$, $v = v^{(-)}(x, \varepsilon, \delta)$, удовлетворяющее неравенствам (106). В свою очередь, из этих неравенств, учитывая вид (110) и (111) нижнего и верхнего решений, получаем асимптотические равенства

$$\begin{gathered}u^{(-)}(x, \varepsilon, \delta) = U_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) + O((1+k)A)\varepsilon^{n+2}, \\ v^{(-)}(x, \varepsilon, \delta) = V_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) + O((1+k)A)\varepsilon^{n+2}, \quad x \in [0, x_\delta],\end{gathered} \tag{130}$$

откуда следуют равенства (105).

Теорема 1 доказана.

**Следствие 1.** Так как

$$U_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) = U_n^{(-)}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad V_{n+1}^{(-)}(x, \varepsilon) = V_n^{(-)}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}),$$

то из (105) получаем

$$\begin{gathered}u^{(-)}(x, \varepsilon, \delta) = U_n^{(-)}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \\ v^{(-)}(x, \varepsilon, \delta) = V_n^{(-)}(x, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x \in [0, x_\delta].\end{gathered} \tag{131}$$

**Следствие 2.** Имеет место равенство

$$v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta)=V_{n+1}^{(-)}(X_{n+1},\varepsilon)+O((1+k)A)\varepsilon^{n+2}. \tag{132}$$

Для доказательства справедливости этого равенства воспользуемся равенством (130) при $x=x_\delta$:

$$v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta)=V_{n+1}^{(-)}(x_\delta,\varepsilon)+O((1+k)A)\varepsilon^{n+2}. \tag{133}$$

Так как функции $\Pi_i^{(-)}u$ и $P_i^{(-)}u$ равны нулю в точке $x_\delta$ (см. (66)) и $x_\delta=X_{n+1}+O(\varepsilon^{n+2})$ (см. (103)), то

$$\begin{gathered}V_{n+1}^{(-)}(x_\delta,\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i(\overline{v}_i^{(-)}(x_\delta)+Q_i^{(-)}v(0,x_\delta))=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i(\overline{v}_i^{(-)}(X_{n+1})+Q_i^{(-)}v(0,X_{n+1}))+O(\varepsilon^{n+2})=\\=V_{n+1}^{(-)}(X_{n+1},\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+2}).\end{gathered} \tag{134}$$

Из (133) и (134) следует (132).

**Следствие 3.** Нетрудно доказать, что для производной $\dfrac{du^{(-)}}{dx}(x,\varepsilon,\delta)$ в точке $x_\delta$ имеет место равенство

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta)=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\frac{d\overline{u}_i^{(-)}}{dx}(x_\delta)+\frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ_i^{(-)}u}{d\sigma}(0,x_\delta)\right)+O(\varepsilon^{n+1}). \tag{135}$$

Это равенство понадобится в разд. 5.

## 4. ВТОРАЯ ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим теперь краевую задачу для системы (1) на отрезке $[x_\delta,1]$, где $x_\delta$ имеет вид (103), т.е.

$$\begin{gathered}x_\delta=X_{n+1}+\varepsilon^{n+1}\delta=X_{n+1}+O(\varepsilon^{n+2}),\\X_{n+1}=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\overline{x}_i,\end{gathered} \tag{136}$$

с краевыми условиями

$$u(x_\delta,\varepsilon)=\psi_2(x_\delta),\quad v(x_\delta,\varepsilon)=v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta),\quad u(1,\varepsilon)=u^1, \tag{137}$$

$v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta)$ выражается формулой (132).

Построим частичные суммы $U_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon)$ и $V_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon)$ рядов (14) и (15), в которых $x_*=x_\delta$. Отметим, что хотя в этом построении, описанном в п. 2.3, совсем не используется второе краевое условие из (137), тем не менее частичная сумма $V_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon)$ в точке $x_\delta$ отличается от $v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta)$ на величину порядка $O((1+k)A)\varepsilon^{n+2}$, т.е.

$$v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta)=V_{n+1}^{(+)}(x_\delta,\varepsilon)+O((1+k)A)\varepsilon^{n+2}. \tag{138}$$

Чтобы убедиться в этом, напишем для $V_{n+1}^{(+)}(x_\delta,\varepsilon)$ равенство, аналогичное равенству (134) для $V_{n+1}^{(-)}(x_\delta,\varepsilon)$:

$$V_{n+1}^{(+)}(x_\delta,\varepsilon)=V_{n+1}^{(+)}(X_n,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+2}). \tag{139}$$

Величины $V_{n+1}^{(\mp)}(X_{n+1},\varepsilon)$ представим в виде (см. (95) и (96))

$$V_{n+1}^{(\mp)}(X_{n+1},\varepsilon)=\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i v_i^{(\mp)}(0)+O(\varepsilon^{n+2}),$$

а так как для $X_{n+1}$ вида (136) справедливы равенства

$$v_i^{(-)}(0)=v_i^{(+)}(0)\quad\text{при}\quad i=0,1,\ldots,n+1,$$

то

$$V_{n+1}^{(-)}(X_{n+1},\varepsilon) = V_{n+1}^{(+)}(X_{n+1},\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+2}). \tag{140}$$

Из (134), (140) и (139) получаем равенство

$$V_{n+1}^{(-)}(x_\delta,\varepsilon) = V_{n+1}^{(+)}(x_\delta,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+2}),$$

в силу которого из (133) следует искомое равенство (138).

Второе краевое условие в (137) можно теперь записать в виде

$$v(x_\delta,\varepsilon) = V_{n+1}^{(+)}(x_\delta,\varepsilon) + O((1+k)A\varepsilon^{n+2}). \tag{141}$$

**Теорема 2.** *Если выполнены условия* A1–A8, *то для достаточно малых* $\varepsilon$ *задача* (1), (137) *имеет решение* $u = u^{(+)}(x,\varepsilon,\delta)$, $v = v^{(+)}(x,\varepsilon,\delta)$, *для которого справедливы асимптотические равенства*

$$\begin{aligned} u^{(+)}(x,\varepsilon,\delta) &= U_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+2}),\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,\delta) &= V_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+2}), \quad x\in[x_\delta,1]. \end{aligned} \tag{142}$$

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теоремы 1 с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств. Нижнее решение задачи (1), (137) строится в виде

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = U_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon) - (\alpha(x,\xi) + \gamma(\xi) + \tilde\gamma(\sigma))\varepsilon^{n+2},$$

$$\underline{V}(x,\varepsilon) = V_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon) - (\beta(x,\xi) + \varphi_u^{(+)}(\xi)\gamma(\xi) + \tilde\varphi_u^{(+)}(\sigma)\tilde\gamma(\sigma))\varepsilon^{n+2},$$

где $\varphi_u^{(+)}(\xi) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0^{(+)}(1) + \Pi_0^{(+)}u(\xi),1)$, $\tilde\varphi_u^{(+)}(\sigma) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(\bar u_0^{(+)}(x_\delta) + Q_0^{(+)}u(\sigma),x_\delta)$, а функции $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\tilde\gamma$ определяются так же, как аналогичные функции в (110) с заменой в системе (112) числа $A$ на число $B$, которое выбирается столь большим, чтобы было выполнено неравенство

$$\underline{V}(x_\delta,\varepsilon) = V_{n+1}^{(+)}(x_\delta,\varepsilon) - \bar\beta(x_\delta)\varepsilon^{n+2} \le v(x_\delta,\varepsilon);$$

здесь $\bar\beta(x_\delta)$ выражается формулой (123) с заменой $A$ на $B$, а $v(x_\delta,\varepsilon)$ – формулой (141).

Верхнее решение имеет вид, аналогичный нижнему решению, нужно только знак минус перед суммами в круглых скобках заменить на знак плюс.

В процессе доказательства используются формулы (83)–(85) для $k = n+1$.

**Следствие 1.** Так как $U_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon) = U_n^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$, $V_{n+1}^{(+)}(x,\varepsilon) = V_n^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1})$, то из (142) получаем

$$\begin{aligned} u^{(+)}(x,\varepsilon,\delta) &= U_n^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}),\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,\delta) &= V_n^{(+)}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}), \quad x\in[x_\delta,1]. \end{aligned} \tag{143}$$

**Следствие 2.** Для производной $\dfrac{du^{(+)}}{dx}(x,\varepsilon,\delta)$ в точке $x_\delta$ имеет место асимптотическое равенство

$$\frac{du^{(+)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta) = \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\frac{d\bar u_i^{(+)}}{dx}(x_\delta) + \frac{1}{\varepsilon}\frac{dQ_i^{(+)}u}{d\sigma}(0,x_\delta)\right) + O(\varepsilon^{n+1}). \tag{144}$$

Это равенство понадобится в следующем разделе.

## 5. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ И АСИМПТОТИКЕ КСТС

Решения $u^{(-)}(x,\varepsilon,\delta)$, $v^{(-)}(x,\varepsilon,\delta)$ и $u^{(+)}(x,\varepsilon,\delta)$, $v^{(+)}(x,\varepsilon,\delta)$ непрерывно сшиваются в точке $x_\delta$, так как (см. (104) и (137))

$$u^{(+)}(x_\delta,\varepsilon,\delta) = u^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta) = \psi_2(x_\delta), \quad v^{(+)}(x_\delta,\varepsilon,\delta) = v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta). \tag{145}$$

Поэтому функции

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon,\delta), & x\in[0,x_\delta],\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,\delta), & x\in[x_\delta,1],\end{cases}\qquad v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon,\delta), & x\in[0,x_\delta],\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,\delta), & x\in[x_\delta,1],\end{cases}$$

будут решением исходной задачи (1), (2), представляющим собой контрастную структуру типа ступеньки, если в точке $x_\delta$ непрерывно сшиваются производные $\dfrac{du^{(+)}}{dx}$ и $\dfrac{du^{(-)}}{dx}$, т.е. если имеет место равенство

$$\frac{du^{(-)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta)-\frac{du^{(+)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta)=0. \tag{146}$$

Заметим, что аналогичное равенство для $\dfrac{dv^{(-)}}{dx}$ и $\dfrac{dv^{(+)}}{dx}$ заведомо выполняется, так как в силу второго уравнения (1) и равенств (145) справедливы равенства

$$\begin{aligned}\frac{dv^{(-)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta)&=\varepsilon^{-2}f(u^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta),v^{(-)}(x_\delta,\varepsilon,\delta),x_\delta,\varepsilon)=\\&=\varepsilon^{-2}f(u^{(+)}(x_\delta,\varepsilon,\delta),v^{(+)}(x_\delta,\varepsilon,\delta),x_\delta,\varepsilon)=\frac{dv^{(+)}}{dx}(x_\delta,\varepsilon,\delta).\end{aligned}$$

Докажем, что существует $\delta=O(\varepsilon)$, для которого выполнено (146). Используя асимптотические формулы (135) и (144) для производных в левой части равенства (146) и умножив его на $\varepsilon$, получим уравнение относительно $\delta$, которое запишем в виде

$$\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\frac{dQ_i^{(-)}u}{d\sigma}(0,x_\delta)-\frac{dQ_i^{(+)}u}{d\sigma}(0,x_\delta)\right)+\varepsilon\sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\frac{d\bar{u}_i^{(-)}}{dx}(x_\delta)-\frac{d\bar{u}_i^{(+)}}{dx}(x_\delta)\right)=O(\varepsilon^{n+2}).$$

Раскладывая левую часть уравнения по степеням $\varepsilon$ и учитывая выражение (103) для $x_\delta$, получаем:

$$J(\bar{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i(J'(\bar{x}_0)\bar{x}_j+k_j)+\varepsilon^{n+1}(J'(\bar{x}_0)(\bar{x}_{n+1}+\delta)+k_{n+1})=O(\varepsilon^{n+2}),$$

где правая часть зависит от $\delta$, но имеет указанный порядок малости равномерно относительно $\delta$ в фиксированной окрестности точки $\delta=0$.

Так как $\bar{x}_0$ и $\bar{x}_i$ $(i=1,2,\ldots)$ являются решениями уравнений (7) и (90), то уравнение относительно $\delta$ принимает вид

$$J'(\bar{x}_0)\delta=O(\varepsilon).$$

Оно имеет решение $\delta=\bar{\delta}(\varepsilon)=O(\varepsilon)$, так как $J'(\bar{x}_0)\neq 0$.

Следовательно, функции

$$u(x,\varepsilon)=\begin{cases}u^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x\in[0,x_{\bar{\delta}}],\\ u^{(+)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x\in[x_{\bar{\delta}},1],\end{cases}\qquad v(x,\varepsilon)=\begin{cases}v^{(-)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x\in[0,x_{\bar{\delta}}],\\ v^{(+)}(x,\varepsilon,\bar{\delta}), & x\in[x_{\bar{\delta}},1],\end{cases}$$

являются решением задачи (1), (2) с внутренним переходным слоем в окрестности точки $x_{\bar{\delta}}$. При этом в силу (131) и (143) справедливы равенства

$$\begin{aligned}u(x,\varepsilon)&=U_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1}),\\ v(x,\varepsilon)&=V_n(x,\varepsilon)+O(\varepsilon^{n+1}),\quad x\in[0;1],\end{aligned} \tag{147}$$

где

$$U_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}U_n^{(-)}(x,\varepsilon), & x\in[0,x_{\bar{\delta}}],\\ U_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x\in[x_{\bar{\delta}},1],\end{cases}\qquad V_n(x,\varepsilon)=\begin{cases}V_n^{(-)}(x,\varepsilon), & x\in[0,x_{\bar{\delta}}],\\ V_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x\in[x_{\bar{\delta}},1],\end{cases} \tag{148}$$

причем в формулах для $U_n^{(\pm)}$, $V_n^{(\pm)}$ внутрислойная переменная $\sigma=\sigma_{\bar{\delta}}:=(x-x_{\bar{\delta}})/\varepsilon$.

Формулы (147) и (148) имеют тот недостаток, что величина $\bar{\delta}$ точно не известна, известен только ее порядок ($\bar{\delta} = O(\varepsilon)$), и, следовательно, $x_{\bar{\delta}}$ и $\sigma_{\bar{\delta}}$ тоже не определены точно. Заменим $x_{\bar{\delta}}$ в формулах (148) на $X_{n+1} := \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \bar{x}_i$, т.е. в выражении для $x_{\bar{\delta}}$ отбросим последнее слагаемое $\varepsilon^{n+1}\bar{\delta} = O(\varepsilon^{n+2})$. Тогда аргумент $Q_i^{(\pm)}$-функций, т.е. $\sigma_{\bar{\delta}} = (x - x_{\bar{\delta}})/\varepsilon$, изменится на величину порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, и, значит, эти функции изменятся на величину того же порядка. Поэтому при замене $x_{\bar{\delta}}$ на $X_{n+1}$ в формулах (148) формулы (147) не изменятся.

Таким образом, мы доказали следующую основную теорему.

**Теорема 3.** *Если выполнены условия* A1–A8, *то для достаточно малых* $\varepsilon$ *задача* (1), (2) *имеет решение* $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$, *для которого справедливы асимптотические равенства* (147), *где*

$$U_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} U_n^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0, X_{n+1}], \\ U_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [X_{n+1}, 1], \end{cases} \quad V_n(x,\varepsilon) = \begin{cases} V_n^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0, X_{n+1}], \\ V_n^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [X_{n+1}, 1], \end{cases}$$

$X_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i \bar{x}_i$, *а функции* $U_n^{(-)}$, $V_n^{(-)}$ *и* $U_n^{(+)}$, $V_n^{(+)}$ *определены формулами* (67), (68) *и* (82) *при* $k = n$, *причем внутрислойная переменная* $\sigma$ *имеет вид*

$$\sigma = \sigma_{n+1} := (x - X_{n+1})/\varepsilon.$$

## 6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

*6.1.* Из (147) следуют предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = \begin{cases} \psi_1(x), & x \in (0, \bar{x}_0), \\ \psi_3(x), & x \in (\bar{x}_0, 1), \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v(x,\varepsilon) = \begin{cases} \varphi(\psi_1(x), x), & x \in (0, \bar{x}_0), \\ \varphi(\psi_3(x), x), & x \in (0, \bar{x}_0). \end{cases}$$

Можно сказать, что в пределе при $\varepsilon \to 0$ в точке $\bar{x}_0$ происходит скачок решения.

*6.2.* Предельным положением при $\varepsilon \to 0$ кривой

$$L_\varepsilon = \{(u, v, x) : u = u(x,\varepsilon),\ v = v(x,\varepsilon),\ x \in [0;1]\}$$

(ее можно назвать графиком решения задачи (1), (2)) является кривая $L = L^{(-)} \cup L^{(+)}$ (см. (9)).

*6.3.* Представляет интерес рассмотрение задачи (1), (2) в случае, когда корень $v = \varphi(u,x)$ уравнения $f(u,v,x,0) = 0$ является кратным. Некоторые задачи о контрастных структурах в случаях кратного корня вырожденного уравнения рассмотрены в [6]–[8]. В этих случаях асимптотика решения в переходном слое имеет свои характерные особенности.

*6.4.* Построенное в задаче (1), (2) решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ типа контрастной структуры является стационарным решением нестационарной частично диссипативной системы уравнений, которая получается из системы (1) добавлением в левую часть первого уравнения слагаемого $\left(-\varepsilon^2 w(x)\frac{\partial u}{\partial t}\right)$ и в левую часть второго уравнения слагаемого $\varepsilon^2 \frac{dv}{dt}$. Встают вопросы об устойчивости при $t \to \infty$ построенного стационарного решения нестационарной системы уравнений и о его области притяжения, т.е. о множестве начальных функций, для которых решение начально-краевой задачи для нестационарной системы стремится при $t \to \infty$ к стационарному решению. Такая задача для стационарного погранслойного решения нестационарной частично диссипативной системы рассмотрена в [1].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика и устойчивость стационарного погранслойного решения частично диссипативной системы уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. V. 59. № 7. С. 1201–1229.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных задачах // Фундаментальная и приклад. матем. 1998. V. 4. № 3. С. 799–851.

3. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений с разными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. V. 40 № 6. С. 877–899.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Тр. МИАН. 2010. V. 268. № 2. С. 268–283.
5. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. V. 52. № 11. С. 1983–2003.
6. *Бутузов В.Ф.* Сингулярно возмущенная краевая задача с многозонным внутренним переходным слоем // Моделирование и анализ информ. систем. 2015. V. 22. № 1. С. 5–22.
7. *Бутузов В.Ф.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной параболической задачи с многозонным внутренним переходным слоем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. 2018. V. 58. № 6. С. 961–987.
8. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика контрастной структуры типа всплеска в задаче с кратным корнем вырожденного уравнения // Дифференц. ур-ния. 2019. V. 55. № 6. С. 774–791.
9. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
10. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. ур-ния. 1995. V. 31. № 7. С. 1132–1139.