ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 1, с. 150–161

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ДВИЖУЩЕГОСЯ ПОЛОТНА

© 2021 г. И. Е. Михайлов[1,*], И. А. Суворов[2,**]

[1] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44/2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ НИУ, Россия

*e-mail: mikh_igor@mail.ru

**e-mail: ivan.a.suv@gmail.com

Поступила в редакцию 06.12.2019 г.
Переработанный вариант 13.06.2020 г.
Принята к публикации 18.09.2020 г.

Моделируются механические процессы, происходящие при производстве бумаги. В бумагоделательной машине бумага перемещается в виде тонкого листа. Характерная толщина листа варьируется от 0.1 мм (офисная бумага) до 1 мм (картон). Все бумагоделательные машины содержат открытые участки полотна, где бумажное полотно проходит без механической поддержки во время движения от одного опорного ролика к другому. В это время оно может потерять стабильность, начать совершать поперечные колебания и в итоге порваться. Рассматривается возможность уменьшить эти колебания с помощью различных управляющих актьюаторов. Поперечные колебания движущегося полотна с ненулевой изгибной жесткостью моделируются с помощью неоднородного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка. Воздействие управляющих актьюаторов моделируется функцией в правой части уравнения. Предполагается, что амплитуда колебаний одинакова в поперечном сечении движущегося полотна. Задача гашения колебаний сводится к минимизации некоторой функции многих переменных. Решение задачи разбивается на два этапа: решение начально-краевой задачи с заданным управлением и минимизация некоторой функции многих переменных. Для решения начально-краевой задачи предлагается численный метод. Дифференциальное уравнение четвертого порядка сводится к системе двух дифференциальных уравнений второго порядка. Далее делается замена искомых функций, позволяющая упростить эти уравнения. Получившиеся уравнения аппроксимируются конечно-разностной схемой, для которой показана ее абсолютная устойчивость. Эта разностная схема решается с помощью матричной прогонки. Для минимизации функции многих переменных используется метод Хука–Дживса. Приводятся примеры расчетов для трех типов актьюаторов: точечного, действующего на участке полотна и действующего на всем протяжении полотна. Библ. 5. Фиг. 12.

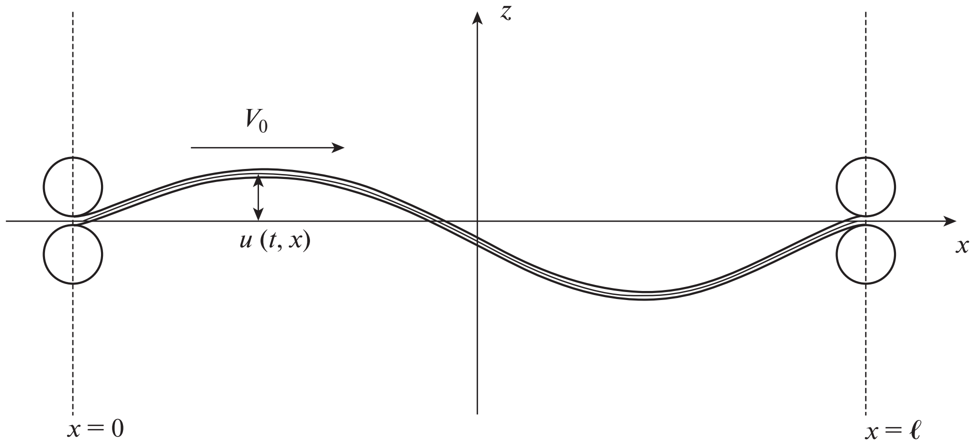
Ключевые слова: движущееся полотно, гашение колебаний, актьюаторы, метод оптимизации Хука–Дживса.

DOI: 10.31857/S004446692012011X

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью данной работы является разработка численных методов решения задачи гашения вынужденных поперечных колебаний $u(t, x)$ движущегося с постоянной скоростью V_0 полотна толщиной H с помощью различных видов актьюаторов (фиг. 1). Предполагается, что амплитуда этих колебаний одинакова в направлении ширины полотна. Поперечные колебания движущегося полотна с заданной изгибной жесткостью под действием внешнего управления $g(t, x)$ описываются уравнением (см. [1], [2])

$$u_{tt} + 2V_0u_{tx} + (V_0^2 - c^2)u_{xx} + Du_{xxxx} = g(t,x), \quad (t,x) \in \Pi = \{0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\}, \tag{1}$$



Фиг. 1. Движущееся между роликами бумажное полотно.

где c – скорость распространения возмущений вдоль полотна. Время t и линейный размер x отнесены к характерным величинам t^* и x^*.Член Du_{xxxx} представляет собой силу реакции, возникающую из-за сопротивления изгибу. Константа D называется изгибной жесткостью и равна

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)},$$

где E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона.

Начальные отклонение и скорость поперечного перемещения полотна

$$\begin{aligned} u(0,x) &= \varphi(x), \\ u_t(0,x) &= \psi(x) \end{aligned} \tag{2}$$

мы будем рассматривать как заданные начальные возмущения.

В качестве граничных условий при $x = 0$ и $x = \mathrm{l}$ возьмем условия шарнирного закрепления

$$\begin{aligned} u(t,0) &= u(t,l) = 0, \\ u_{xx}(t,0) &= u_{xx}(t,l) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ставится следующая задача гашения: найти функцию $g(t, x)$ и время T такие, чтобы

$$\begin{aligned} u(T,x) &= 0, \\ u_t(T,x) &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что эти условия эквивалентны условию

$$J(T) = \int_0^l (u^2(T,x) + u_t^2(T,x))dx = 0. \tag{4}$$

2. ГАШЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ И МОДЕЛИ АКТЬЮАТОРОВ

Для гашения колебаний мы будем использовать модели актьюаторов различных видов, при этом функция $g(t, x)$ будет определяться видом актьюатора.

1. Модель точечного актьюатора:

$$g(t,x) = s(t)\delta(x - x_0), \tag{5}$$

где x_0 – точка приложения актьюатора, $s(t)$ – управляющая функция, δ – дельта-функция Дирака, определенная в [3].

2. Модель актьюатора конечной ширины $[x_0, x_1] \subset [0, l]$:

$$g(t,x) = s(t)\begin{cases}1, & x \in [x_0, x_1],\\ 0, & x \notin [x_0, x_1].\end{cases} \tag{6}$$

3. Модель актьюатора, действующего одинаково по всей длине полотна:

$$g(t,x) = s(t). \tag{7}$$

Во всех трех моделях на управляющую функцию $s(t)$ могут быть наложены ограничения $s_{\min} \le s(t) \le s_{\max}$, где $s_{\min}$, $s_{\max}$ – заданные константы.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1)–(3)

Введем новую вспомогательную функцию $v(t,x)$ такую, чтобы уравнение (1) можно было представить в виде двух уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} u_t &= v_{xx} - 2V_0 u_x,\\ v_t &= -Du_{xx} - (V_0^2 - c^2)u + f(t,x). \end{aligned} \tag{8}$$

Найдем вид функции $f(t, x)$, при которой система (8) была бы эквивалентна (1) при достаточной гладкости функций $u(t,x)$ и $v(t,x)$. Продифференцируем первое уравнение по t, а второе дважды по x:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= v_{txx} - 2V_0 u_{tx},\\ v_{txx} &= -Du_{xxxx} - (V_0^2 - c^2)u_{xx} + f_{xx}(t,x), \end{aligned} \tag{9}$$

откуда

$$u_{tt} + 2V_0 u_{tx} + (V_0^2 - c^2)u_{xx} + Du_{xxxx} = f_{xx}(t,x).$$

Сравнивая это равенство с (1), получаем

$$f_{xx}(t,x) = g(t,x).$$

Дважды проинтегрировав левую и правую части равенства по x, найдем выражение для $f(t, x)$:

$$f(t,x) = \int_0^x \left[\int_0^\eta g(t,\xi)d\xi\right] d\eta + k_1(t)x + k_2(t),$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ – произвольные функции.

Получим начальные условия для системы (8). Подставив второе начальное условие $u_t(0,x) = \psi(x)$ из (2) в первое уравнение (8), получим

$$u_t(0,x) = (v_{xx} - 2V_0 u_x)\big|_{(0,x)} = \psi(x).$$

Откуда выражение для v_{xx} примет вид

$$v_{xx}(0,x) = 2V_0 u_x(0,x) + \psi(x).$$

Дважды проинтегрируем это выражение по x и получим выражение для $v(0,x)$:

$$v(0,x) = \Phi(x) + c_1 x + c_2.$$

Здесь c_1, c_2 – произвольные константы интегрирования, а функция $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = 2V_0\int_0^x \varphi(x)dx + \int_0^x \left[\int_0^\eta \psi(\xi)d\xi\right] d\eta.$$

В итоге начальные условия для системы (8) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u(0,x) &= \varphi(x),\\ v(0,x) &= \Phi(x) + c_1 x + c_2. \end{aligned}$$

Найдем новые граничные условия для системы (8).

Граничные условия для $u(t, x)$ будут такими

$$u(t,0) = u(t,l) = 0.$$

Найдем $v(t,0)$. Приняв во внимание, что $u(t,0) = 0$ и $u_{xx}(t,0) = 0$ из (3), и подставив эти значения во второе уравнение системы (8), получим

$$u_{xx}(t,0) = \frac{1}{D}[-v_t - (V_0^2 - c^2)u + f]\Big|_{(t,0)} = \frac{1}{D}[f - v_t]\Big|_{(t,0)} = 0.$$

Откуда

$$v_t(t,0) = f(t,0) = k_2(t),$$

$$v(t,0) = \int\limits_0^t k_2(t)dt + c_3,$$

где c_3 – произвольная константа интегрирования. Сравнивая начальное условие и левое граничное условие для функции v в точке (0, 0), получаем $c_2 = c_3$.

Найдем теперь $v(t,l)$. Подставим во второе уравнение системы (8) значения $u(t,l)$ и $u_{xx}(t,l)$ из (3), имеем:

$$u_{xx}(t,l) = \frac{1}{D}[-v_t - (V_0^2 - c^2)u + f]_{\{t,l\}} = \frac{1}{D}[f - v_t]_{(t,l)} = 0,$$

$$v_t(t,l) = f(t,l) = \int\limits_0^l \left[\int\limits_0^x g(t,\xi)d\xi\right]dx + k_1(t)l + k_2(t),$$

$$v(t,l) = \int\limits_0^t \left[\int\limits_0^l \left[\int\limits_0^x g(t,\xi)d\xi\right]dx\right]dt + l\int\limits_0^t k_1(t)dt + \int\limits_0^t k_2(t)dt + c_4,$$

где c_4 – произвольная константа интегрирования. Сравнивая начальное условие и правое граничное условие для функции v в точке $(0,l)$, получаем $c_4 = \Phi(l) + c_1 l$.

Подберем теперь произвольные функции $k_1(t)$, $k_2(t)$ и константы c_1, c_2 так, чтобы для любого $t \in [0,T]$ граничные условия для функции $v(t,x)$ имели бы наиболее простой вид, а именно, равнялись нулю:

$$v(t,0) = v(t,l) \equiv 0.$$

Положим $k_2(t) \equiv 0$, $c_2 = c_3 = 0$, тогда $v(t,0) \equiv 0$ для всех $t \geq 0$.

Положим теперь

$$k_1(t) = -\frac{1}{l}\int_0^l \left[\int_0^x g(t,\xi)d\xi\right]dx, \quad c_1 = -\frac{1}{l}\Phi(l),$$

тогда $v(t,l) \equiv 0$ для всех $t \geq 0$.

Тогда выражение для $f(t,x)$ примет вид

$$f(t,x) = \int\limits_0^x \left[\int\limits_0^\eta g(t,\xi)d\xi\right]d\eta - \frac{x}{l}\int\limits_0^l \left[\int\limits_0^\eta g(t,\xi)d\xi\right]d\eta.$$

Начальные условия для системы (8) перепишутся в виде

$$\begin{gathered} u(0,\ x) = \varphi(x), \\ v(0,\ x) = \Phi(x) - \frac{x}{l}\Phi(l). \end{gathered} \tag{10}$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$u(t,0) = 0, \quad u(t,l) = 0, \quad v(t,0) = 0, \quad v(t,l) = 0. \tag{11}$$

Запишем систему (8) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -D & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{xx} + \begin{pmatrix} -2V_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^2 - V_0^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

или

$$W_t = AW_{xx} + BW_x + C + F, \tag{12}$$

где

$$W = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2V_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^2 - V_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену исходной функции $W = \mathscr{A}\hat{W}$, где $\mathscr{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha(t,x) & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(t,x) = V_0 x + (c^2 - V_0^2)t$, а $\hat{W} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix}$ – новая искомая вектор-функция.

В итоге, уравнение (12) для новой вектор-функции $\hat{W}$ примет вид:

$$\hat{W}_t = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -D - \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix} \hat{W}_{xx} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Теперь для новой вектор-функции $\hat{W}$ запишем начальные условия

$$\begin{gathered} \hat{u}(0,x) = \varphi(x), \\ \hat{v}(0,x) = \Phi(x) - \frac{x}{l}\Phi(l) - V_0 x \varphi(x). \end{gathered} \tag{14}$$

Граничные условия примут вид

$$\hat{u}(t,0) = 0, \quad \hat{u}(t,l) = 0, \quad \hat{v}(t,0) = 0, \quad \hat{v}(t,l) = 0. \tag{15}$$

Построим разностную схему для численного решения (13). Зададим натуральные числа M, N и разобьем рассматриваемую область $\{0 \le t \le T,\ 0 \le x \le l\}$ на прямоугольные ячейки параллельными прямыми $x_m = mh$, $m = 0,1,\ldots,M$, $t_n = n\tau$, $n = 0,1,\ldots,N$, где $h = \dfrac{l}{M}$, $\tau = \dfrac{T}{N}$.

Рассмотрим шаблон, на котором уравнение (13) аппроксимируем конечно-разностной схемой

$$\frac{\hat{W}_m^{n+1} - \hat{W}_m^n}{\tau} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -D - \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix} \frac{\hat{W}_{m+1}^{n+1} - 2\hat{W}_m^{n+1} + \hat{W}_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Покажем, что эта разностная схема абсолютно устойчива по Нейману. Будем искать решение однородного уравнения в виде

$$\hat{W}_m^n = \lambda^n e^{ipm} W_0,$$

где $W_0 \ne 0$, p – действительное число, i – мнимая единица.

Тогда имеем

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} W_0 = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -D - \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix} \frac{e^{ip} - 2 + e^{-ip}}{h^2} \lambda W_0,$$

или

$$\left((\lambda - 1)E - S \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -D - \alpha^2 & -\alpha \end{pmatrix} \left(-4\lambda \left(\sin \frac{p}{2} \right)^2 \right) \right) W_0 = 0,$$

где $S = \dfrac{\tau}{h^2}$.

Таблица 1

T	Аналитическое решение	Численные решения			
		$M = 10$	$M = 20$	$M = 40$	$M = 80$
1	0.67277	0.6754	0.6717	0.6728	0.6731
2	–0.094749	–0.09466	–0.09384	–0.09499	–0.09483
5	–0.52113	–0.5219	–0.5240	–0.5218	–0.5217
10	–0.45686	–0.4594	–0.4539	–0.4561	–0.4567

Эта система имеет нетривиальное решение, если

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 + 4\alpha S\lambda\left(\sin\frac{p}{2}\right)^2 & 4S\lambda\left(\sin\frac{p}{2}\right)^2 \\ -4S\lambda(-D-\alpha^2)\left(\sin\frac{p}{2}\right)^2 & \lambda - 1 - 4\alpha S\lambda\left(\sin\frac{p}{2}\right)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)^2 - 16\alpha^2S^2\lambda^2\left(\sin\frac{p}{2}\right)^4 + 16S^2\lambda^2(D+\alpha^2)\left(\sin\frac{p}{2}\right)^4 = 0,$$

$$(\lambda-1)^2 + 16S^2\lambda^2D\left(\sin\frac{p}{2}\right)^4 = 0.$$

Пусть

$$\beta^2 = 16S^2D\left(\sin\frac{p}{2}\right)^4, \quad (\lambda-1)^2 + \beta^2\lambda^2 = 0, \quad \lambda = \pm\beta\lambda i + 1, \quad \lambda(1\mp\beta i) = 1,$$

$$\lambda = \frac{1}{1\mp\beta i} = \frac{1\pm\beta i}{1+\beta^2} = \frac{1}{1+\beta^2} \pm \frac{\beta}{1+\beta^2}i, \quad |\lambda| = \sqrt{\frac{1}{(1+\beta^2)^2} + \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1+\beta^2}} \le 1,$$

т.е. схема абсолютно устойчива при любых β. Будем ее решать с помощью матричной прогонки.

Сравним аналитическое решение задачи (1)–(3) с численным решением задачи (18)–(20). При

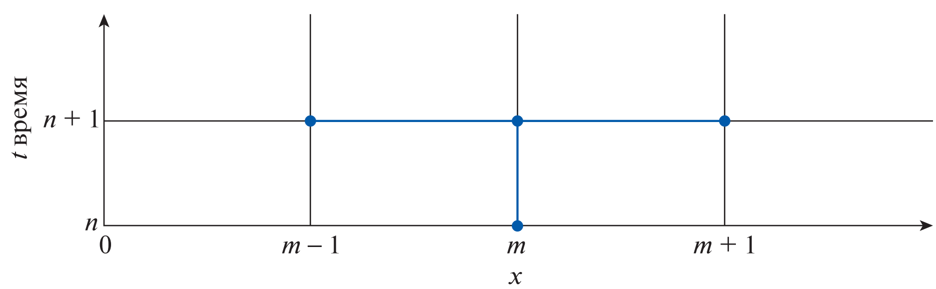
$$g(t,x) = -2V_0\frac{\pi}{l}\omega\sin(\omega t)\cos\frac{\pi x}{l},$$

где

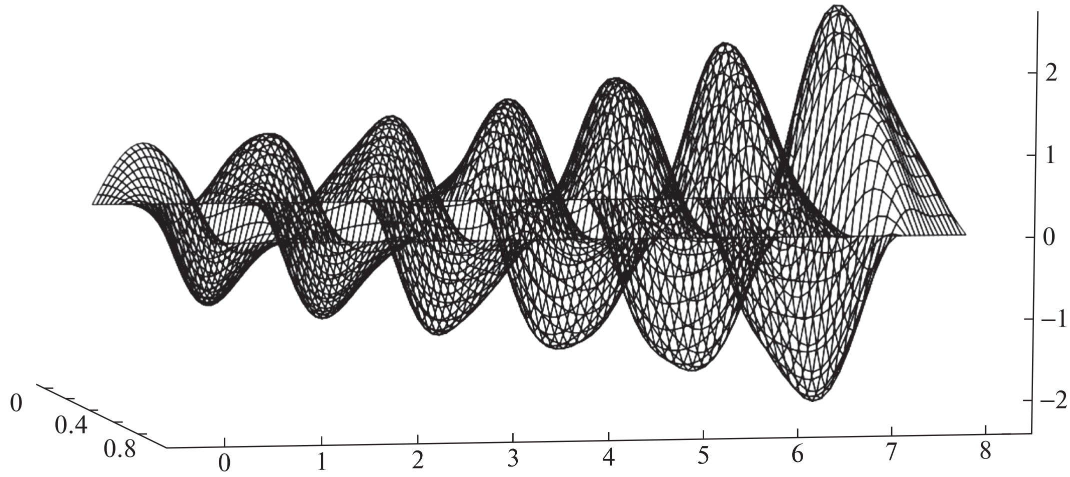
$$\omega = \frac{\pi}{l}\sqrt{(c^2 - V_0^2) + D\frac{\pi^2}{l^2}}, \quad \varphi(x) = \sin\frac{\pi x}{l}, \quad \psi(x) = 0$$

и условиях (3) аналитическим решением задачи (1)–(3) является функция $u(t,x) = \cos(\omega t)\sin\frac{\pi x}{l}$.

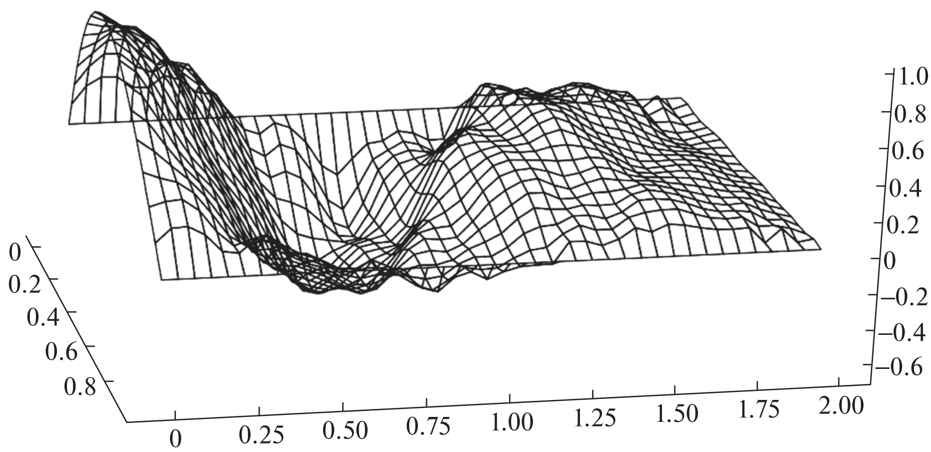
В табл. 1 при $V_0 = 1$, $c = 2$, $D = 0.005$, $l = 1$ приведены аналитическое решение и расчетные решения задачи (18)–(20) в точке $x = 0.5$ при различных T и шагах сетки $M \times N$. При этом число узловых точек по времени $N = 2MT$.



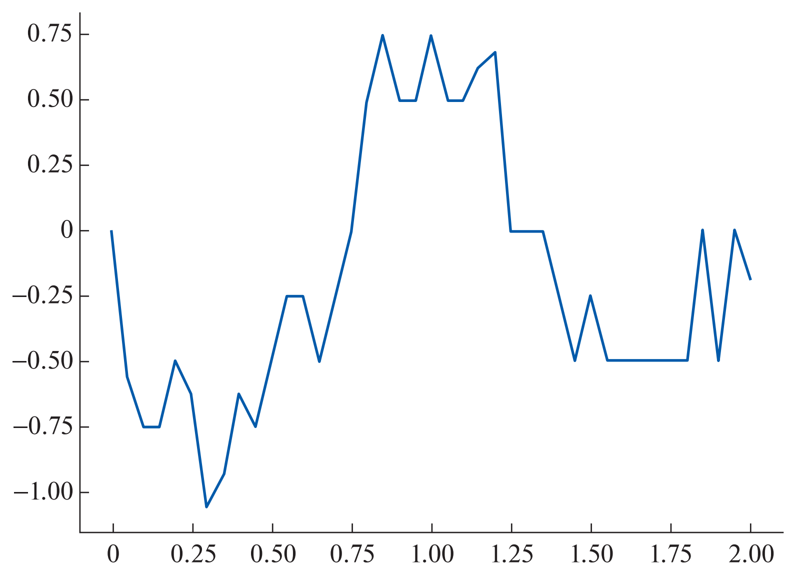
Фиг. 2.



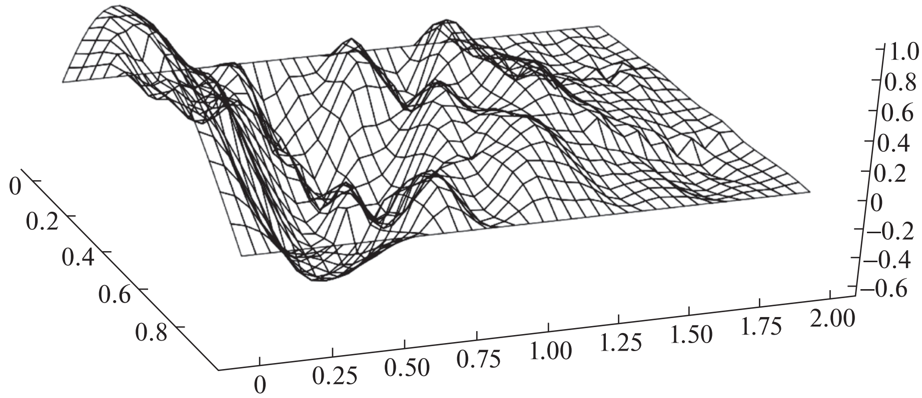
Фиг. 3.



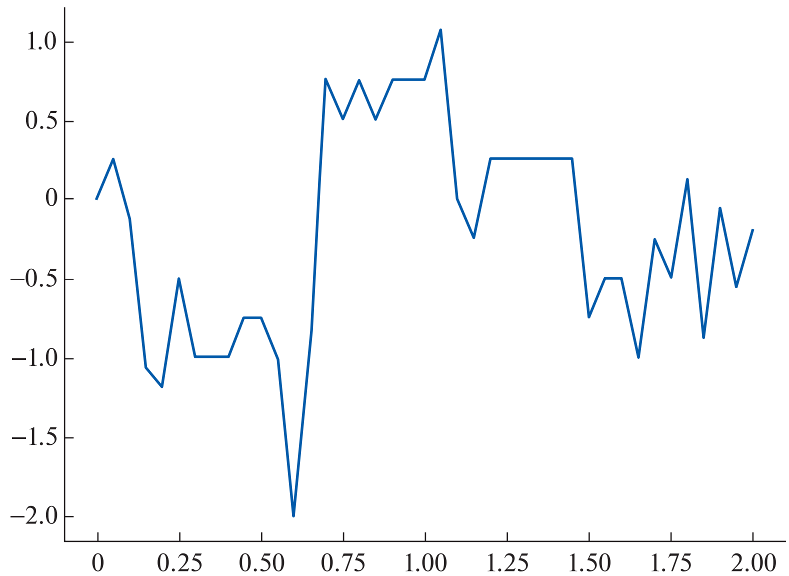
Фиг. 4.



Фиг. 5.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Таким образом, мы видим сходимость предложенного метода с уменьшением шагов сетки и хорошее совпадение с аналитическим решением.

4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ

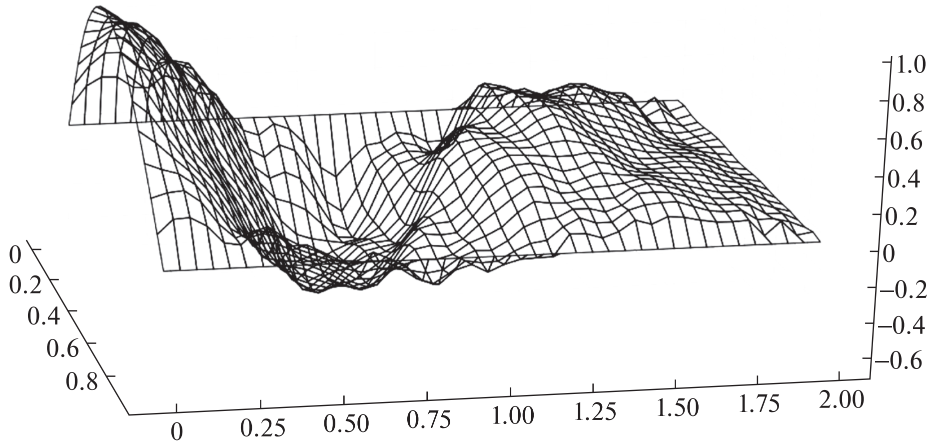
Отметим, что из условия (4) следует условие

$$J(T) = \int_0^l (\hat{u}^2(T,x) + \hat{u}_t^2(T,x))dx = 0. \tag{17}$$

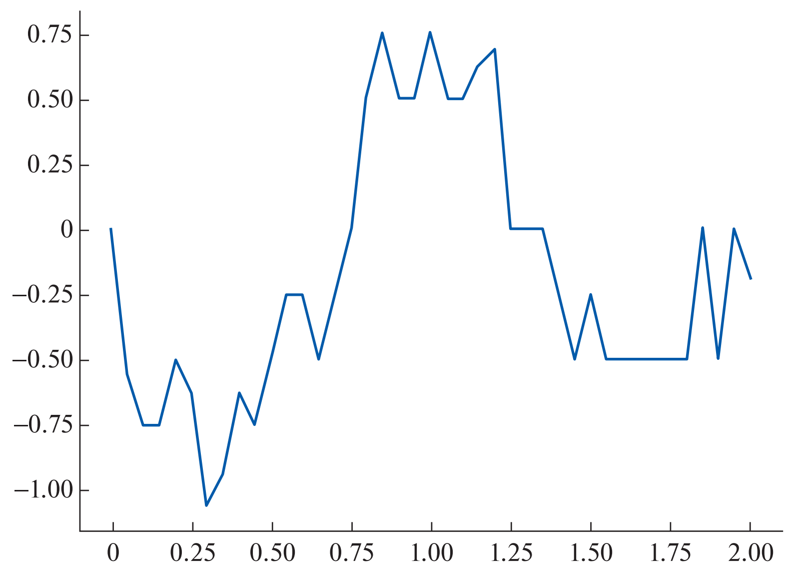
Для рассматриваемых моделей актьюаторов (5)–(7) функция $f(t,x)$ записывается в следующих видах.

1. Модель точечного актьюатора (5):

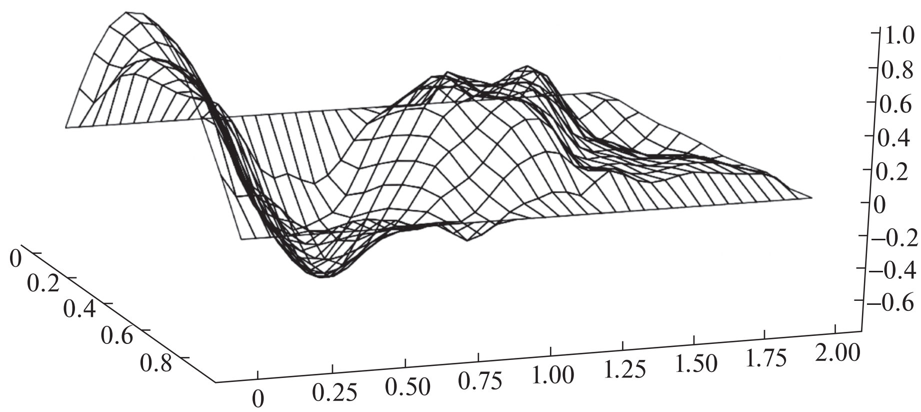
$$f(t,x) = s(t)\begin{cases} -\dfrac{x}{l}(l - x_0), & x < x_0, \\ (x - x_0) - \dfrac{x}{l}(l - x_0), & x \geq x_0. \end{cases}$$



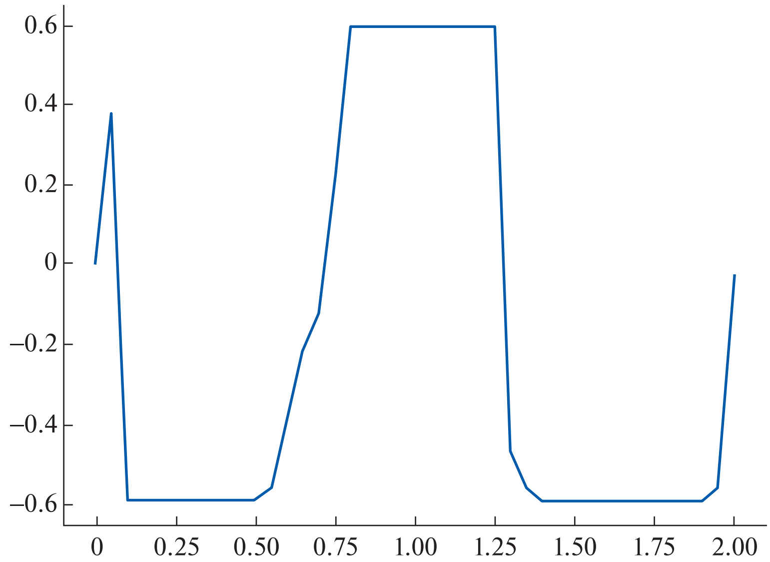
Фиг. 8.



Фиг. 9.



Фиг. 10.



Фиг. 11.

2. Модель актьюатора конечной ширины $[x_0, x_1]$ (6):

$$f(t,x) = s(t)\begin{cases} -\dfrac{x}{l}(x_1 - x_0)\left(l - \dfrac{x_0 + x_1}{2}\right), & x < x_0, \\ \dfrac{(x - x_0)^2}{2} - \dfrac{x}{l}(x_1 - x_0)\left(l - \dfrac{x_0 + x_1}{2}\right), & x_0 \le x \le x_1, \\ \left(\dfrac{x}{l} - 1\right)\dfrac{x_1^2 - x_0^2}{2}, & x_1 < x. \end{cases}$$

3. Модель актьюатора, действующего одинаково вдоль всего полотна (7):

$$f(t,x) = s(t)\frac{x(x - l)}{2}.$$

Функцию $s(t)$ на отрезке $[0,T]$ аппроксимируем ломаной, соединяющей соседние точки (t_n, s_n), (t_{n+1}, s_{n+1}), $n = 0, 1, \ldots, N-1$, прямыми, где $s_0, \ldots, s_N$ – неизвестные пока постоянные.

Константы $s_0, \ldots, s_N$ будем искать, минимизируя функцию многих переменных:

$$J(s_0, \ldots, s_N) = h\sum_{m=1}^{M-1}\left[(\hat{u}_m^N)^2 + \left(\frac{\hat{u}_m^N - \hat{u}_m^{N-1}}{\tau}\right)^2\right], \tag{18}$$

представляющую собой квадратурную формулу трапеций для интеграла (17) с учетом граничных условий (15). Для минимизации будем использовать метод Хука–Дживса (см. [4]).

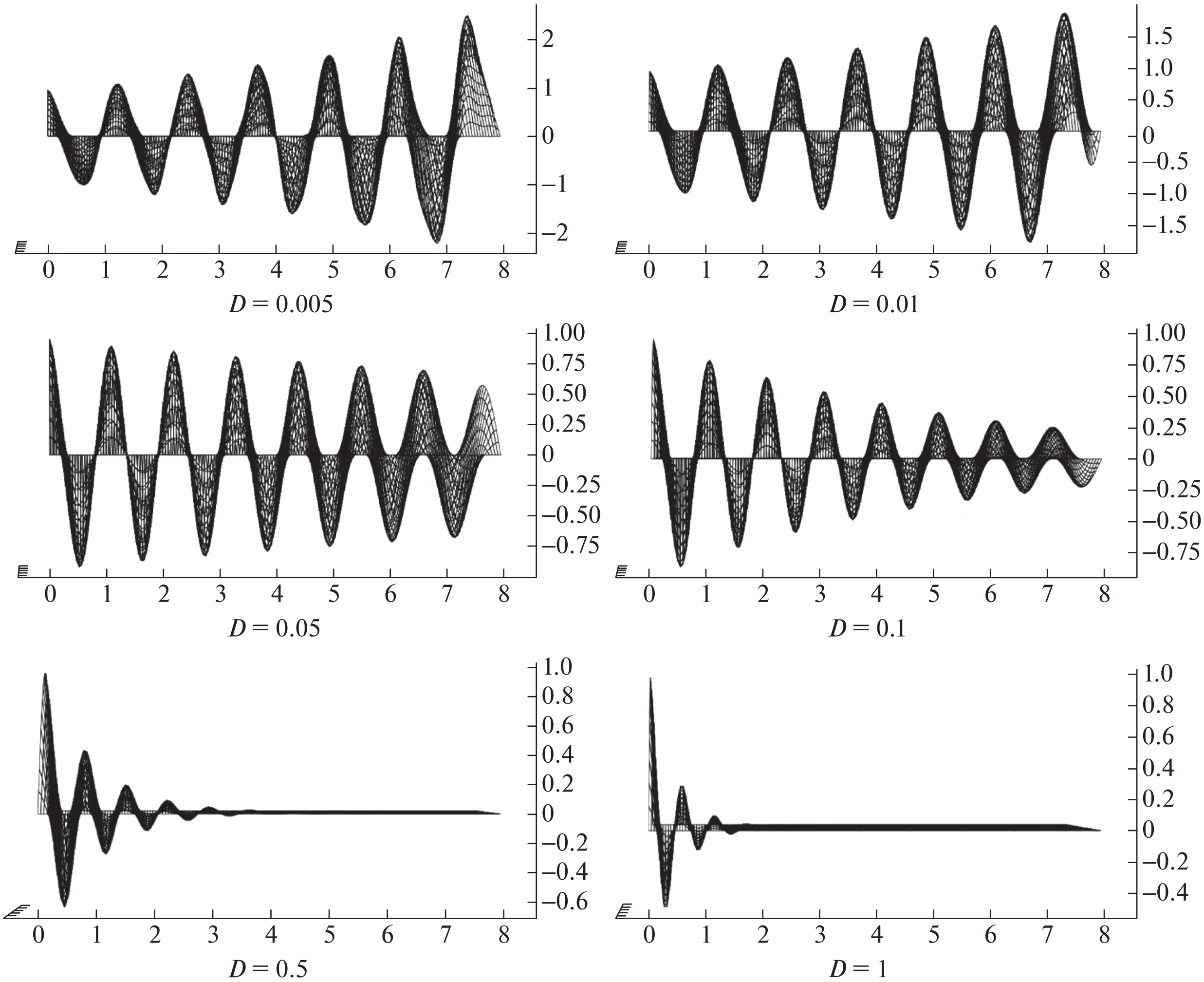
5. ПРИМЕРЫ

Во всех описанных ниже примерах время T будем выбирать так, чтобы гарантировать выполнение условия $J(s_0, \ldots, s_N) < \varepsilon$, где ε полагалось равным 0.001.

Пример 1. Рассмотрим свободные колебания движущегося полотна ($g(t,x) = 0$) с начальными условиями $\varphi(x) = \sin(\pi x)$, $\psi(x) = 0$. Значения входных данных: $V_0 = 1$, $c = 2$, $D = 0.005$, $l = 1$, $T = 8$, $M = 20$, $N = 160$.

На фиг. 3 видно, что максимальная амплитуда колебаний полотна с течением времени возрастает.

Пример 2. Рассмотрим теперь задачу гашения колебаний с использованием точечного актьюатора (5), помещенного в точку $x_0 = 0.5$. Начальные условия и значения входных данных совпа-



Фиг. 12.

дают со значениями из примера 1, $T = 2$. На фиг. 4 показан процесс гашения колебаний с помощью управляющей функции $s(t)$, изображенной на фиг. 5.

Пример 3. Погасим начальные колебания $\varphi(x) = \sin(\pi x)$, $\psi(x) = 0$ с помощью узкого актьюатора (6) с $x_0 = 0.3$, $x_1 = 0.6$. Значения входных данных совпадают со значениями из примера 1, $T = 2$. На фиг. 6 показан процесс гашения колебаний с помощью управляющей функции $s(t)$, изображенной на фиг. 7.

Пример 4. Погасим колебания с помощью актьюатора (7), действующего на протяжении всего полотна. Значения всех параметров совпадают со значениями из примера 1, $T = 2$. На фиг. 8 показан процесс гашения колебаний с помощью управляющей функции $s(t)$, изображенной на фиг. 9.

Пример 5. Будем использовать актьюатор (7) и установим ограничения на управляющую функцию $s_{\min} = -0.6$, $s_{\max} = 0.6$, $T = 2$. На фиг. 10 и 11 изображены процесс гашения $u(t,x)$ и управляющая функция $s(t)$ соответственно.

В [5] с использованием принципа максимума Понтрягина было показано, что при гашении с помощью актьюатора (7) с ограничениями $s_{\min} \le s(t) \le s_{\max}$ значение управляющей функции может частично совпадать с граничными значениями $s_{\min}$, $s_{\max}$. Фиг. 11 подтверждает этот вывод.

Пример 6. Рассмотрим влияние параметра D на свободные колебания $u(t,x)$ $(g(t,x) = 0)$ (фиг. 12). Все входные данные взяты из примера 1.

Как мы видим, при малых D свободные колебания возрастают с течением времени, а при увеличении D, начиная с некоторого значения, затухают сами собой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jeronen J.* On the Mechanical Stability and Out-of-Plane Dynamics of a Travelling Panel Submerged in Axially Flowing Ideal Fluid. Univer. Jyväskylä, 2011. 243 p.
2. *Banichuk N., Barsuk A., Jeronen J., Tuovinen T., Neittaanmäki P.* Stability of Axially Moving Materials. Solid Mechanics and Its Applications. V. 259. Springer, Cham, 2020. 642 p.
3. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 400 с.
4. *Hooke R., Jeeves T.A.* Direct Search Solution of Numerical and Statistical Problems // J. of the ACM (JACM). 1961. V. 8. Issue 2. P. 212–229.
5. *Banichuk N., Petrov V., Sinitsyn A., Neittaanmdki P., Tuovinen T.* On the Optimality Conditions for Suppression of Vibration of Axially Moving Materials.: Rep. Depart. Math. Inform. Technolgy. Ser. B. Sci. Comp. No. B 13120L6. P. 1–19. Univer. Jyvaskyla, 2016.