ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 1, с. 32–46

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.615

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРОВ В ДВУХТОЧЕЧНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ[1)]

© 2021 г. Т. Жанлав[1,*], Х. Отгондорж[1,2,]**

[1] 13330 Улан-батор, Институт математики и информационных технологий, Монгольская Академия Наук, Монголия

[2] 14191 Улан-батор, Факультет Прикладных Наук, Монгольский Государственный Университет Науки и Технологии, Монголия

**e-mail: tzhanlav@yahoo.com*

***e-mail: otgondorj@gmail.com*

Поступила в редакцию 05.11.2019 г.
Переработанный вариант 07.07.2020 г.
Принята к публикации 18.09.2020 г.

Разрабатывается новый оптимальный двухпараметрический класс итерационных методов без производных с применением к итерациям типа Хансена–Патрика. Посредством самоускоряющихся параметров мы также получаем новые более высокого порядка методы с памятью. Впервые мы находим точные аналитические формулы для оптимального значения параметров. Увеличение порядка сходимости с 4 до 7 достигается без каких-либо дополнительных вычислений. Таким образом, предлагаемые методы с памятью обладают очень высокой вычислительной эффективностью. Численные примеры и сравнения с некоторыми существующими методами включены для подтверждения теоретических результатов и высокой вычислительной эффективности. Библ. 14. Табл. 6.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, двухточечные итерации, методы с памятью, оптимальные методы.

DOI: 10.31857/S0044466920120182

1. ВВЕДЕНИЕ

В численном анализе и инженерных приложениях часто требуется решить нелинейное уравнение вида $f(x) = 0$, где $f : D \subset R \to R$ – скалярная функция, определенная на открытом интервале D. Основными методами решения такого уравнения являются метод Ньютона, заданный (см. [1] и так далее) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \ge 0$, и метод Стеффенсена [13], заданный

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}, \quad n \ge 0.$$

В последние годы было предложено много итерационных методов более высокого порядка [1]–[6], в которых была введена концепция увеличения порядка сходимости. Достоинство таких методов заключается в том, что они быстро сходятся к требуемым решениям. Однако с увеличением порядка итеративного метода увеличивается количество функциональных вычислений на каждом шаге. Недавно исследователи предложили несколько двухпараметрических простых двухшаговых методов с памятью и без памяти [2], [8], [13], [14]. Авторы этих работ использовали символьные вычисления для получения порядка сходимости и уравнения ошибки. Такая процедура существенно облегчает громоздкие выкладки. Так, в полученном уравнении ошибки присутствуют параметры итерации. Удачные выборы этих параметров позволяют не только повышать порядок сходимости, но и построить новые итерационные методы с памятью. Основная

[1)]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда науки и технологии Монголии в рамках гранта SST_18 /2018.

цель данной работы — найти оптимальный выбор параметров τ_n и γ, λ в двухточечных итерационных методах. Мы получили аналитические формулы для γ, λ без использования метода символьных вычислений.

В разд. 2 мы получаем оптимальные двухточечные итерации Хансена—Патрика без производных. В разд. 3 мы предлагаем семейство двух параметрических оптимальных итераций и доказываем теорему о локальной сходимости. В разд. 4 мы предлагаем новые двухточечные итерации как с памятью, так и без памяти. В разд. 5 мы представляем результаты численных экспериментов, которые подтверждают теоретический вывод о порядке сходимости и сравнение с другими известными методами того же порядка сходимости.

2. ОПТИМАЛЬНЫЕ ДВУХТОЧЕЧНЫЕ ИТЕРАЦИИ

Рассмотрим двухточечные итерации вида

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_{n+1} = x_n - \tau_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{2.1}$$

где τ_n— параметр итерации. Известно, что оптимальный выбор параметра позволяет расширить область сходимости и увеличить скорость сходимости итераций (2.1). Достаточным условием сходимости четвертого порядка [3] является

$$\tau_n = 1 + \theta_n + 2\theta_n^2 + O(f(x_n)^3), \tag{2.2}$$

где

$$\theta_n = \frac{f(y_n)}{f(x_n)}. \tag{2.3}$$

Условие (2.2) часто используется не только для проверки порядка сходимости итераций (2.1), но также для получения новых оптимальных методов. Для ясности мы напомним некоторые определения, нужные в дальнейшем. Многоточечные методы с порядком сходимости 2^{n-1} называем оптимальным [10], где n — количество вычислений функции на каждом шаге итерации. Еще одним из важных характеристик итерационных методов является их индекс эффективности $EI = \rho^{1/n}$, где ρ — порядок сходимости. В качестве примера рассмотрим известное кубически сходящееся семейство итераций Лагерра (или итерации Хансена—Патрика) (2.1) с параметром τ_n, заданным в виде

$$\tau_n = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \operatorname{sign}(\alpha)\sqrt{1 - (\alpha+1)\dfrac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}}}, \quad \alpha \neq -1. \tag{2.4}$$

Используя разложение Тейлора функции $f(y_n)$ в точке x_n, легко показать, что

$$\theta_n = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{2f'(x_n)^2} + O(f(x_n)^2). \tag{2.5}$$

Тогда (2.4) приводит к

$$\tau_n = \frac{\alpha + 1}{\alpha \pm \sqrt{1 - 2(\alpha+1)\theta_n + O(f(x_n)^2)}}, \quad \alpha \neq -1. \tag{2.6}$$

Пренебрегая малым членом $O(f(x_n)^2)$ в (2.6), получаем

$$\tau_n = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha+1)\theta_n}}, \quad \alpha \neq -1. \tag{2.7}$$

Кансел и др. в [2] рассматривали итерации (2.1) с параметром, определенным (2.7). Используя известное отношение

$$(1-x)^\alpha = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \ldots, \quad |x| < 1, \tag{2.8}$$

легко показать, что (2.7) имеет следующую асимптотику:

$$\tau_n = 1 + \theta_n + \frac{\alpha + 3}{2}\theta_n^2 + O(\theta_n^3). \tag{2.9}$$

Сравнение (2.9) с (2.2) показывает, что итерации (2.1) с параметром τ_n, заданным (2.7), не являются оптимальными. Так как здесь требуются три вычисления функции $f(x_n)$, $f(y_n)$ и $f'(x_n)$ на каждом шаге итерации и порядок сходимости равен 3. Исключение составляет только $\alpha = 1$, т.е.

$$\tau_n = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\theta_n}}, \tag{2.10}$$

который удовлетворяет условию (2.2). Следует отметить, что с помощью ускоряющей процедуры для τ_n в [4] была получена итерация четвертого порядка (2.1) с τ_n, заданным (2.10)). По этой причине значение, определенное (2.10), называется оптимальным. Отметим также, что в [6] была сделана попытка поиска оптимального параметра α семейства Лагерра с точки зрения сходимости. Как правило, итерация (2.1) с параметром τ_n, заданным (2.7), имеет только третий порядок сходимости. Используя условие (2.2), можно найти оптимальную модификацию семейства Хансена—Патрика четвертого порядка. С этой целью мы ищем τ_n в виде

$$\tau_n = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha + 1)\theta_n}} H(\theta_n), \quad \alpha \neq -1, \tag{2.11}$$

где H — вещественная функция, удовлетворяющая условиям

$$H(0) = 1, \quad H'(0) = a, \quad H''(0) = 2b. \tag{2.12}$$

Находим a и b в (2.12) такими, что (2.11) удовлетворяет условию (2.2). Используя разложение Тейлора функций $H(\theta_n)$ и (2.9) в (2.11), получаем

$$\tau_n = 1 + (a + 1)\theta_n + \left(a + b + \frac{\alpha + 3}{2}\right)\theta_n^2 + \dots . \tag{2.13}$$

Сравнение (2.13) с (2.2) дает

$$a = 0, \quad b = \frac{1 - \alpha}{2}.$$

Таким образом, получаем оптимальный вариант семейства Хансена—Патрика (2.1) с параметром, определяемым в виде

$$\tau_n = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha + 1)\theta_n}}\left(1 + \frac{1 - \alpha}{2}\theta_n^2\right), \quad \alpha \neq -1. \tag{2.14}$$

Когда $\alpha = 1$, (2.14) приводит к (2.10). Таким образом, показываем, что можно перейти от любых итераций третьего порядка (2.1) к оптимальным двухточечным итерациям, используя условие (2.2). Аналогично, легко показать, что итерации Хансена—Патрика имеют оптимальный четвертый порядок сходимости, если

$$\tau_n = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha + 1)\theta_n}} + \frac{1 - \alpha}{2}\theta_n^2. \tag{2.15}$$

Обратим внимание, что в [1] авторы предложили новую оптимальную модификацию четвертого порядка семейства Хансена—Патрика (2.1) с параметром, определяемым формулой

$$\tau_n = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{\dfrac{1 - (\alpha + 3)\theta_n - (\alpha^2 - 1)\theta_n^2}{1 + (\alpha - 1)\theta_n}}}, \quad \alpha \neq -1. \tag{2.16}$$

Несмотря на то что они оптимальны с индексом эффективности $EI = 4^{1/3} \approx 1.587$, итерации (2.1) требуют вычисление производной первого порядка на каждом шаге итерации и поэтому не могут применяться к уравнениям с негладкими функциями. В [5] было дано правило для перехода итераций (2.1) в их оптимальный вариант без производных и наоборот. Согласно этому правилу легко получить вариант (2.1) без производной с помощью (2.16). Это имеет форму

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_n},$$
$$x_{n+1} = x_n - \tau_n \frac{f(x_n)}{\phi_n} \quad \text{или} \quad \left(x_{n+1} = y_n - \bar{\tau}_n \frac{f(y_n)}{\phi_n}\right), \tag{2.17}$$

где

$$w_n = x_n + \gamma f(x_n), \quad \phi_n = f[x_n, w_n] = \frac{f(w_n) - f(x_n)}{w_n - x_n},$$

а также

$$\tau_n = 1 + \bar{\tau}_n \theta_n, \tag{2.18}$$

$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{\theta_n}\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{\dfrac{1 - (\alpha + 3)\theta_n - (\alpha^2 - 1)\theta_n^2}{1 + (\alpha - 1)\theta_n}}} - 1\right) + (\hat{d}_n - 2)\theta_n, \tag{2.19}$$

$$\hat{d}_n = \frac{2 + \gamma\phi_n}{1 + \gamma\phi_n}. \tag{2.20}$$

Аналогичным образом, используя достаточное условие сходимости четвертого порядка [7]

$$\bar{\tau}_n = 1 + \hat{d}_n \theta_n + O(f(x_n)^2), \tag{2.21}$$

для (2.17) можно легко построить вариант итераций без производных (2.1), (2.14). Его можно записать как (2.17) с параметром

$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{\theta_n}\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha + 1)\theta_n}}\left(1 + \left(\hat{d}_n - 2 - \frac{\alpha - 1}{2}\right)\theta_n^2\right) - 1\right), \quad \alpha \neq -1. \tag{2.22}$$

Таким образом, имеем семейства итераций типа Хансена–Патрика без производных (2.17) с параметром, заданным двумя вариантами (2.19) и (2.22).

Замечание 1. В общем, мы можем рассмотреть следующую весовую функцию:

$$W(\theta_n, \alpha, m) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt[m]{1 - m(\alpha + 1)\theta_n}} = 1 + \theta_n + \left(1 - \frac{1 - m}{2}(\alpha + 1)\right)\theta_n^2 + \ldots \tag{2.23}$$

в итерации (2.1). Мы называем $W(\theta_n, \alpha, m)$ обобщенной весовой функцией Хансена–Патрика. Функция $W(\theta_n, \alpha, 2)$ приводит к (2.7). Легко показать, что итерационные методы (2.1) имеют оптимальный четвертый порядок сходимости, когда τ_n удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\tau_n = W(\theta_n, \alpha, m) + \left(1 + \frac{1 - m}{2}(\alpha + 1)\right)\theta_n^2, \quad \alpha \neq -1, \tag{2.24}$$

и

$$\tau_n = W(\theta_n, \alpha, m) H(\theta_n), \tag{2.25}$$

где H – вещественная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

$$H(0) = 1, \quad H'(0) = 0, \quad H''(0) = 2\left(1 + \frac{1 - m}{2}(\alpha + 1)\right). \tag{2.26}$$

Что касается H, можно выбрать, например, следующие функции:

$$H_1 = 1 + \left(1 + \frac{1-m}{2}(\alpha+1)\right)\theta_n^2,$$
$$H_2 = \frac{1}{1 - \left(1 + \frac{1-m}{2}(\alpha+1)\right)\theta_n^2},$$
$$H_3 = \sqrt{1 + (2 + (1-m)(\alpha+1))\theta_n^2}.$$

3. СЕМЕЙСТВО ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОПТИМАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИЙ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ ПРОИЗВОДНЫЕ

Теперь рассмотрим двухпараметрические итерации без производных

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_n + \lambda f(w_n)}, \quad \lambda \in R, \\ x_{n+1} &= y_n - \overline{\tau}_n \frac{f(y_n)}{\phi_n + \lambda f(w_n)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $w_n = x_n + \gamma f(x_n)$, $\gamma \in R$, $\phi_n = f[x_n, w_n] = \dfrac{f(w_n) - f(x_n)}{\gamma f_n}$. Наша цель – найти $\overline{\tau}_n$ в (3.1) так, чтобы итерации (3.1) имели оптимальную сходимость четвертого порядка. Для этого сначала используем разложение Тейлора функции $f(w_n) = f(x_n)(1 + \gamma\phi_n)$ в точке x_n. Тогда мы получим

$$\phi_n = f'(x_n)\left(1 + \frac{a_n}{2} f'(x_n)\gamma\right) + O(f_n^2), \quad (f_n) = f(x_n), \tag{3.2}$$

где

$$a_n = \frac{f''(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2}. \tag{3.3}$$

Пусть $\eta_n = \dfrac{f'(x_n)}{\phi_n}$. Тогда, используя (3.2), получаем

$$\eta_n = \frac{1}{1 + \frac{a_n}{2} f'(x_n)\gamma + O(f_n^2)} = 1 - \frac{a_n}{2} f'(x_n)\gamma + O(f_n^2). \tag{3.4}$$

Разложение Тейлора $f(y_n)$ в точке x_n дает

$$f(y_n) = f(x_n)\left(1 - \eta_n\left(1 - \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}\right)\right) + O(f_n^2) = f(x_n)\left(1 - \left(1 - \frac{a_n}{2} f'(x_n)\gamma\right)\left(1 - \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}\right)\right) + O(f_n^2). \tag{3.5}$$

Согласно (3.3), имеем $f(y_n) = O(f(x_n)^2)$. Аналогично, из второго шага в (3.1) получаем

$$f(x_{n+1}) = \left(1 - \overline{\tau}_n \frac{f'(y_n)}{\phi_n + \lambda f(w_n)}\right) f(y_n) + O(f(y_n)^2). \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) ясно, что получим

$$f(x_{n+1}) = O(f_n^4), \tag{3.7}$$

если выбирать $\overline{\tau}_n$ так, чтобы

$$1 - \overline{\tau}_n \frac{f'(y_n)}{\phi_n + \lambda f(w_n)} = O(f_n^2)$$

или

$$\overline{\tau}_n = \frac{\phi_n + \lambda f(w_n)}{f'(y_n)} + O(f_n^2). \tag{3.8}$$

Разложение Тейлора $f'(y_n)$ в точке x_n дает

$$f'(y_n) = f'(x_n)\left(1 - \frac{f_n'' f_n}{f_n'\phi_n\left(1 + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}\right)}\right) + O(f_n^2), \qquad f_n' = f'(x_n).$$

Используя (3.3) и (3.4) в последнем соотношении, мы получаем

$$f'(y_n) = f_n'(1 - a_n) + O(f_n^2). \tag{3.9}$$

Подставляя (3.2) и (3.9) в (3.8), получаем

$$\begin{aligned}\overline{\tau}_n &= \frac{1 + \frac{a_n}{2} f_n'\gamma + \lambda\frac{(1+\gamma\phi_n)f_n}{f_n'} + O(f_n^2)}{1 - a_n + O(f_n^2)} = \left(1 + \frac{a_n}{2} f_n'\gamma + \frac{\lambda(1+\gamma\phi_n)f_n}{f_n'}\right)(1 + a_n) + O(f_n^2) = \\ &= 1 + \left(1 + \frac{f_n'\gamma}{2}\right)a_n + \frac{\lambda(1+\gamma\phi_n)f_n}{f_n'} + O(f_n^2).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Согласно (3.3) и (3.4) имеем $f_n' = \phi_n + O(f_n)$. Следовательно, можно заменить f_n' через φ_n в (3.10) без потери точности. В результате имеем

$$\overline{\tau}_n = 1 + \frac{2 + \gamma\phi_n}{2} a_n + \frac{\lambda(1+\gamma\phi_n)f_n}{\phi_n} + O(f_n^2). \tag{3.11}$$

Далее, используя разложение Тейлора $f(y_n)$ и (3.4), легко получить

$$\begin{aligned}\theta_n &= \frac{a_n}{2}(1 + \gamma f_n') + \frac{\lambda(1+\gamma\phi_n)}{\phi_n} f(x_n) + O(f_n^2) = \frac{a_n}{2}(1 + \gamma\phi_n) + \frac{\lambda(1+\gamma\phi_n)}{\phi_n} f(x_n) + O(f_n^2) = \\ &= (1 + \gamma\varphi_n)\left(\frac{a_n}{2} + \lambda\frac{f(x_n)}{\phi_n}\right) + O(f_n^2).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Отсюда мы находим

$$\frac{a_n}{2} = \frac{\theta_n}{1 + \gamma\phi_n} - \frac{\lambda f(x_n)}{\phi_n} + O(f_n^2). \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) в (3.11), получаем

$$\overline{\tau}_n = 1 + \hat{d}_n\theta_n - \frac{\lambda f(x_n)}{\phi_n} + O(f_n^2). \tag{3.14}$$

Таким образом, мы можем сформулировать полученные результаты.

Теорема 1. *Предположим, что функция* $f : D \subset R \to R$ *достаточно дифференцируема и имеет простой ноль* $x^* \in D$. *Пусть начальное приближение* x_0 *достаточно близко к* x^*, *а параметр* $\overline{\tau}_n$ *удовлетворяет условию* (3.14). *Тогда итерационные методы* (3.1) *имеют оптимальную сходимость четвертого порядка.*

Кансал и соавт. в [2] предложили новое трехпараметрическое оптимальное семейство итераций типа Хансена–Патрика без производных

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_n + \lambda f(w_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \overline{\tau}_n\frac{f(y_n)}{f[y, w_n] + \lambda f(w_n)}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

где

$$\overline{\tau}_n = \frac{1}{\theta_n}\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha+1)\theta_n}} - 1\right)H(\theta_n), \qquad \alpha \neq -1. \tag{3.16}$$

Здесь H — вещественная весовая функция, удовлетворяющая условию

$$H(0) = 1, \quad H'(0) = -\frac{\alpha+1}{2}, \quad |H''(0)| < \infty. \tag{3.17}$$

Обратим внимание, что итерации (3.15) имеют различие в знаменателе во втором этапе по сравнению с (3.1). Используя легко проверяемое соотношение

$$f[y, w_n] + \lambda f(w_n) = (\phi_n + \lambda f(w_n))\left(1 - \frac{\phi_n\theta_n - \lambda f(w_n)}{(1+\gamma\phi_n)(\phi + \lambda f(w_n))}\right) + O(f_n^2), \tag{3.18}$$

второй шаг в (3.15) можно переписать в виде

$$x_{n+1} = y_n - \overline{\tau}_n \frac{f(y_n)}{\phi_n + \lambda f(w_n)},$$

где

$$\overline{\tau}_n = \left(1 + \frac{\phi_n\theta_n - \lambda f(w_n)}{(1+\gamma\phi_n)(\phi + \lambda f(w_n))}\right)\frac{1}{\theta_n}\left(\frac{\alpha+1}{\alpha + \sqrt{1 - 2(\alpha+1)\theta_n}} - 1\right)H(\theta_n), \quad \alpha \neq -1. \tag{3.19}$$

Нетрудно показать, что $\overline{\tau}_n$, заданный по формуле (3.19), удовлетворяет условию (3.14). То есть, доказываем, что итерации (3.15)–(3.17) имеют сходимость четвертого порядка без использования символических вычислений, используемых в [2]. Двухпараметрическая итерация (3.1) с $\overline{\tau}_n$, заданным (3.19), представляет новый вариант семейства итераций типа Хансена–Патрика без производной. Аналогично, используя формулу (3.18), легко показать, что двухпараметрические методы четвертого порядка без производных, приведенные в [8], [10], [13], удовлетворяют условию (3.14).

Пусть $\gamma = 0$ в (3.1). Тогда (3.1) приводит к итерациям с одним параметром

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \lambda f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \overline{\tau}_n \frac{f(y_n)}{f'(x_n) + \lambda f(x_n)}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

По теореме 1 итерации (3.20) имеют оптимальную сходимость четвертого порядка, когда $\overline{\tau}_n$ определяется в виде

$$\overline{\tau}_n = 1 + 2\theta_n - \frac{\lambda f(x_n)}{f'(x_n)} + O(f_n^2). \tag{3.21}$$

Итерации (3.20) требуют трех функциональных вычислений: $f(x_n)$, $f(y_n)$ и $f'(x_n)$. Индекс эффективности итераций составляет $EI = \sqrt[3]{4} \approx 1.587$. Теперь попробуем найти оптимальное значение свободного параметра λ. Для этого сначала используем разложение Тейлора $f(y_n)$ в точке x_n и соотношение (2.8). В результате имеем

$$f(y_n) = f(x_n)^2\left(\frac{\lambda}{f_n'} + \frac{f_n''}{2f_n'^2} - \frac{\lambda^2 f_n}{f_n'^2} - \frac{\lambda f_n f_n''}{f_n'^3} - \frac{f_n''' f_n}{6f_n'^3}\right) + O(f_n^4). \tag{3.22}$$

Это означает, что $f(y_n) = O(f_n^2)$ для любого λ. Если выбираем

$$\lambda = \lambda_n = -\frac{f_n''}{2f_n'} \tag{3.23}$$

в (3.22), то получаем $f(y_n) = O(f_n^3)$. Назовем значение λ_n, заданное по формуле (3.23), оптимальным в том смысле, что оно увеличивает порядок сходимости последовательности y_n с двух до трех. При выборе (3.23) выражение (3.22) можно записать в виде

$$f(y_n) = f(x_n)\left(\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 - \frac{f_n''' f_n^2}{6f_n'^3}\right) + O(f_n^4). \tag{3.24}$$

Отсюда следует, что

$$\theta_n = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3} + O(f_n^3),$$

что подразумевает

$$\frac{f_n''' f_n^2}{f_n'^3} = \frac{3}{2} a_n^2 - 6\theta_n + O(f_n^3). \tag{3.25}$$

Теперь рассмотрим разложение Тейлора $f(x_{n+1})$ в точке y_n:

$$f(x_{n+1}) = f(y_n)\left(1 - \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\bar{\tau}_n\left(1 - \frac{\lambda f_n}{f_n'}\right)\right) + O(f(y_n)^2). \tag{3.26}$$

Выше было показано, что $f(y_n) = O(f_n^3)$ при выборе (3.23). Следовательно, из (3.26) ясно, что

$$f(x_{n+1}) = O(f(x_n)^6), \tag{3.27}$$

если мы выберем $\bar{\tau}_n$ такой, что

$$1 - \frac{f'(y_n)}{f'(x_n)}\bar{\tau}_n\left(1 - \frac{\lambda f_n}{f_n'}\right) = O(f_n^3)$$

или

$$\bar{\tau}_n = \frac{1}{1 - \frac{\lambda f_n}{f_n'}} \frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} + O(f_n^3). \tag{3.28}$$

Используя разложение Тейлора $f'(y_n)$ в точке x_n, легко показать, что

$$f'(y_n) = f'(x_n)\left(1 - a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{f_n''' f_n^2}{2 f_n'^3}\right) + O(f_n^3).$$

Учитывая (3.25), получаем

$$\frac{f'(x_n)}{f'(y_n)} = \frac{1}{1 - a_n + a_n^2/4 - 3\theta_n + O(f_n^3)} = 1 + a_n + \frac{3a_n^2}{4} + 3\theta_n + O(f_n^3). \tag{3.29}$$

Подставив (3.23) и (3.29) в (3.28), получим

$$\bar{\tau}_n = 1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{4} + 3\theta_n + O(f_n^3). \tag{3.30}$$

Это означает, что соотношение (3.27) выполняется при выборах (3.30) и (3.23). Таким образом, верна

Теорема 2. *Предположим, что функция* $f : D \subset R \to R$ *достаточно дифференцируема и имеет простой ноль* $x^* \in D$. *Пусть начальное приближение* x_0 *достаточно близко к* x^*, *а параметры* λ_n *и* $\bar{\tau}_n$ *удовлетворяют условиям* (3.23) *и* (3.30). *Тогда итерационные методы* (3.20) *имеют сходимость шестого порядка*.

На основе оптимального выбора параметров λ_n и $\bar{\tau}_n$ можно построить новые сходящиеся итерации шестого порядка с памятью:

$$x_0, \lambda_0 \quad \text{заданные.} \quad \text{Тогда,}$$

$$\lambda_n = -\frac{\Delta_n}{2 f_n'}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\bar{\tau}_n = 1 - \frac{\lambda_n f_n}{f'_n} + \left(\frac{\lambda_n f_n}{f'_n}\right)^2 + 3\theta_n, \tag{3.31}$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \lambda_n f(x_n)},$$

$$x_{n+1} = y_n - \bar{\tau}_n \frac{f(y_n)}{f'(x_n) + \lambda_n f(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\Delta_n = \frac{f(x_n + \gamma f(x_n)) - 2f(x_n) + f(x_n - \gamma f(x_n))}{(\gamma f(x_n))^2}, \quad \gamma \in R \backslash \{0\}.$$

Видно, что $f''(x_n) = \Delta_n + O(f_n^2)$.

Замечание 2. Уравнение ошибки, полученное с помощью символьных вычислений, играет важную роль в создании новых методов (без производных) с памятью [1], [2], [8]–[13]. Например, с выбором

$$\lambda = -c_2 = -\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda,$$

порядок сходимости методов увеличивается, в то время как на каждом шаге итерации мы имеем точную аналитическую формулу (3.23).

Аналогично, легко показать, что

$$f(x_{n+1}) = O(f(x_n)^5), \quad \text{если} \quad \bar{\tau}_n = 1 + \frac{a_n}{2} + O(f_n^2). \tag{3.32}$$

Следует отметить, что подобные с (3.20) методы были рассмотрены Вангом и соавт. в [8], где рассматривается

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \lambda f(x_n)}, \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{f(y_n)}{f'(x_n) + \gamma f(x_n)} G(\theta_n), \quad \lambda, \gamma \in R, \end{aligned} \tag{3.33}$$

и показано, что (3.33) имеет сходимость четвертого порядка, когда

$$\gamma = 2\lambda, \quad G(0) = 1, \quad G'(0) = 2, \quad |G''(0)| < \infty. \tag{3.34}$$

В [8] использовался самоускоряющийся параметр

$$\lambda_n = -\frac{H''_m(x_n)}{2H'_m(x_n)}, \quad m = 2, 3, 4, \tag{3.35}$$

в (3.33) и доказано, что порядок сходимости R – итерационных методов (3.33) с параметром (3.35) с памятью составляет не менее $(5 + \sqrt{17})/2 \approx 4.5616$, $(5 + \sqrt{21})/2 \approx 4.7913$ и 5 соответственно. Здесь $H_m(x_n)$ – интерполяционный полином Эрмита со степенью $m = 2, 3, 4$, удовлетворяющий условию $H'_m(x_n) = f'(x_n)$. Итерации (3.33) и (3.34) можно переписать как (3.20) с $\bar{\tau}_n$ вида

$$\bar{\tau}_n = \left(1 - \frac{\lambda f_n}{f'_n + \lambda f_n} + \cdots\right)(1 + 2\theta_n + \cdots) = 1 + \frac{a_n}{2} + O(f_n^2),$$

т.е. $\bar{\tau}_n$ удовлетворяет условию (3.32). Если мы выберем λ_n как в (3.31), тогда получим итерации с памятью:

$$x_0, \lambda_0 \quad \text{заданные.} \quad \text{Тогда,}$$

$$\lambda_n = -\frac{\Delta_n}{2f'_n}, \quad a_n = -\frac{2\lambda_n f_n}{f'_n}, \quad \bar{\tau}_n = 1 + \frac{a_n}{2},$$

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n) + \lambda_n f(x_n)}, \tag{3.36}$$

$$x_{n+1} = y_n - \overline{\tau}_n \frac{f(y_n)}{f'(x_n) + \lambda_n f(x_n)},$$

имеющие пятый порядок сходимости.

Замечание 3. Как уже упоминалось выше, при рассмотрении итераций типа Хансена–Патрика $\overline{\tau}_n$ определяется как (3.19).

4. НОВЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ С ПАМЯТЬЮ

Теперь мы приступим к созданию новых итерационных методов с памятью из (3.1), используя два самоускоряющихся параметра γ и λ. Легко показать, что

$$w_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{4.1}$$

и

$$f(w_n) = \frac{f_n'' f_n^2}{2 f_n'^2} + O(f_n^3), \tag{4.2}$$

при выборе

$$\gamma = \gamma_n = -\frac{1}{f_n'}. \tag{4.3}$$

Пусть $f(x_n) \in C^4(I)$. Используя разложение Тейлора для $f(w_n)$ и (4.3), получаем

$$\phi_n = f_n'\left(1 - \frac{a_n}{2} + \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3}\right) + O(f_n^3).$$

Следовательно,

$$\eta_n = \frac{f_n'}{\phi_n} = 1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{4} - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3} + O(f_n^3). \tag{4.4}$$

Разложение Тейлора $f(y_n)$ в точке x_n дает

$$f(y_n) = f(x_n)\left(1 - \frac{\eta_n}{1 + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}} + \frac{a_n}{2}\left(\frac{\eta_n}{1 + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}}\right)^2 - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3}\left(\frac{\eta_n}{1 + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}}\right)^3\right) + O(f_n^4). \tag{4.5}$$

В силу (4.2) и (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\eta_n}{1 + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}} &= \left(1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{4} - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3} + \cdots\right)\left(1 - \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n} + \cdots\right) = \\ &= \left(1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{4} - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3} - \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n} + O(f_n^3)\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Используя (4.6) в (4.5), получаем

$$\begin{aligned} f(y_n) = f(x_n)&\left(-\frac{a_n}{2} - \frac{a_n^2}{4} + \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n^3} + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n} + \frac{a_n}{2}(1 + a_n) - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3}\right) + O(f_n^4) = \\ &= f(x_n)\left(\frac{a_n^2}{4} + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n}\right) + O(f_n^4). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Из (4.7) ясно, что

$$f(y_n) = O(f_n^4), \tag{4.8}$$

если

$$\frac{a_n^2}{4} + \frac{\lambda f(w_n)}{\phi_n} = 0, \tag{4.9}$$

или

$$\lambda_n = -\frac{a_n^2 \phi_n}{4 f(w_n)}. \tag{4.10}$$

Используя (4.2) и (4.4) в (4.10), получаем

$$\lambda_n = -\frac{f_n''}{2 f_n'}, \tag{4.11}$$

т.е. соотношение (4.8) выполняется при выборе (4.11). Далее из (3.6) и (4.8) ясно, что

$$f(x_{n+1}) = O(f_n^7), \tag{4.12}$$

если

$$\overline{\tau}_n = -\frac{\phi_n + \lambda f(w_n)}{f'(y_n)} + O(f_n^3) \tag{4.13}$$

или

$$\overline{\tau}_n = \frac{\phi_n}{f'(y_n)}\left(1 - \frac{a_n^2}{4}\right) + O(f_n^3). \tag{4.14}$$

Разложение Тейлора $f'(y_n)$ в точке x_n дает

$$f'(y_n) = f'(x_n)\left(1 - a_n\left(\frac{\eta_n}{1 - \frac{a_n^2}{4}}\right) + \frac{f_n''' f_n^2}{2 f_n'^3}\left(\frac{\eta_n}{1 - \frac{a_n^2}{4}}\right)^2\right) + O(f_n^3). \tag{4.15}$$

Поскольку

$$\frac{\eta_n}{1 - \frac{a_n^2}{4}} = \left(1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{4} - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3} + \ldots\right)\left(1 + \frac{a_n^2}{4} + \ldots\right) = 1 + \frac{a_n}{2} + \frac{a_n^2}{2} - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3} + O(f_n^3), \tag{4.16}$$

из (4.15) получаем

$$f'(y_n) = f'(x_n)\left(1 - a_n - \frac{a_n^2}{2} + \frac{f_n''' f_n^2}{2 f_n'^3}\right) + O(f_n^3). \tag{4.17}$$

Используя последнее выражение и (4.4) в (4.14), получаем

$$\overline{\tau}_n = 1 - \frac{a_n}{2} + \frac{3}{4} a_n^2 + 2(1 + \gamma_n \phi_n) + O(f_n^3), \tag{4.18}$$

где использована формула

$$1 + \gamma_n \phi_n = \frac{a_n}{2} - \frac{f_n''' f_n^2}{6 f_n'^3} + O(f_n^3). \tag{4.19}$$

Таблица 1. $f_1 = e^{x^3-x} - \cos(x^2-1) + x^3 + 1$, $x_0 = -1.5$, $x^* = -1$ [14]

Методы	n	$\overline{\tau}_n$	$\lvert x_n - x^*\rvert$	ρ
(3.1) $(\lambda = -0.1, \gamma = -0.01)$	4	(3.14)	0.1014e–217	4.00
(3.1) $(\alpha = 1, \gamma = -0.01)$	4	(3.19)	0.1544e–224	4.00
(3.20) $(\lambda = -0.1)$	4	(3.21)	0.6919e–229	4.00
Dzunic [13] $(p = -0.1, \gamma = -0.01, g(\theta_n) = 1 + \theta_n)$	4		0.4682e–222	4.00
Wang-Zhang [8] $(t = 8, \lambda = -0.1, G(\theta_n) = 1 + 2 * \theta_n + t * \theta_n^2)$	4		0.1974e–192	4.00
Kung-Traub [11]	4		0.9297e–173	4.00
Chebyshev-Halley [11]	4		0.5980e–175	4.00

Таким образом, можно сформулировать полученные результаты в виде теоремы.

Теорема 3. *Предположим, что функция $f : D \subset R \to R$ достаточно дифференцируема и имеет простой ноль $x^* \in D$. Пусть начальное приближение x_0 достаточно близко к x^*, а параметры γ и λ в* (3.1) *выбираются как*

$$\gamma = \gamma_n = -\frac{1}{f'(x_n)}, \quad \lambda = \lambda_n = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)},$$

и $\overline{\tau}_n$ определяется формулой (3.14) (*либо* (4.18)). *Тогда итерационные методы* (3.1) *имеют порядок сходимости семь.*

Таким образом, оптимальный выбор параметров позволяет увеличить порядок сходимости с 4 до 7. Однако значения $f'(x_n)$ и $f''(x_n)$ на практике недоступны, и такое ускорение сходимости не может быть реализовано. Но мы бы приблизили параметры γ_n и λ_n. Они могут быть вычислены с использованием информации, доступной из текущей и предыдущей итераций. На основе вариантов (4.3) и (4.11) можно построить двухточечные итерации (без производных) с памятью и имеющие седьмой порядок сходимости:

$$\begin{gathered} x_0, \lambda_0, \gamma_0 \quad \text{заданные.} \quad \text{Тогда} \quad w_0 = x_0 + \gamma_0 f(x_0), \\ \gamma_n = -\frac{1}{N_3'(x_n)}, \quad w_n = x_n + \gamma_n f(x_n), \quad \lambda_n = -\frac{N_4''(x_n)}{2N_4'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots, \\ y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{\phi_n + \lambda_n f(w_n)}, \\ x_{n+1} = y_n - \overline{\tau}_n \frac{f(y_n)}{\phi_n + \lambda_n f(w_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots, \end{gathered} \tag{4.20}$$

где $\overline{\tau}_n$ удовлетворяет условию (3.14). Здесь $N_3(t, x_n, y_{n-1}, x_{n-1}, w_{n-1})$ и $N_4(t, w_n, x_n, w_{n-1}, y_{n-1}, x_{n-1})$ – интерполяционные полиномы Ньютона третьей и четвертой степени, построенные через доступные узловые точки $(x_n, x_{n-1}, y_{n-1}, w_{n-1})$ и $(x_n, w_n, x_{n-1}, y_{n-1}, w_{n-1})$ соответственно. Заметим, что в [13] получено вышеуказанное свойство при выборе

$$\lambda_n = -\frac{N_4''(w_n)}{2N_4'(w_n)}.$$

5. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Чтобы продемонстрировать поведение сходимости и эффективность методов (3.1), (3.20), (3.36), (4.20), мы рассмотрим несколько числовых примеров и сделаем сравнения с существующими методами того же порядка. Расчеты были выполнены в Maple 18 с использованием ариф-

Таблица 2. $f_1 = e^{x^3-x} - \cos(x^2-1) + x^3 + 1$, $x_0 = -1.5$, $x^* = -1$ [14]

Методы	n	$\overline{\tau}_n$	$\lvert x_n - x^*\rvert$	ρ
(3.20) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$)	3	(3.21)	0.1735e–56	5.00
(3.20) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	3	(3.32)	0.7578e–99	5.00
(3.36) ($\lambda_n = -\Delta_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	3		0.4079e–85	5.02
(3.33)–(3.35) [8] ($\lambda_n = -H''_4/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	3		0.2404e–89	5.09
(3.20) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	3	(3.30)	0.6559e–176	6.00
(3.31) ($\lambda_n = -\Delta_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	3		0.4538e–125	6.00
(3.1) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	3	(4.18)	0.3128e–93	7.00
(4.20) ($\lambda_n = -N''_4(x_n)/2N'_4(x_n)$, $\lambda_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$)	3	(3.21)	0.4294e–162	7.06
Dzunic [13] ($p_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$), $g(\theta_n) = 1 + \theta_n$	3		0.1404e–157	7.06
Cordero [14] ($\lambda_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$)	3		0.1114e–157	7.06
Kansal [2] ($\lambda_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$), $\alpha = \beta = 1/2$	3		0.1095e–100	7.08

Таблица 3. $f_2 = e^{x^3-3x}\sin x + \log(x^2+1)$, $x_0 = 1$, $x^* = 0$ [12]

Методы	n	$\overline{\tau}_n$	$\lvert x_n - x^*\rvert$	ρ
(3.1) ($\lambda = -0.1$, $\gamma = -0.01$)	4	(3.14)	0.1469e–82	4.00
(3.1) ($\alpha = 1$, $\gamma = -0.01$)	4	(3.19)	0.6589e–68	3.99
(3.20) ($\lambda = -0.1$)	4	(3.21)	0.3650e–83	4.00
Dzunic [13] ($p = -0.1$, $\gamma = -0.01$, $g(\theta_n) = 1 + \theta_n$)	4		0.7008e–66	4.00
Wang-Zhang [8] ($t = 8$, $\lambda = -0.1$, $G(\theta_n) = 1 + 2 * \theta_n + t * \theta_n^2$)	5		0.7447e–204	4.00
Kung-Traub [11]	4		0.1469e–82	4.00
Chebyshev-Halley [11]	4		0.1975e–88	4.00

Таблица 4. $f_2 = e^{x^3-3x}\sin x + \log(x^2+1)$, $x_0 = 1$, $x^* = 0$ [12]

Методы	n	$\overline{\tau}_n$	$\lvert x_n - x^*\rvert$	ρ
(3.20) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$)	4	(3.21)	0.2170e–217	5.00
(3.20) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	4	(3.32)	0.3916e–220	5.00
(3.36) ($\lambda_n = -\Delta_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	4		0.2326e–136	5.00
(3.33)–(3.35) [8] ($\lambda_n = -H''_4/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	4		0.2069e–122	5.00
(3.20) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	4	(3.30)	0.3111e–233	6.00
(3.31) ($\lambda_n = -\Delta_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	4		0.2699e–291	6.00
(3.1) ($\lambda_n = -f''_n/2f'_n$, $\lambda_0 = -0.1$)	4	(4.18)	0.1560e–119	7.00
(4.20) ($\lambda_n = -N''_4(x_n)/2N'_4(x_n)$, $\lambda_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$)	4	(3.21)	0.3134e–416	7.00
Dzunic [13] ($p_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$), $g(\theta_n) = 1 + \theta_n$	4		0.3892e–330	6.99
Cordero [14] ($\lambda_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$)	4		0.5524e–284	6.99
Kansal [2] ($\lambda_0 = -0.1$, $\gamma_0 = -0.01$), $\alpha = \beta = 1/2$	4		0.8391e–293	6.98

метики с кратной точностью и с 1000 цифрами. Для численных расчетов мы использовали следующие функции [12], [13] и [14]:

$$f_1 = e^{x^3-x} - \cos(x^2-1) + x^3 + 1, \quad x^* = -1,$$

$$f_2 = e^{x^3-3x}\sin x + \log(x^2+1), \quad x^* = 0,$$

$$f_3 = (x^6 + x^{-6} + 4)(x-1)\sin x^2, \quad x^* = 1,$$

Таблица 5. $f_3 = (x^6 + x^{-6} + 4)(x - 1)\sin x^2$, $x_0 = 0.8$, $x^* = 1$ [13]

Методы	n	$\bar{\tau}_n$	$\lvert x_n - x^*\rvert$	ρ
(3.1) ($\lambda = -0.1, \gamma = -0.01$)	4	(3.14)	0.3589e–140	4.00
(3.1) ($\alpha = 1, \gamma = -0.01$)	4	(3.19)	0.9036e–111	4.00
(3.20) ($\lambda = -0.1$)	4	(3.21)	0.1007e–138	4.00
Dzunic [13] ($p = -0.1, \gamma = -0.01, g(\theta_n) = 1 + \theta_n$)	4		0.4671e–130	4.00
Wang-Zhang [8] ($t = 8, \lambda = -0.1, G(\theta_n) = 1 + 2 * \theta_n + t * \theta_n^2$)	4		0.1552e–96	4.00
Kung-Traub [11]	4		0.2972e–132	4.00
Chebyshev-Halley [11]	4		0.2847e–118	4.00

Таблица 6. $f_3 = (x^6 + x^{-6} + 4)(x - 1)\sin x^2$, $x_0 = 0.8$, $x^* = 1$ [13]

Методы	n	$\bar{\tau}_n$	$\lvert x_n - x^*\rvert$	ρ
(3.20) ($\lambda_n = -f_n''/2f_n'$)	3	(3.21)	0.1344e–53	4.99
(3.20) ($\lambda_n = -f_n''/2f_n', \lambda_0 = -0.1$)	4	(3.32)	0.2239e–250	5.00
(3.36) ($\lambda_n = -\Delta_n/2f_n', \lambda_0 = -0.1$)	4		0.5113e–183	5.00
(3.33)–(3.35) [8] ($\lambda_n = -H_4''/2f_n', \lambda_0 = -0.1$)	4		0.1142e–213	5.00
(3.20) ($\lambda_n = -f_n''/2f_n', \lambda_0 = -0.1$)	4	(3.30)	0.2116e–259	6.00
(3.31) ($\lambda_n = -\Delta_n/2f_n', \lambda_0 = -0.1$)	3		0.1080e–60	5.96
(3.1) ($\lambda_n = -f_n''/2f_n', \lambda_0 = -0.1$)	4	(4.18)	0.1802e–315	7.00
(4.20) ($\lambda_n = -N_4''(x_n)/2N_4'(x_n), \lambda_0 = -0.1, \gamma_0 = -0.01$)	3	(3.21)	0.6532e–107	7.03
Dzunic [13] ($p_0 = -0.1, \gamma_0 = -0.01$), $g(\theta_n) = 1 + \theta_n$	3		0.1364e–87	7.05
Cordero [14] ($\lambda_0 = -0.1, \gamma_0 = -0.01$)	3		0.8409e–80	7.04
Kansal [2] ($\lambda_0 = -0.1, \gamma_0 = -0.01$), $\alpha = \beta = 1/2$	3		0.9084e–72	7.02

и критерий остановки $\lvert x_n - x^*\rvert < 10^{-60}$. Результаты расчетов приведены в табл. 1–6, где указаны числа итераций (n), абсолютные погрешности $\lvert x_n - x^*\rvert$ и вычислительный порядок сходимости (ρ), заданный по формуле

$$\rho \approx \frac{\ln(\lvert x_n - x^*\rvert / \lvert x_{n-1} - x^*\rvert)}{\ln(\lvert x_{n-1} - x^*\rvert / \lvert x_{n-2} - x^*\rvert)}.$$

Из табл. 1–6 видно, что результаты расчетов полностью подтверждают теоретический порядок сходимости, полученный в предыдущих разделах.

6. ВЫВОДЫ

Мы предлагаем новый класс оптимальных двухточечных итерационных методов, не содержащих производные, которые включают в себя два свободных параметра. Впервые мы нашли точные аналитические формулы для оптимальных значений этих параметров, что позволяет повышать порядок сходимости. На этой основе мы предлагаем новые итерационные методы с высоким порядком сходимости как с памятью, так и без памяти.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kansal M., Kanwar V., Bhatia S.* New modifications of Hansen–Patrick's family with optimal fourth and eighth orders of convergence // Appl. Math.Comput. 2015. V. 269. P. 507–519.
2. *Kansal M., Kanwar V., Bhatia S.* Efficient derivative-free variants of Hansen-Patrick's family with memory for solving nonlinear equations // Numer. Algor. 2016. V. 73. P. 1017–1036.

3. *Zhanlav T., Ulziibayar V., Chuluunbaatar O.* Necessary and sufficient conditions for the convergence of two- and three-point Newton-type iterations // Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. P. 1090–1100.
4. *Zhanlav T., Chuluunbaatar O., Ulziibayar V.* Accelerating the convergence of Newton-type iterations // J. Numer. Anal. Approx. Theory. 2017. V. 46. P. 162–180.
5. *Zhanlav T., Mijiddorj R., Otgondorj Kh.* Constructive theory of designing optimal eighth-order derivative-free methods for solving nonlinear equations // AM. J. Comput. Math. 2020. V. 10. P. 100–117.
6. *Petković L.D., Petković M.S., Neta B.* On optimal parameter of Laguerre's family of zero-finding methods // Inter. Jourmal of Comput. Math. 2018. V. 95. 692–707.
7. *Zhanlav T., Chuluunbaatar O., Otgondorj Kh.* A derivative-free families of optimal two-and three-point iterative methods for solving nonlinear equations // Comput. Math. Math. Phys. 2019. V. 59. P. 920–936.
8. *Wang X., Zhang T.* A new family of Newton-type iterative methods with and without memory for solving nonlinear equations // Calcolo 2014. V. 51. P. 1–15.
9. *Wang X.* A new accelerating technique applied to a variant of Cordero–Torregrosa method // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 330. P. 695–709.
10. *Petković M.S., Ilic S., Dzunić J.* Derivative-free two-point methods with and without memory for solving nonlinear equations // Appl. Math. Comput. 2010. V. 217. P. 1887–1895.
11. *Argyros I.K., Kansal M., Kanwar V., Bajaj S.* Higher-order derivative-free families of Chebyshev-Halley type methods with or without memory for solving nonlinear equations // Appl. Math. Comput. 2017. V. 315. P. 224–245.
12. *Lotfi T., Soleymani F., Ghorbanzadeh M., Assari P.* On the construction of some tri-parametric iterative methods with memory // Numer. Algor. 2015. V. 70. P. 835–845.
13. *Dzunić J.* On efficient two-parameter methods for solving nonlinear equations // Numer. Algor. 2013. V. 63. P. 549–569.
14. *Cordero A., Lotfi T., Bakhtiari P., Torregrosa J.R.* An efficient two-parametric family with memory for nonlinear equations // Numer. Algor. 2015. V. 68. P. 323–335.