ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 1, с. 47–56

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

УДК 519.642

ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ НА ОСНОВЕ РЕКОНСТРУКЦИИ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ АДАПТИВНОЙ КОРРЕКЦИИ СИГНАЛОВ

М. Л. Маслаков

199178 Санкт-Петербург, 11-я линия В.О., 66, АО “Российский институт мощного радиостроения”, Россия

e-mail: maslakovml@gmail.com

Поступила в редакцию 23.01.2020 г.
Переработанный вариант 10.07.2020 г.
Принята к публикации 18.09.2020 г.

Рассматривается адаптивная коррекция сигналов как решение обратной некорректной задачи. Данная задача сводится к интегральному уравнению типа свертки, а для его решения используется метод регуляризации. Для выбора параметра регуляризации предлагается осуществить реконструкцию регуляризированного решения. Представлены результаты численных экспериментов. Библ. 18. Фиг. 3.

Ключевые слова: некорректная задача, интегральное уравнение типа свертки, регуляризация, параметр регуляризации.

DOI: 10.31857/S0044466921010063

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается задача адаптивной коррекции частотно ограниченных информационных сигналов, передаваемых через нестационарные замирающие каналы связи (см. [1]). Данная задача сводится к решению интегрального уравнения типа свертки I рода (см. [2]), которое запишем в операторном виде

$$HS = U_\delta, \tag{1.1}$$

где $H \in R^{k\times m}$, $k \geq m$, – матрица коэффициентов импульсной характеристики канала, $S \in R^m$ – вектор отсчетов передаваемого сигнала, $U_\delta \in R^k$ – вектор отсчетов принятого сигнала.

Вектор U_δ представляет собой результат измерений на фоне белого гауссовского шума, т.е.

$$U_\delta = \bar{U} + \xi, \tag{1.2}$$

где $\bar{U}$ – точные значения вектора отсчетов принятого сигнала, ξ – аддитивный белый гауссовский шум с нулевым средним и дисперсией σ_ξ^2.

Матрица H состоит из коэффициентов импульсной характеристики канала $h(t)$ (см. [3]), причем

$$h(t) \equiv 0, \quad t \leq 0, \tag{1.3}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty. \tag{1.4}$$

Матрица H представляет собой циркулянтную матрицу $k \times m$ вида

$$H = \begin{bmatrix} h(t_1) & 0 & \cdots & 0 \\ h(t_2) & h(t_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ h(t_k) & & \ddots & h(t_1) \\ 0 & \ddots & & h(t_2) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & h(t_k) \end{bmatrix}, \tag{1.5}$$

где $h(t_k)$ – отсчеты импульсной характеристики $h(t)$.

Отметим, что на практике коэффициенты матрицы H получают из решения уравнения (1.1) путем передачи тестового сигнала и получении отклика на него (см. [4], [5]). Таким образом, H в общем случае является регуляризированным решением, а значит, $H \equiv H_\alpha$. В рамках рассматриваемой задачи полагаем

$$\max\left|\bar{H} - H\right| \le \delta_H, \tag{1.6}$$

где $\bar{H}$ – точные значения коэффициентов импульсной характеристики канала.

Точные оценки σ_ξ^2 и δ_H отсутствуют.

Для выбора параметра регуляризации применяют различные эвристические методы, описание и сравнительный анализ некоторых из них приводится, например, в [6]–[13]. Применение конкретного метода определяется особенностью постановки решаемой задачи.

В данной работе автором предлагается метод выбора параметра регуляризации путем реконструкции получаемого решения. Для этого предполагается осуществить поэлементную оценку регуляризированного решения и формирование опорных функций.

Статья организована следующим образом. В разд. 2 даны определение реконструированного регуляризированного решения и его свойства. В разд. 3 приведен метод выбора параметра регуляризации на основе реконструированного регуляризированного решения. При этом рассмотрены случаи точно известной и приближенной матрицы H. Результаты численного эксперимента представлены в разд. 4. Выводы по работе сформулированы в разд. 5.

2. РЕКОНСТРУКЦИЯ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОГО РЕШЕНИЯ

2.1. Получение реконструированного регуляризированного решения

Вектор передаваемого информационного сигнала S представляет собой отсчеты фазоманипулированного одночастотного сигнала вида (см. [14], [15])

$$s(t) = A\sum_{n=1}^{N}\cos\left(\omega_0 t + \varphi(n)\right) p(t-(n-1)T_{\text{sym}}), \quad t \in [0; NT_{\text{sym}}], \tag{2.1}$$

где N – количество передаваемых символов, A – амплитуда передаваемого сигнала, $\omega_0 = 2\pi f_0$ – несущая частота, $\varphi(n)$, $n = 1, 2, \ldots, N$ – фазы передаваемых символов, T_{sym} – длительность символа, $p(t)$ – импульсная функция вида

$$p(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; NT_{\text{sym}}], \\ 0, & t \notin [0; NT_{\text{sym}}]. \end{cases}$$

Введем оператор Y, осуществляющий операцию модуляции, т.е. формирующий сигнал (2.1) в соответствии с входным вектором $B = \{b(n)\}, n = 1, 2, \ldots, N$, состоящим из последовательности передаваемых информационных бит, т.е.

$$S = YB. \tag{2.2}$$

Последовательность фаз $\varphi(n)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, однозначно соответствует вектору B. При этом для различной позиционности фазовой модуляции (ФМ) определенному набору бит соответствуют строго определенные значения фаз (см. [15]):

$$b = \{0;1\} \Leftrightarrow \varphi = \{0;\pi\} \text{ – для двухпозиционной ФМ (BPSK)};$$

$$b = \{00;01;11;10\} \Leftrightarrow \varphi = \left\{0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2} \equiv -\frac{\pi}{2}\right\} \text{ – для четырехпозиционной ФМ (QPSK)};$$

и т.д. с учетом кода Грея (см. [16]).

Также, для удобства, будем полагать, что

$$T_{\text{sym}}F_s \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

где F_s – частота дискретизации.

Решение уравнения (1.1) осуществляется методом регуляризации (в работе использован метод регуляризации Тихонова из [12]). Соответствующее численное решение этого уравнения обозначим вектором $S(\alpha)$, зависящим от параметра регуляризации α.

Далее введем оператор Y^-, осуществляющий оптимальный когерентный прием, т.е. демодуляцию (см. [15], [16]). Данный оператор введен лишь для удобства последующей записи математических выражений. Описание (реализация) Y^- приведено в [5]. Тогда, осуществив демодуляцию регуляризированного решения уравнения (1.1), определяемого вектором $S(\alpha)$, получим последовательность бит $B(\alpha) = \{b(n,\alpha)\}$, $n = 1, 2, \ldots, N$, которая также будет зависеть от параметра α, т.е.

$$B(\alpha) = Y^-S(\alpha). \tag{2.4}$$

Тогда решение

$$S_Y(\alpha) = Y(Y^-S(\alpha)) \tag{2.5}$$

будем называть *реконструированным регуляризированным решением* уравнения (1.1).

2.2. Свойства реконструированного регуляризированного решения

Рассмотрим квадратичные нормы исходного вектора S, а также регуляризированных решений уравнения (1.1) – $S(\alpha)$ и $S_Y(\alpha)$:

$$E = \|S\|^2, \tag{2.6}$$

$$E(\alpha) = \|S(\alpha)\|^2, \tag{2.7}$$

$$E_Y(\alpha) = \|S_Y(\alpha)\|^2. \tag{2.8}$$

При этом для (2.7) и (2.8) имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} E(\alpha) = 0 \quad \text{(см., например, [11], [12])}, \tag{2.9}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} E_Y(\alpha) = E. \tag{2.10}$$

Последнее следует из выражения (2.1) с учетом допущения (2.3). Вообще говоря, для любого вектора B имеем

$$\|YB\|^2 = E. \tag{2.11}$$

Иными словами

$$E_Y(\alpha) \equiv \text{const} = E. \tag{2.12}$$

Отметим, что в случае сигналов BPSK соотношение (2.11) справедливо и без допущения (2.3).

Оптимальное значение параметра регуляризации, согласно [5], соответствует минимуму функционала, представляющего собой количество битовых (символьных) ошибок

$$q(\alpha) = \sum_{n=1}^{N} \left(b(n) \oplus b(n, \alpha) \right), \tag{2.13}$$

где $\oplus$ – знак сложения по модулю два.

При этом отметим, что информационная последовательность бит $b(n)$, $n = 1, 2, \ldots, N$, на практике неизвестна.

Очевидно, что в случае, когда существует такое $\alpha^* > 0$, при котором достигается минимум функционала (2.13)

$$q(\alpha^*) = 0, \tag{2.14}$$

имеет место

$$S_Y(\alpha^*) \equiv S. \tag{2.15}$$

Однако из [5] следует, что (2.14) не всегда выполняется, т.е. для $\forall \alpha > 0$ может быть, что

$$\min_{\alpha} q(\alpha) > 0. \tag{2.16}$$

В этом случае (2.15) выполняется только лишь на некоторых отрезках (интервалах) из $[0; NT_{\text{sym}}]$, т.е.

$$s_Y(t, \alpha) \equiv s(t), \quad [t_1; t_2] \cup [t_3; t_4] \cup [t_5; t_6] \ldots \in [0; NT_{\text{sym}}]. \tag{2.17}$$

Здесь $s_Y(t, \alpha)$ – фазоманипулированный сигнал, аналогичный (2.1), значения фаз которого соответствуют вектору $B(\alpha)$. Вектор $S_Y(\alpha)$ определяется отсчетами сигнала $s_Y(t, \alpha)$. Отметим, что интервалы $[t_k; t_{k+1}]$ кратны длительности символа T_{sym}.

3. ВЫБОР ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

3.1. Случай точно известных коэффициентов матрицы H

Пусть матрица коэффициентов импульсной характеристики канала известна точно, т.е. $\delta_H = 0$.

Обозначим приближенное представление реконструированного решения в форме

$$U_Y(\alpha) = HS_Y(\alpha), \tag{3.1}$$

при этом

$$\|U_Y(\alpha)\|^2 = E_{U_Y}(\alpha) > 0 \quad (\forall \alpha > 0). \tag{3.2}$$

Отметим, что в общем случае $E_{U_Y}(\alpha) \neq \text{const}$, в отличие от (2.12).

Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} r(\alpha) &= \|U_Y(\alpha) - U_\delta\|^2 = \|U_Y(\alpha) - \bar{U} + \bar{U} - U_\delta\|^2 = \\ &= \|U_Y(\alpha) - \bar{U}\|^2 + \|\bar{U} - U_\delta\|^2 + 2\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\|\|\bar{U} - U_\delta\|. \end{aligned} \tag{3.3}$$

С учетом (1.2) данное выражение примет вид

$$r(\alpha) = \|U_Y(\alpha) - \bar{U}\|^2 + \|\xi\|^2 + 2\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\|\|\xi\|. \tag{3.4}$$

Допустим, что (2.14) и, следовательно, (2.15) выполняется. В этом случае $U_Y(\alpha^*) \equiv \bar{U}$ и тогда выражение (3.5) преобразуется к виду

$$r(\alpha^*) = \|\xi\|^2 = \sigma_\xi^2. \tag{3.5}$$

Допустим, что выполняется условие (2.16) и, следовательно, имеет место (2.17). Значит, существуют такие интервалы $[t_1'; t_2'] \cup [t_3'; t_4'] \cup [t_5'; t_6']$, на которых выполняется

$$U_Y(\alpha) \equiv \bar{U}. \tag{3.6}$$

Отметим, что данные интервалы, вообще говоря, не равны интервалам из (2.17).

Обозначим объединение всех интервалов, на которых выполняется (3.6), как T_0, а где не выполняется – T_e. При этом

$$T_0 \cup T_e \equiv [0;k]. \tag{3.7}$$

Тогда $\forall\alpha > 0$ имеют место следующие утверждения:

$$\left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|^2_{T_0} = 0, \tag{3.8}$$

$$0 < \left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|^2_{T_e} \le \left\|2\bar{U}\right\|^2_{T_e}. \tag{3.9}$$

Утверждение (3.8) очевидно и следует из (3.6). Утверждение (3.9) следует из того, что в худшем случае

$$U_Y(\alpha) = -\bar{U}. \tag{3.10}$$

В результате выражение (3.4) преобразуется к виду

$$\begin{gathered} r(\alpha) = \left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|^2_{T_0\cup T_e} + \|\xi\|^2_{T_0\cup T_e} + 2\left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|_{T_0\cup T_e}\|\xi\|_{T_0\cup T_e} = \\ = \left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|^2_{T_e} + \|\xi\|^2 + 2\left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|_{T_e}\|\xi\| = \left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|^2_{T_e} + \sigma_\xi^2 + 2\left\|U_Y(\alpha) - \bar{U}\right\|_{T_e}\sigma_\xi. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Пусть для некоторого $\alpha_1 > 0$ $T_e^1 = [t_1';t_2']$, а для $\alpha_2 > 0$ $T_e^2 = [t_1';t_3']$. При этом $t_2' < t_3'$. Очевидно, что в этом случае

$$\left\|U_Y(\alpha_1) - \bar{U}\right\|^2_{T_e^1} < \left\|U_Y(\alpha_2) - \bar{U}\right\|^2_{T_e^2} \tag{3.12}$$

и, следовательно,

$$r(\alpha_1) < r(\alpha_2), \tag{3.13}$$

а значит, $\min r(\alpha)$ соответствует лучшему приближению $U_Y(\alpha)$ к $\bar{U}$ и в качестве оптимального значения параметра регуляризации можно взять

$$\alpha_{\text{opt}} = \arg\left(\min_\alpha r(\alpha)\right), \tag{3.14}$$

что также обеспечивает минимум функционала (2.13).

3.2. Случай приближенной матрицы H

Пусть матрица коэффициентов импульсной характеристики канала является регуляризированным приближенным решением H_α таким, что (1.6), $\delta_H > 0$ (δ_H – неизвестно). Как показано в [4], оптимальное значение параметра регуляризации для матрицы H_α (т.е. обеспечивающее лучшее приближение H_α к $\bar{H}$) равно оптимальному значению параметра регуляризации для решения исходного уравнения (1.1). При этом

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\|H_\alpha\| = 0, \tag{3.15}$$

а значит,

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\|U_Y(\alpha)\| = 0. \tag{3.16}$$

Допустим выполнение (2.14) и (2.15). Тогда

$$r(\alpha^*) = \left\|U_Y(\alpha^*) - U_\delta\right\|^2 = \left\|H_{\alpha^*}S_Y(\alpha^*) - U_\delta\right\|^2 = \left\|H_{\alpha^*}\bar{S} - U_\delta\right\|^2. \tag{3.17}$$

В этом случае (3.17) представляет собой невязку для регуляризированных коэффициентов матрицы H_α, свойства которой приведены в [11], [12]. Отличительной особенностью выражения (3.17) является то, что коэффициенты матрицы H_α получены при решении уравнения (1.1) в условиях другой реализации шумовой составляющей в U_δ.

Выражение (3.17) можно также представить в виде

$$r(\alpha^*) = \|H_{\alpha^*}\bar{S} - \bar{U} + \bar{U} - U_\delta\|^2 = \|H_{\alpha^*}\bar{S} - \bar{U}\|^2 + \|\bar{U} - U_\delta\|^2 - 2\|H_{\alpha^*}\bar{S} - \bar{U}\|\|\bar{U} - U_\delta\| = \\ = \|\vartheta(\alpha^*)\|^2 + \|\xi\|^2 - 2\|\vartheta(\alpha^*)\|\|\xi\|, \tag{3.18}$$

где $\vartheta(\alpha^*)$ – представляет собой “отбеленный” шум.

Причем $\vartheta(\alpha)$ и ξ – независимы. Рассмотрим подробнее $\|\vartheta(\alpha^*)\|^2$:

$$\|\vartheta(\alpha^*)\|^2 = \|H_{\alpha^*}\bar{S} - \bar{U}\|^2 = \|H_{\alpha^*}\bar{S} - \bar{H}\bar{S}\|^2 \le E\,\|H_{\alpha^*} - \bar{H}\|^2. \tag{3.19}$$

Лучшее приближение H_{α^*} обеспечит минимум $\|\vartheta(\alpha^*)\|$. При этом в [5] доказано, что условие (2.14) выполняется лишь в ограниченной области возможных значений $\{\alpha^*\}$, любое из которых будет являться оптимальным с точки зрения минимума функционала (2.13).

Пусть выполняется условие (2.16) и, следовательно, имеет место (2.17). При этом существуют интервалы T_0, на которых имеет место (3.19), т.е.

$$\|\vartheta(\alpha)\|^2_{T_0} = \|H_\alpha S_Y(\alpha) - \bar{U}\|^2_{T_0} = \|H_\alpha\bar{S} - \bar{U}\|^2_{T_0}, \tag{3.20}$$

а также интервалы T_e, на которых

$$\|\vartheta(\alpha)\|^2_{T_e} = \|H_\alpha S_Y(\alpha) - \bar{U}\|^2_{T_e}. \tag{3.21}$$

С учетом (3.16) имеют место следующие предельные соотношения:

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\|\vartheta(\alpha)\|^2_{T_0} = \|\bar{U}\|^2_{T_0}, \tag{3.22}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\|\vartheta(\alpha)\|^2_{T_e} = \|\bar{U}\|^2_{T_e}, \tag{3.23}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty}\|\vartheta(\alpha)\|^2 = \|\bar{U}\|^2 = E_U. \tag{3.24}$$

Свойства невязки $r(\alpha)$ приведены в [12], в частности,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} r(\alpha) = \|U_\delta\|^2 = E_{U_\delta}, \tag{3.25}$$

$$\lim_{\alpha\to0+} r(\alpha) = \mu^2, \tag{3.26}$$

где μ^2 – мера несовместности.

Кроме того, в рамках рассматриваемой задачи имеет место очевидное неравенство

$$\lim_{\alpha\to0+}\|r(\alpha)\|^2_{T_0} < \lim_{\alpha\to0+}\|r(\alpha)\|^2_{T_e}. \tag{3.27}$$

Таким образом, с учетом неравенства (3.12), из выражения $\|\bar{U} - U_\delta\|^2 = \|\xi\|^2 = \text{const}$ следует, что минимуму $\|\vartheta(\alpha)\|^2 = \|H_\alpha S_Y(\alpha) - \bar{U}\|^2$ соответствует минимум невязки $r(\alpha)$. А выбор α_{opt} из (3.14) обеспечивает минимум функционала (2.13).

3.3. Некоторые дополнительные замечания

Рассмотрим выбор параметра регуляризации по невязке для решения уравнения (1.1) в форме $S(\alpha)$ (см. [17]). С учетом принятых обозначений невязка есть

$$\hat{r}(\alpha) = \|HS(\alpha) - U_\delta\|^2. \tag{3.28}$$

Различные модификации данного подхода рассмотрены, например, в [13], как для случая $\delta_H = 0$, так и для случая $\delta_H \ne 0$ (но не в случае $H \equiv H_\alpha$).

Рассмотрим подробнее этот случай ($H \equiv H_\alpha$), имеющий место в рассматриваемой задаче коррекции сигналов. Тогда вместо (3.26) выражение для невязки примет вид

$$\tilde{r}(\alpha) = \|H_\alpha S(\alpha) - U_\delta\|^2. \tag{3.29}$$

В основном свойства невязки $\tilde{r}(\alpha)$ и ее предельные значения не отличаются от случаев $r(\alpha)$ и $\hat{r}(\alpha)$. Тем не менее имеются определенные различия.

1. $\exists\alpha_0 : \forall\alpha > \alpha_0$ выполняется неравенство

$$\|H_\alpha S(\alpha)\|^2 < \|H_\alpha S_Y(\alpha)\|^2. \tag{3.30}$$

Доказательство следует из того, что $\|H_\alpha\|^2$ и $\|S(\alpha)\|^2$ – монотонно не возрастающие функции (см. [12]). Однако для $\|S_Y(\alpha)\|^2$ при $\forall\alpha$ выполняется (2.12).

Тогда имеем

$$\|H_\alpha S(\alpha)\|^2 \le \|H_\alpha\|^2 \|S(\alpha)\|^2, \tag{3.31}$$

$$\|H_\alpha S_Y(\alpha)\|^2 \le \|H_\alpha\|^2 E. \tag{3.32}$$

С учетом (2.9) приходим к выводу, что найдется такое $\alpha_0 : \forall\alpha > \alpha_0$ имеет место неравенство

$$\|S(\alpha)\|^2 < E, \tag{3.33}$$

а значит, неравенство (3.30) также выполняется.

Аналогично можно доказать выполнение неравенства

$$\|\bar{H}S(\alpha)\|^2 < \|\bar{H}S_Y(\alpha)\|^2. \tag{3.34}$$

При этом отметим, что α_0 может быть ≥ 0.

2. Функция $\|H_\alpha S(\alpha)\|^2$ монотонно не возрастающая $\forall\alpha > 0$, однако функция $\|H_\alpha S_Y(\alpha)\|^2$ не является монотонной на интервале $[0;\alpha']$. Данное свойство менее очевидно и следует из того, что в общем случае для различных векторов B_1 и B_2: $B_1 \ne B_2$ имеет место

$$\|\bar{H}YB_1\|^2 \ne \|\bar{H}YB_2\|^2. \tag{3.35}$$

Следовательно, $\exists\alpha_1,\alpha_2 \in [0;\alpha'] : \alpha_1 < \alpha_2$, при которых

$$\|\bar{H}S_Y(\alpha_1)\|^2 < \|\bar{H}S_Y(\alpha_2)\|^2, \tag{3.36}$$

и, как следствие, имеем

$$\|H_{\alpha_1}S_Y(\alpha_1)\|^2 < \|H_{\alpha_2}S_Y(\alpha_2)\|^2. \tag{3.37}$$

Это приводит к тому, что зависимость невязки от параметра регуляризации может иметь несколько локальных минимумов.

4. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

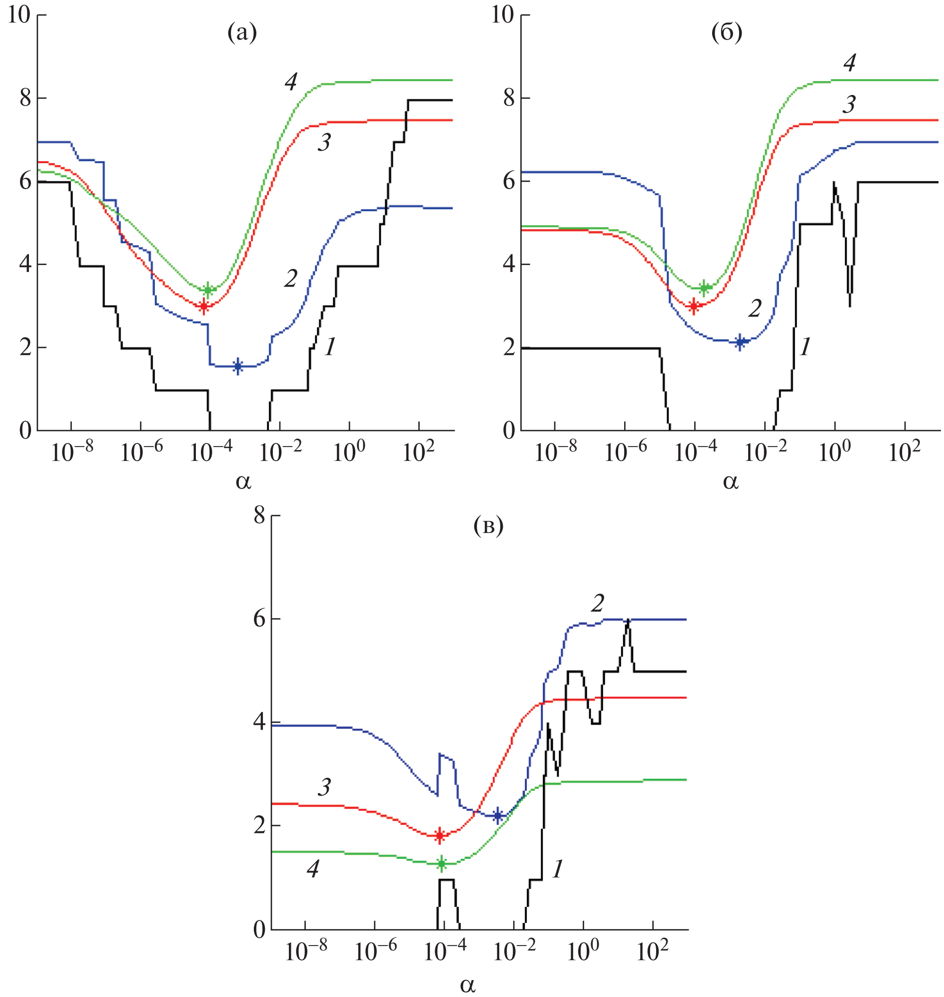
В данном разделе представлены результаты численного моделирования, демонстрирующие характерные свойства невязки при использовании реконструированного регуляризированного решения, а также эффективность предложенного метода выбора параметра регуляризации применительно к задаче адаптивной коррекции сигналов.

В качестве модели канала (функции $h(t)$) использована модель Ваттерсона (см. [18]), применяемая при моделировании коротковолновых каналов связи. При моделировании выбраны следующие параметры модели канала: 2 луча, интервал между лучами 2 мс, замирания каждого луча по закону Рэлея, используемая полоса частот 0/3–3/4 кГц. Параметры передаваемого сигнала: несущая частота сигнала $\omega_0 = 2\pi f_0$ при $f_0 = 1.8$ Гц; длительность символа $T_{\text{sym}} = 0.625$ мс. Частота дискретизации 16 кГц.

На фиг. 1 представлены характерные зависимости функционала $q(\alpha)$, невязок $r(\alpha)$, $\tilde{r}(\alpha)$, а также $\bar{r}(\alpha)$, определяемой из выражения

$$\bar{r}(\alpha) = \|\bar{H}S(\alpha) - U_\delta\|^2. \tag{4.1}$$

Отметим, что представленные на фиг. 1 зависимости $r(\alpha)$, $\tilde{r}(\alpha)$ и $\bar{r}(\alpha)$ для наглядности были нормированы.



Фиг. 1. Характерный вид зависимостей, полученных при ОСШ 5 дБ: $q(\alpha)$ (черная *1*); $r(\alpha)$ (синяя *2*); $\tilde{r}(\alpha)$ (красная *3*); $\overline{r}(\alpha)$ (зеленая *4*).

Значения минимумов для зависимостей на фиг. 1а, б отмечены знаком *.

Дополнительно для демонстрации свойств 1, 2 на фиг. 2 приведены соответствующие зависимости $\|H_\alpha S_Y(\alpha)\|^2$, $\|H_\alpha S(\alpha)\|^2$ и $\|\overline{H}S(\alpha)\|^2$.

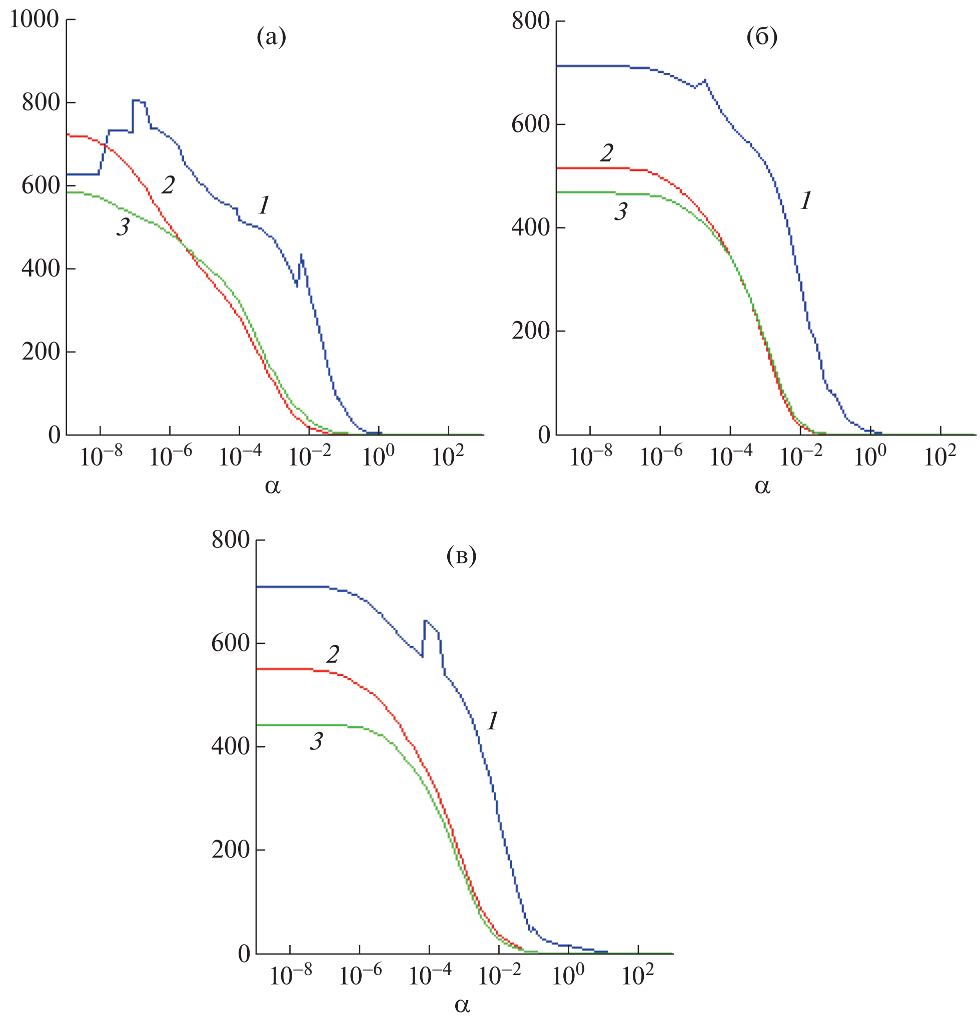
Для демонстрации эффективности применения предложенного метода выбора параметра регуляризации проведен эксперимент и получены зависимости вероятности ошибки на бит от ОСШ. Вероятность ошибки на бит определяется из выражения

$$P = \frac{1}{LN}\sum_{l=1}^{L} q(l, \hat{\alpha}_l), \tag{4.2}$$

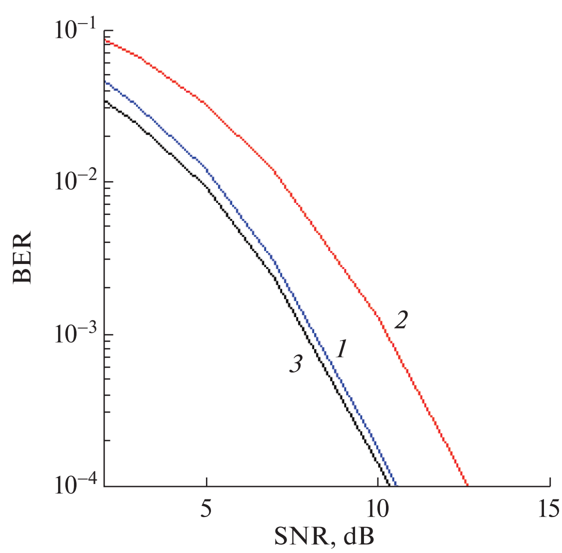
где L – объем выборки, $q(l, \hat{\alpha}_l)$ – число ошибок в l-м эксперименте, $\hat{\alpha}_l$ – выбранное значение параметра регуляризации.

При моделировании были заданы параметры $L = 20\,000$, $N = 15$. Обозначим вероятности ошибки на бит следующим образом: P – при выборе параметра регуляризации предлагаемым методом; $\tilde{P}$ – при выборе параметра регуляризации по невязке, определяемой из выражения (3.29).

Нижняя граница на фиг. 3 получена экспериментально при условии, что последовательность $b_m(n)$, $n = 1, 2,, \ldots, N$, известна точно в каждом из M опытов.



Фиг. 2. Зависимости $\|H_\alpha S_Y(\alpha)\|^2$ (синяя *1*), $\|H_\alpha S(\alpha)\|^2$ (красная *2*), $\|\bar{H}S(\alpha)\|^2$ (зеленая *3*).



Фиг. 3. Зависимости вероятности ошибки на бит от ОСШ (SNR): P (синяя *1*), $\tilde{P}$ (красная *2*), нижняя граница (черная *3*).

Эффективность предложенного метода обусловлена следующим. Представим регуляризированное решение уравнения (1.1) в форме

$$S(\alpha) = \bar{S} + \eta(\alpha), \tag{4.3}$$

где $\eta(\alpha)$ назовем погрешностью (или ошибкой) вычисления, при этом

$$\|\eta(\alpha)\|^2 > 0. \tag{4.4}$$

Аналогично, для реконструированного регуляризированного решения

$$S_Y(\alpha) = \bar{S} + \eta_Y(\alpha). \tag{4.5}$$

При этом из свойства (2.17) следует, что существуют такие интервалы $\hat{T}_0$, на которых

$$\|\eta_Y(\alpha)\|^2_{\hat{T}_0} \equiv 0, \tag{4.6}$$

а значение нормы ошибки вычисления $\|\eta_Y(\alpha)\|^2_{\hat{T}e}$ тем меньше, чем меньше суммарная длительность интервала $|\hat{T}_e|$, что и соответствует минимуму функционала (2.13). При этом в ряде случаев может быть, что $|\hat{T}_e| = 0$, и соответственно $\|\eta_Y(\alpha)\|^2 \equiv 0$ на всей длительности сигнала, т.е. $\hat{T}_0 = [0; NT_{\text{sym}}]$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычислительные эксперименты подтвердили применимость и эффективность предложенного метода выбора параметра регуляризации на основе реконструкции регуляризированного решения в задаче адаптивной коррекции сигналов. Данный метод не требует знания или получения оценок о погрешности правой части уравнения (1.1) и оценки ошибки вычисления матрицы H_α. Однако требуется априорное знание определенных характеристик искомого решения S для получения оценок элементов функции $s(t)$, необходимых для формирования опорных функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eleftheriou E., Falconer D.* Adaptive equalization techniques for HF channels // IEEE J.l on Selected Areas in Communicat. 1987. V. 5. I. 2. P. 238–247.
2. *Santamarina J.C., Fratta D.* Discrete Signals and Inverse Problems. John Wiley & Sons, Ltd, 2005.
3. *Haykin S.* Adaptive Filter Theory. 5-th ed. Boston: Pearson, 2014.
4. *Маслаков М.Л.* Применение двухпараметрических стабилизирующих функций при решении интегрального уравнения типа свертки методом регуляризации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 4. С. 541–549.
5. *Маслаков М.Л.* Выбор параметра регуляризации в задачах адаптивной фильтрации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 6. С. 951–560.
6. *Bauer F., Lukas M.A.* Comparing parameter choice methods for regularization of ill-posed problem // Math. Comput. Simul. 2011. V. 81. I. 9. P. 1795–1841.
7. *Hansen P.C.* Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems, SIAM, Philadelphia, 1998.
8. *Lu S., Pereverzev S.V.* Regularization Theory for Ill-posed Problems. De Gruyter, Berlin, 2013.
9. *Hochstenbach M.E., Reichel L., Rodriguez G.* Regularization parameter determination for discrete ill-posed problems // J. Comput. Appl. Math. 2015. V. 273. P. 132–149.
10. *Hamarik U., Palm R., Raus T.* A family of rules for parameter choice in Tikhonov regularization of ill-posed problems with inexact noise level // J. Comput. Appl. Math. 2012. V. 236. P. 2146–2157.
11. *Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Обобщенный принцип невязки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13. № 2. С. 294–302.
12. *Тихонов А.Н., Гончарсикй А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990.
13. *Сизиков В.С.* О способах невязки при решении некорректных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 9. С. 1294–1312.
14. *Johnson E.E., Koski E., Furman W.N., Jorgenson M., Nieto J.* Third-Generation and Wideband HF Radio Communications. Artech House, Inc, Boston, 2013.
15. *Xiong F.* Digital Modulation Techniques, Second Edition. Artech House, Inc, Boston, 2006.
16. *Proakis J.G., Salehi M.* Digital Communications, Fifth Edition. New York: McGraw-Hill, 2008.
17. *Морозов В.А.* О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. № 2. С. 295–309.
18. *Watteson C.C., Juroshek J.R., Bensema W.D.* Experimental Confirmation of an HF Channel Model // IEEE Transact. Communicat. Technology. 1970. V. COM-18. № 6. P. 792–803.