ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 1, с. 85–94

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТРЕХМЕРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛАХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ[1)]

А. Б. Самохин[1,*], Ю. Г. Смирнов[2]

[1] 119454 Москва, пр-т Вернадского, 78, МИРЭА, Российский технологический университет, Россия

[2] 440026 Пенза, ул. Красная, 40, Пензенский государственный университет, Россия

*e-mail: absamokhin@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.03.2020 г.
Переработанный вариант 26.07.2020 г.
Принята к публикации 18.09.2020 г.

Доказаны теоремы о единственности решения уравнений Максвелла для задач рассеяния электромагнитных волн на ограниченных трехмерных неоднородных анизотропных телах, в том числе без потерь и с разрывами параметров среды. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений объемных сингулярных интегральных уравнений, отвечающих задачам рассеяния электромагнитных волн на ограниченных трехмерных неоднородных анизотропных телах, в том числе без потерь и с разрывами параметров. Библ. 14.

Ключевые слова: задачи рассеяния электромагнитных волн, уравнения Максвелла, среды без потерь, анизотропные среды, объемные сингулярные интегральные уравнения.

DOI: 10.31857/S0044466921010075

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы существования и единственности решения задач рассеяния электромагнитных волн на ограниченных диэлектрических трехмерных телах Q, находящихся в свободном пространстве, имеют большое значение как с теоретической, так и с практической точек зрения. Как правило, при доказательстве единственности используются уравнения Максвелла с соответствующими условиями сопряжения и условием излучения на бесконечности. Для доказательства существования решения исходная задача сводится к интегральному уравнению. Тогда, если оператор интегрального уравнения является фредгольмовым в соответствующем функциональном пространстве, доказательство завершается и формулируется теорема существования и единственности решения. По такой схеме были доказаны теоремы для следующих классов задач рассеяния:

– неоднородная среда характеризуется гладкой во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ скалярной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x)$ или тензор-функцией диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$, а магнитная проницаемость всюду постоянна, при этом среда в Q может не иметь потерь (см. [1]–[3]);

– неоднородная среда характеризуется всюду гладкими в $\mathbb{R}^3$ тензор-функциями диэлектрической $\hat{\varepsilon}(x)$ и магнитной $\hat{\mu}(x)$ проницаемостями, при этом среда в Q может не иметь потерь (см. [4], [5]);

– область неоднородности является поглощающей, при этом тензор-функции $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ могут иметь разрывы, в том числе на границе Q (см. [4], [5]).

Случай, когда область неоднородности среды не имеет потерь, а параметры среды являются разрывными, в том числе на ∂Q, является наиболее сложным. Результаты в этом направлении получены в [6]–[9]. В [6] доказана теорема о единственности решения задачи рассеяния в обоб-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект № 20-11-20087).

щенной постановке (условия сопряжения на границе тела не ставятся) в анизотропной среде, которая характеризуется вещественными тензор-функциями $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$, имеющими разрывы, в частности, на ∂Q. В [7]–[9] доказана теорема о существовании и единственности решения задачи рассеяния на изотропном теле, которое характеризуется вещественной функцией диэлектрической проницаемости $\varepsilon(x) > 0$, также имеющей разрывы на ∂Q.

В настоящей работе доказаны теоремы единственности решения задач рассеяния в классической постановке (с условиями сопряжения на границе тел) на анизотропных телах, в том числе без потерь и имеющих разрывы параметров – диэлектрической и магнитной проницаемостей. Предложенный метод доказательства является оригинальным и отличается от используемых в перечисленных выше работах. Также доказаны теоремы о существовании и единственности решения системы объемных сингулярных интегральных уравнений, к которой сводится исходная краевая задача.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Q – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$. Будем предполагать, что граница ∂Q области Q кусочно-гладкая (точное определение см. в [10]).

Будем рассматривать следующий класс задач электродинамики. В области Q среда характеризуется тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ (матрицы-функции размерности 3 × 3), причем компоненты этих тензоров являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат. Точнее, пусть область Q состоит из конечного числа подобластей Q_i с кусочно-гладкой границей ∂Q_i; $\overline{Q} = \bigcup_i \overline{Q}_i$, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Предположим, что $\hat{\varepsilon} \in C^3(\overline{Q_i})$, $\hat{\mu} \in C^3(\overline{Q_i})$ для всех i. Точнее, будем предполагать, что $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ являются сужениями на Q_i функций, заданных на более широком множестве, т.е. $\hat{\varepsilon}(x) = \hat{\varepsilon}_i(x)$, $\hat{\mu}(x) = \hat{\mu}_i(x)$ при $x \in Q_i$, $\hat{\varepsilon}_i \in C^3(\overline{B})$, $\hat{\mu}_i \in C^3(\overline{B})$, где B – (открытый) шар, содержащий Q, $\overline{Q} \subset B$. На ∂Q_i будем определять только предельные значения функций $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ с разных сторон в точках гладкости поверхности.

Вне области Q (в $\mathbb{R}^3 \backslash \overline{Q}$) среда изотропна с постоянными параметрами, $\varepsilon = \varepsilon_0$ и $\mu = \mu_0$. Требуется определить электромагнитное поле, возбуждаемое в данной среде внешним полем с временной зависимостью в виде множителя $\exp(-i\omega t)$, источником которого может быть как падающая плоская волна, так и сторонний ток $\vec{J}^0$.

В такой постановке соответствующая математическая задача формулируется следующим образом: найти векторные непрерывно дифференцируемые в Q_i и вне $\overline{Q}$ функции электромагнитного поля, удовлетворяющие в областях гладкости параметров среды уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E} + \mathbf{J}^0, \quad \operatorname{rot} \mathrm{E} - i\omega\hat{\mu}\mathbf{H} \tag{1}$$

и условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial u}{\partial r} - ik_0 r u\right) = 0, \quad r := |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \tag{2}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, ($\operatorname{Im}\varepsilon_0 = 0$, $\operatorname{Im}\mu_0 = 0$, $\operatorname{Re}\varepsilon_0 > 0$, $\operatorname{Re}\mu_0 > 0$), а u – любая из декартовых компонент полей $\mathbf{E}$ или $\mathbf{H}$. В (1) $\mathbf{J}^0$ – заданный электрический ток, создающий внешнее поле $\mathbf{E}^0$, $\mathbf{H}^0$. Далее, на гладких частях поверхностей разрыва проницаемостей ∂Q_i функции $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны быть непрерывны вплоть до ∂Q_i (с каждой стороны) и удовлетворять условию непрерывности тангенциальных компонент полей:

$$[\mathbf{E}_\tau]\big|_{\partial Q_i} = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau]\big|_{\partial Q_i} = 0, \tag{3}$$

где $[\cdot]_{\partial Q_i}$ означает разность следов с разных сторон ∂Q_i, τ – касательный вектор к ∂Q_i. Мы не будем вводить новые обозначения именно для гладких частей ∂Q_i, а будем в случае необходимости оговаривать особо это обстоятельство.

Кроме того, поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ должны удовлетворять условию ограниченности энергии в любом конечном объеме пространства, т.е. условию

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3). \tag{4}$$

Решения задачи (1)–(4) будем называть *классическими*.

2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Для большей прозрачности доказательств сначала рассмотрим задачу, для которой магнитная проницаемость всюду постоянна и равна μ_0. В этом разделе предположим, что $\hat{\varepsilon}(x) = \varepsilon(x)$ – скалярная функция, $\operatorname{Re}\varepsilon_i(x) > 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_i(x) \geq 0$.

Однородные уравнения Максвелла для такой задачи имеют вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu_0\mathbf{H}. \tag{5}$$

С помощью леммы Реллиха, используя условия на бесконечности (2), стандартным способом доказывается (см. [6]–[9]), что в области $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$ электромагнитное поле, удовлетворяющее (2)–(5), равно нулю. Тогда из (5), учитывая теорему Стокса, следует, что тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на ∂Q равны нулю.

Рассмотрим однородную задачу (2)–(5). Обозначим эту задачу через А. Предположим, что в области Q электромагнитное поле не равно тождественно нулю. Не ограничивая общности, можно считать, что во всех подобластях Q_i (для всех i) поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ не равно тождественно нулю. Действительно, в противном случае области Q_i, в которых поля тождественно равны нулю, можно исключить из Q и рассмотреть задачу в оставшейся части Q с теми же граничными условиями.

Определим функцию-срезку со следующими свойствами: $\zeta(t;a,b) \in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, $0 \leq \zeta(t;a,b) \leq 1$, $\zeta(t;a,b) = 1$ при $t \leq a$, $\zeta(t;a,b) = 0$ при $t \geq b$, $\zeta(t;a,b) > 0$ при $a < t < b$ $(0 < a < b)$. Пусть шар B, содержащий Q (см. разд. 1), имеет центр в $x_0 \in Q$ и радиус $2d$, где d – диаметр области Q, т.е. максимальное расстояние между точками границы ∂Q. Определим функции $\varepsilon_i^c(x) := (\varepsilon_i(x) - \varepsilon_0)\zeta(|x - x_0|; d, 2d) + \varepsilon_0$. Из свойств функции-срезки следует, что $\varepsilon_i^c \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\varepsilon_i^c(x) = \varepsilon(x)$ при $x \in Q_i$, $\varepsilon_i^c(x) = \varepsilon_0$ при $x \notin B$. Кроме того, записывая функцию в виде $\varepsilon_i^c(x) = \varepsilon_i(x)\zeta(|x - x_0|; d, 2d) + \varepsilon_0(1 - \zeta(|x - x_0|; d, 2d))$, получаем, что если $\operatorname{Re}\varepsilon_i(x) > 0$, то и $\operatorname{Re}\varepsilon_i^c(x) > 0$ при $x \in B$.

Так как, по предположению, для задачи А во всех подобластях Q_i поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ не равно тождественно нулю, то найдется такое j, что $\partial Q_j \cap \partial Q \neq \varnothing$, т.е. у Q_j и Q имеется общий гладкий кусок границы.

Теперь рассмотрим вспомогательную задачу С. Задача С описывается уравнениями (2)–(5), в которых диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^c(x)$ в области Q совпадает с диэлектрической проницаемостью из задачи А, а вне области Q диэлектрическая проницаемость $\varepsilon^c(x)$ равна $\varepsilon_j^c(x)$ для указанного выше j.

Теперь опишем множество решений задачи С. Поскольку $\varepsilon_j^c(x) = \varepsilon_0$ при $x \notin B$, то, аналогично изложенному выше, получим, что в области $\mathbb{R}^3\backslash\overline{B}$ электромагнитное поле равно нулю. Обозначим $Q^j := Q\backslash\overline{Q_j}$. Из построения функции $\varepsilon_j^c(x)$ следует, что $\varepsilon_j^c \in C^3(\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j})$. Тогда из однородных уравнений (5) следует уравнение относительно электрического поля в области $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j}$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} - \varepsilon_j^c\mu_0\omega^2\mathbf{E} = 0. \tag{6}$$

Далее, поскольку $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$, из первого уравнения (5) следует, что $\operatorname{div}(\varepsilon_j^c\mathbf{E}) = 0$, поэтому получим

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_j^c}(\operatorname{grad}\varepsilon_j^c, \mathbf{E}), \tag{7}$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение векторов. Теперь из (6), (7), учитывая тождество $\operatorname{rot}\operatorname{rot} = -\Delta + \operatorname{grad}\operatorname{div}$, получаем следующее уравнение:

$$\Delta\mathbf{E} + \operatorname{grad}\frac{1}{\varepsilon_j^c}(\operatorname{grad}\varepsilon_j^c, \mathbf{E}) + \varepsilon_j^c\mu_0\omega^2\mathbf{E} = 0. \tag{8}$$

Поскольку $\varepsilon_j^c(x) \neq 0$, то уравнение (8) является эллиптическим в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j}$. Далее, все коэффициенты уравнения (8) являются функциями из $C^2(\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j})$. Поэтому можно применить принцип продолжения решения уравнения (8) по непрерывности (см. [1], [12], [13]) из области $\mathbb{R}^3\backslash\overline{B}$ в область $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j}$. Учитывая, что в области $\mathbb{R}^3\backslash\overline{B}$ поле $\mathbf{E} \equiv 0$, получаем, что в области $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j}$ поле $\mathbf{E} \equiv 0$ и (как следует из второго уравнения (5)) $\mathbf{H} \equiv 0$. Значит, электромагнитное поле в подобласти Q_j равно нулю, и из условий сопряжения (3) следует, что тангенциальные компоненты полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на ∂Q равны нулю.

Далее, электромагнитное поле в задачах A и C удовлетворяет одним и тем же уравнениям (5) в области Q и одинаковым граничным условиям на ∂Q (тангенциальные компоненты электрического и магнитного полей на ∂Q равны нулю). Поэтому множества решений задач A и C совпадают в области Q. Но решение задачи C в области Q_j только тривиальное, что противоречит нетривиальности решения задачи A в этой же области.

Таким образом, из изложенного выше следует

Теорема 1. *Пусть область Q состоит из конечного числа подобластей Q_i с кусочно-гладкой границей ∂Q_i; $\overline{Q} = \bigcup_i \overline{Q}_i$, $Q_i \cap Q_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Предположим, что $\mu = \mu_0$ в $\mathbb{R}^3$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$, а $\varepsilon(x)$ в Q задается сужениями на Q_i функций $\varepsilon_i \in C^3(\overline{B})$ ($\varepsilon(x) = \varepsilon_i(x)$ при $x \in Q_i$), где B – (открытый) шар, содержащий Q, $\overline{Q} \subset B$. Пусть $\operatorname{Re}\varepsilon_i(x) > 0$, $\operatorname{Im}\varepsilon_i(x) \geq 0$ в B. Тогда задача* (2)–(5) *имеет только тривиальное решение.*

Аналогично можно получить теорему единственности для изотропных магнитодиэлектрических сред.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Теперь рассмотрим анизотропный случай. Наложим следующие ограничения на тензор-функции $\hat{\varepsilon}_i(x)$ и $\hat{\mu}_i(x)$ в области B, которые определяют значения $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ в области Q. Будем полагать, что эрмитовы тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x) + \hat{\varepsilon}_i^*(x))/2$ и $(\hat{\mu}_i(x) + \hat{\mu}_i^*(x))/2$ положительно определены (аналог условия $\operatorname{Re}\varepsilon_i(x) > 0$, $\operatorname{Re}\mu_i(x) > 0$ для изотропной среды); тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x) - \hat{\varepsilon}_i^*(x))/(2i)$ и $(\hat{\mu}_i(x) - \hat{\mu}_i^*(x))/(2i)$ неотрицательно определены (аналог условия $\operatorname{Im}\varepsilon_i(x)$, $\operatorname{Im}\mu_i(x) \geq 0$ для изотропной среды); $\hat{\varepsilon}_i, \hat{\mu}_i \in C^3(\overline{B})$. Символ * обозначает сопряженный тензор, т.е. транспонированный тензор с комплексно-сопряженными элементами.

Будем рассматривать однородные уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -i\omega\hat{\varepsilon}\mathbf{E}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\hat{\mu}\mathbf{H} \tag{9}$$

и соответственно краевую задачу (2)–(4), (9). Доказательство единственности решения задачи проводится по той же схеме, что и в разд. 2, поэтому остановимся только на отличиях анизотропного случая от изотропного.

Снова рассматриваются задачи A и C с заменой ε и μ на $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$. Построение тензоров $\hat{\varepsilon}^c$ и $\hat{\mu}^c$ для задачи C такое же, как и в разд. 2, т.е. с использованием функции-срезки:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}^c(x) &:= (\varepsilon_j(x) - \varepsilon_0)\zeta\left(|x - x_0|; d, 2d\right)\hat{I} + \varepsilon_0\hat{I},\\ \hat{\mu}^c(x) &:= (\mu_j(x) - \mu_0)\zeta\left(|x - x_0|; d, 2d\right)\hat{I} + \mu_0\hat{I}.\end{aligned} \tag{10}$$

Из [2], [11] следует, что уравнения (9) в области гладкости $\hat{\varepsilon}^c$ и $\hat{\mu}^c$ сводятся в декартовой системе координат к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\varepsilon_{lm}\frac{\partial^2 E_k}{\partial x_l \partial x_m}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_l}E_m\right)+\frac{\partial \varepsilon_{lm}}{\partial x_k}\frac{\partial E_m}{\partial x_l}+i\omega\varepsilon_{lm}L_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_l}(\mu_{np}H_p)=0, \quad k=1,2,3,\\ \mu_{lm}\frac{\partial^2 H_k}{\partial x_l \partial x_m}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial \mu_{lm}}{\partial x_l}H_m\right)+\frac{\partial \mu_{lm}}{\partial x_k}\frac{\partial H_m}{\partial x_l}-i\omega\mu_{lm}L_{kmn}\frac{\partial}{\partial x_l}(\varepsilon_{np}E_p)=0, \quad k=1,2,3,\end{gathered} \tag{11}$$

где ε_{lm} и μ_{lm} – компоненты тензоров $\hat{\varepsilon}^c$ и $\hat{\mu}^c$. В (11) используется правило суммирования по повторяющимся индексам, а L_{kmn} – символ Леви–Чивита, который определяется формулой

$$L_{kmn}=\begin{cases}1, & \text{если} \quad kmn=123,\,231,\,312,\\ -1, & \text{если} \quad kmn=321,\,213,\,132,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Из уравнений (11) следует, что детерминант главного символа дифференциального оператора определяется формулой

$$\det P^0(\xi)=\left[\sum_{l,m=1}^{3}\varepsilon_{lm}\xi_l\xi_m\right]^3\left[\sum_{l,m=1}^{3}\mu_{lm}\xi_l\xi_m\right]^3.$$

Поскольку $(\hat{\varepsilon}_i(x)+\hat{\varepsilon}_i^*(x))$ и $(\hat{\mu}_i(x)+\hat{\mu}_i^*(x))$ положительно определены, то получим, что $\det P^0(\xi)\neq 0$ при $|\xi|\neq 0$ в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j}$. Значит, система уравнений (11) является эллиптической в этой области. Далее, все коэффициенты в (11) являются дифференцируемыми функциями в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q^j}$. Поэтому можно применить принцип продолжения решения уравнений (11) по непрерывности (см. [12], [13]). Дальнейшие рассуждения повторяют аналогичные из разд. 2. Из изложенного выше следует

Теорема 2. *Пусть область Q состоит из конечного числа подобластей Q_i с кусочно-гладкой границей ∂Q_i; $\overline{Q}=\bigcup_i \overline{Q}_i$, $Q_i\cap Q_j=\varnothing$ при $i\neq j$. Предположим, что $\hat{\varepsilon}=\varepsilon_0\hat{I}$ $\hat{\mu}=\mu_0\hat{I}$ в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$, а $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ в Q задаются сужениями на Q_i функций $\hat{\varepsilon}_i\in C^3(\overline{B})$ и $\hat{\mu}_i\in C^3(\overline{B})$ ($\hat{\varepsilon}(x)=\hat{\varepsilon}_i(x)$ и $\hat{\mu}(x)=\hat{\mu}_i(x)$ при $x\in Q_i$), где B – (открытый) шар, содержащий Q, $\overline{Q}\subset B$. Пусть эрмитовы тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x)+\hat{\varepsilon}_i^*(x))/2$ и $(\hat{\mu}_i(x)+\hat{\mu}_i^*(x))/2$ положительно определены, а тензор-функции $(\hat{\varepsilon}_i(x)-\hat{\varepsilon}_i^*(x))/(2i)$ и $(\hat{\mu}_i(x)-\hat{\mu}_i^*(x))/(2i)$ неотрицательно определены в B. Тогда задача* (2)–(4), (9) *имеет только тривиальное решение.*

4. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать задачи в анизотропной среде, которые удовлетворяют условиям теоремы 2. Рассматриваемые задачи могут быть сведены к системе объемных сингулярных интегральных уравнений относительно электромагнитного поля в области Q (см. [3]–[5]):

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(x)+\frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x)-\hat{I})\mathbf{E}(x)-p.v.\int_Q((\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\mathbf{E}(y),\operatorname{grad})\operatorname{grad}G(R)dy-k_0^2\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\mathbf{E}(y)G(R)dy-\\ -i\omega\mu_0\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\mathbf{H}(y)\times\operatorname{grad}G(R)dy=\mathbf{E}^0(x), \quad x\in Q,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}(x)+\frac{1}{3}(\hat{\mu}_r(x)-\hat{I})\mathbf{H}(x)-p.v.\int_Q((\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\mathbf{H}(y),\operatorname{grad})\operatorname{grad}G(R)dy-k_0^2\int_Q(\hat{\mu}_r(y)-\hat{I})\mathbf{H}(y)G(R)dy+\\ +i\omega\varepsilon_0\int_Q(\hat{\varepsilon}_r(y)-\hat{I})\mathbf{E}(y)\times\operatorname{grad}G(R)dy=\mathbf{H}^0(x), \quad x\in Q.\end{gathered} \tag{13}$$

В (12), (13) $\hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0$, $\hat{\mu}_r = \hat{\mu}/\mu_0$; G – функция Грина (фундаментальное решение) для уравнения Гельмгольца

$$G(R) = \frac{\exp(ik_0R)}{4\pi R}, \tag{14}$$

где $R = |x - y|$; $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$, $\times$ – векторное произведение. $\mathbf{E}^0$ и $\mathbf{H}^0$ – внешнее электромагнитное поле, создаваемое сторонним током $\mathbf{J}^0$ и удовлетворяющее уравнениям Максвелла для свободного пространства

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}^0 = -i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}^0 + \mathbf{J}^0, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E}^0 = i\omega\mu_0\mathbf{H} \tag{15}$$

и условию излучения на бесконечности. Если источником поля является плоская волна, то в (15) $\mathbf{J}^0 = 0$.

Для ответа на вопрос о существовании решения рассматриваемых задач необходимо выбрать подходящее для анализа функциональное пространство. Интегралы от квадрата модуля комплексных амплитуд электромагнитного поля присутствуют в законе сохранения энергии. Значит, можно полагать, что пространство интегрируемых с квадратом вектор-функций является наиболее “физичным” для исследования интегральных уравнений задач электромагнитного рассеяния. Ниже будем использовать гильбертово пространство шестимерных вектор-функций $\mathbf{L}_2(Q)$ со скалярным произведением, определяемым формулой

$$(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \int\limits_Q \vec{U}(x)\mathbf{V}^*(x)dx.$$

Отметим, что оператор уравнений (12), (13) определен в $\mathbf{L}_2(Q)$ (см. [4], [5]).

Систему уравнений (12), (13) можно записать в эквивалентной форме, в виде интегродифференциальных уравнений (см. [4]):

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(x) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)dy - k_0^2\int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)dy - \\ - i\omega\mu_0\operatorname{rot}\int\limits_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q,\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}(x) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)dy - k_0^2\int\limits_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)dy + \\ + i\omega\varepsilon_0\operatorname{rot}\int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)dy = \vec{H}^0(x), \quad x \in Q.\end{gathered} \tag{17}$$

Выражения (16), (17) справедливы и при $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$. В этом случае они являются интегральными представлениями и определяют электромагнитное поле вне области Q по найденному значению полей в Q. Отметим, что, поскольку $\hat{\varepsilon}_r(x) = \hat{I}$, $\hat{\mu}_r(x) = \hat{I}$, $x \in \mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$, то в этой области интегральные представления полей (16), (17) не будут иметь сингулярности.

Для существования и единственности решения уравнений (16), (17) в $\mathbf{L}_2(Q)$ достаточно, чтобы оператор уравнений был фредгольмов и однородные уравнения имели только тривиальное решение в этом пространстве функций.

Рассмотрим сначала вопрос о единственности решения уравнений (16), (17). Непосредственное использование теоремы 2 затруднительно, поскольку пространство функций из $\mathbf{L}_2$ шире класса функций, описывающих классические решения уравнений Максвелла. Для применения теоремы 2 необходимо получать результаты о гладкости решений интегральных уравнений (см. [14]). Мы же для доказательства единственности решения системы (16), (17) будем использовать идеи, описанные в разд. 2 и 3.

Рассмотрим однородные уравнения (16), (17):

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(x) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)dy - k_0^2\int\limits_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)dy - \\ - i\omega\mu_0\operatorname{rot}\int\limits_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)dy = 0, \quad x \in Q,\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}(x) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)dy - k_0^2\int_Q G(R)(\hat{\mu}_r(y) - \hat{I})\mathbf{H}(y)dy + \\ + i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}\int_Q G(R)(\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y)dy = 0, \quad x \in Q.\end{gathered} \tag{19}$$

Предположим, что в области Q решение $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ уравнений (18), (19) не равно тождественно нулю. Обозначим эту систему уравнений через A1. Не ограничивая общности, можно считать, что во всех подобластях Q_i (для всех i) решение $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ не равно тождественно нулю. Действительно, в противном случае области Q_i, в которых решения тождественно равны нулю, исключим из Q и рассмотрим интегральные уравнения в оставшейся части Q. Так как во всех Q_i поле $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ не равно тождественно нулю, то найдется такое j, что $\partial Q_j \cap \partial Q \neq \varnothing$, т.е. у Q_j и Q имеется общий гладкий кусок границы. Электромагнитное поле вне Q определяется только значениями полей в Q с помощью интегральных представлений полей в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$, удовлетворяющих условию излучения.

Рассмотрим решение однородных уравнений (18), (19) в $\mathbb{R}^3$. Из интегральной формулировки теоремы Пойнтинга следует соотношение для электромагнитного поля рассматриваемой задачи

$$\omega \operatorname{Im}\int_Q (\mathbf{E}^*, \hat{\varepsilon}\mathbf{E})dv + \omega \operatorname{Im}\int_Q (\mathbf{H}^*, \hat{\mu}\mathbf{H})dv + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\lim_{r\to\infty}\int_{S_r} |\mathbf{E}_S|^2 ds = 0,$$

где S_r — сфера радиуса r с центром в нуле, а $\mathbf{E}_S$ — касательные составляющие электрического поля на поверхности сферы. Поскольку параметры среды в Q удовлетворяют условиям теоремы 2, то первые два интеграла в этом соотношении неотрицательны, поэтому третий поверхностный интеграл тоже равен нулю. Далее, интегральные представления (18), (19) удовлетворяют однородным уравнениям Максвелла для свободного пространства в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$ и условиям излучения. Поэтому из леммы Реллиха следует, что $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ равны нулю в $\mathbb{R}^3\backslash\overline{Q}$.

Теперь рассмотрим вспомогательную систему интегральных уравнений C1 в функциональном пространстве $\mathbf{L}_2(D)$, где D — шар радиуса $3d$ с центром в точке $x_0 \in Q$ (d — диаметр области Q, $x_0 \in Q$ — центр шара B). Параметры среды в системе уравнений C1 определим следующим образом: диэлектрическая и магнитная проницаемости $\hat{\varepsilon}^c(x)$, $\hat{\mu}^c(x)$ в области Q совпадают с проницаемостями из системы A1, а вне области Q определяются формулами (10).

Система C1 описывается следующими уравнениями:

$$\begin{gathered}\mathbf{E}_c(x) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int_D G(R)(\hat{\varepsilon}_r^c(y) - \hat{I})\mathbf{E}_c(y)dy - k_0^2\int_D G(R)(\hat{\varepsilon}_r^c(y) - \hat{I})\mathbf{E}_c(y)dy - \\ - i\omega\mu_0 \operatorname{rot}\int_D G(R)(\hat{\mu}_r^c(y) - \hat{I})\mathbf{H}_c(y)dy = 0, \quad x \in D,\end{gathered} \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{H}_c(x) - \operatorname{grad}\operatorname{div}\int_D G(R)(\hat{\mu}_r^c(y) - \hat{I})\mathbf{H}_c(y)dy - k_0^2\int_D G(R)(\hat{\mu}_r^c(y) - \hat{I})\mathbf{H}_c(y)dy + \\ + i\omega\varepsilon_0 \operatorname{rot}\int_D G(R)(\hat{\varepsilon}_r^c(y) - \hat{I})\mathbf{E}_c(y)dy = 0, \quad x \in D.\end{gathered} \tag{21}$$

В (20), (21) $\hat{\varepsilon}_r^c = \hat{\varepsilon}^c/\varepsilon_0$, $\hat{\mu}_r^c = \hat{\mu}^c/\mu_0$ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно.

Нетривиальное решение $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ однородной системы A1 (18), (19) продолжим нулем из области Q на область $D\backslash\overline{Q}$ и обозначим получившиеся функции через $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$. Получим $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1 \in \mathbf{L}_2(D)$. Тогда $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ будет решением (20), (21). Действительно, поскольку $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{H}_1$ равны нулю в $D\backslash\overline{Q}$, то при $x \in Q$ уравнения (20), (21) совпадают с (18), (19). Вне Q интегральные представления (18), (19) дают $\mathbf{E} \equiv 0$, $\mathbf{H} \equiv 0$, т.е. при $x \in D\backslash\overline{Q}$ снова совпадают с (20), (21). Получаем, что система (20), (21), рассматриваемая в $\mathbf{L}_2(D)$, имеет нетривиальное (в Q) решение.

Теперь опишем множество решений системы C1. Поскольку $\hat{\varepsilon}^c(x) = \varepsilon_0\hat{I}$ и $\hat{\mu}^c(x) = \mu_0\hat{I}$ при $x \notin B$, то, аналогично изложенному выше, получим, что в $D\backslash\overline{B}$ электромагнитное поле равно нулю. Далее, из определения $\hat{\varepsilon}^c$, $\hat{\mu}^c$следует, что $\hat{\varepsilon}^c, \hat{\mu}^c \in C^3(D\backslash\overline{Q^j})$, где $Q^j = Q\backslash\overline{Q_j}$. В областях гладкости параметров среды решение (20), (21) из $\vec{L}_2(D)$ удовлетворяет уравнениям Максвелла (9) (см. [4]). Значит, в области $D\backslash\overline{Q^j}$ решение (20), (21) удовлетворяет уравнениям (11), которые, поскольку $\hat{\varepsilon}_j$, $\hat{\mu}_j$ подчиняются условиям теоремы 2, являются эллиптическими (см. разд. 3). Все коэффициенты в уравнениях (11) являются дифференцируемыми функциями. Теперь, применяя принцип продолжения (см. [12], [13]) решения (11) по непрерывности из области $D\backslash\overline{B}$ в область $D\backslash\overline{Q^j}$, получим, что электромагнитное поле в подобласти Q_j для системы A1 равно нулю, что противоречит предположению о нетривиальности решения A1 в Q_j. Таким образом, имеет место

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 2 *система однородных сингулярных интегральных уравнений* (12), (13) (*или* (16), (17)) *имеет единственное решение в* $\mathbf{L}_2(Q)$.

Теперь рассмотрим вопрос о фредгольмовости интегральных уравнений. Приведем несколько определений, которые используются в дальнейшем изложении.

Определение 1. Пусть A – линейный ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Тогда оператор A^*, который также определен в H, называется *сопряженным к* A, если равенство $(Af, g) = (f, A^*g)$ выполняется для всех $f, g \in H$.

Решения однородного уравнения $Au = 0$ будем называть нулями оператора A. Обозначим размерность подпространства нулей через $n(A)$. Тогда $n(A^*)$ – размерность подпространства нулей сопряженного оператора A^*. Разность $\operatorname{Ind} A = n(A) - n(A^*)$ называется индексом оператора A.

Определение 2. Линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *фредгольмовым оператором*, если значения $n(A)$ и $n(A^*)$ конечны и индекс равен нулю.

Сначала рассмотрим интегральное уравнение в анизотропной диэлектрической среде, т.е. магнитная проницаемость всюду в $\mathbb{R}^3$ постоянна и равна μ_0. Тогда система интегральных уравнений (12), (13) сводится к объемному сингулярному интегральному уравнению относительно электрического поля в области Q

$$\begin{gathered}\mathbf{E}(x) + \frac{1}{3}(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})\mathbf{E}(x) - p.v.\int_Q ((\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y), \operatorname{grad}) \operatorname{grad} G(R) dy - \\ - k_0^2 \int_Q (\hat{\varepsilon}_r(y) - \hat{I})\mathbf{E}(y) G(R) dy = \mathbf{E}^0(x), \quad x \in Q, \quad \hat{\varepsilon}_r = \hat{\varepsilon}/\varepsilon_0.\end{gathered} \tag{22}$$

Обозначим через $\hat{B}_0$ оператор уравнения (22). Тогда

$$(\hat{B}_0\mathbf{W})(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}(x)\right)\mathbf{W}(x) - \int_Q \hat{G}_0(x,y)(\hat{\eta}(y)\mathbf{W}(y))\, dy - p.v.\int_Q \hat{G}_1(x,y)(\hat{\eta}(y)\mathbf{W}(y)) dy, \quad x \in Q. \tag{23}$$

В (23) тензор-функция $\hat{\eta}(x) = (\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})$, а $\hat{G}_0(x,y)$ и $\hat{G}_1(x,y)$ – матричные функции, очевидным образом определяемые из (22).

Рассмотрим оператор в пространстве $\mathbf{L}_2$ вида

$$(\hat{A}\mathbf{W})(x) = \int_Q \hat{G}(x,y)\mathbf{W}(y) dy, \tag{24}$$

где $\hat{G}(x,y)$ – тензор-функция. Сопряженный оператор определяется формулой

$$(\hat{A}^*\mathbf{V})(x) = \int_Q \hat{G}^*(y,x)\mathbf{V}(y) dy, \tag{25}$$

где $\hat{G}^*$ – сопряженный к $\hat{G}$ тензор.

Тогда оператор, сопряженный к $\hat{B}_0$ в пространстве $\mathbf{L}_2(Q)$, будет иметь следующий вид:

$$(\hat{B}_0^*\mathbf{W})(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}^*(x)\right)\mathbf{W}(x) - \hat{\eta}^*(x)\int_Q \hat{G}_0^*(y,x)\mathbf{W}(y) dy - \hat{\eta}^*(x) p.v.\int_Q \hat{G}_1^*(y,x)\mathbf{W}(y) dy, \quad x \in Q. \tag{26}$$

Ниже будем полагать, что тензор-функция $\hat{\eta}(x) = \left(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I}\right)$ имеет обратную в каждой точке из $\overline{Q}$. Из (22), (23), (25) следует, что $\hat{G}_0(x,y) = \hat{G}_0(y,x)$, $\hat{G}_0 = \hat{G}_0^t$ и $\hat{G}_1 = \hat{G}_1^t$, $\hat{G}_1(x,y) = \hat{G}_1(y,x)$. Учитывая эти свойства тензоров, возьмем комплексное сопряжение от выражения (26):

$$(\hat{B}_0^*\mathbf{W})^*(x) = \left(\hat{I} + \frac{1}{3}\hat{\eta}^t(x)\right)\mathbf{W}^*(x) - \hat{\eta}^t(x)\int_Q \hat{G}_0(x,y)\mathbf{W}^*(y)dy - \hat{\eta}^t(x)p.v.\int_Q \hat{G}_1(x,y)\mathbf{W}^*(y)dy, \quad x \in Q. \quad (27)$$

В (27) символы t и * обозначают соответственно транспонированный тензор и комплексно-сопряженный вектор.

Пусть $\mathbf{W}$ – нуль оператора (26), т.е. $\hat{B}_0^*\mathbf{W} = 0$. Пусть $\mathbf{V} = (\hat{\eta}^t)^{-1}\mathbf{W}^*$. Тогда из (23), (26), (27) имеем

$$(\hat{B}_0^*\mathbf{W})^* = \hat{\eta}^t\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)\mathbf{V} = 0,$$

где $\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)$ – оператор уравнения (22) с тензором диэлектрической проницаемости в Q, равным $\hat{\varepsilon}^t$. Значит, размерности подпространств нулей операторов $\hat{B}_0^*(\hat{\varepsilon})$ и $\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)$ связаны неравенством $n(\hat{B}_0^*(\hat{\varepsilon})) \le n(\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t))$. Теперь пусть $\mathbf{W}$ – нуль оператора (23) с диэлектрической проницаемостью $\hat{\varepsilon}^t$, т.е. $\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)\mathbf{W} = 0$. Обозначим $\mathbf{V}^* = \hat{\eta}^t\mathbf{W}$. Тогда из (23), (26), (27) имеем

$$\hat{\eta}^t\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)\mathbf{W} = (\hat{B}_0^*\mathbf{V})^* = 0,$$

откуда следует, что $n(\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)) \le n(\hat{B}_0^*(\hat{\varepsilon}))$. Значит,

$$n(\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)) = n(\hat{B}_0^*(\hat{\varepsilon})), \quad (28)$$

т.е. размерности подпространств нулей операторов $\hat{B}_0^*(\hat{\varepsilon})$ и $\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)$ равны. Если $\hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^t$ выполняется, например, в изотропных средах, то $n(\hat{B}_0) = n(\hat{B}_0^*)$ и, значит, $\mathrm{Ind}(\hat{B}_0) = 0$.

Если какой-либо эрмитов тензор $\hat{\delta}$ неотрицательно/положительно определен, то и эрмитов тензор $\hat{\delta}^t$ будет также неотрицательно/положительно определен. Поэтому при выполнении условий теоремы 2 получим

$$n(\hat{B}_0(\hat{\varepsilon})) = n(\hat{B}_0(\hat{\varepsilon}^t)) = 0. \quad (29)$$

Далее, из (28), (29) следует, что

$$n(\hat{B}_0(\hat{\varepsilon})) = n(\hat{B}_0^*(\hat{\varepsilon})) = 0. \quad (30)$$

Значит, при выполнении приведенных выше условий оператор $\hat{B}_0$ будет фредгольмовым в пространстве $\mathbf{L}_2(Q)$. Таким образом, имеем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *для тензор-функции* $\hat{\varepsilon}(x)$, *а* $\hat{\mu} = \mu_0$ *в* $\mathbb{R}^3$, *и, кроме того, тензор-функция* $(\hat{\varepsilon}_r(x) - \hat{I})$ *имеет обратную в каждой точке из* $\overline{Q}$. *Тогда существует и единственно решение сингулярного интегрального уравнения* (22) *в пространстве* $\mathbf{L}_2(Q)$.

Теперь рассмотрим задачи рассеяния на магнитодиэлектрическом теле, диэлектрическая и магнитная проницаемости которого являются кусочно-дифференцируемыми функциями координат в Q, а поверхности разрыва параметров удовлетворяют приведенным выше условиям.

Запишем систему сингулярных интегральных уравнений (12), (13) в символическом виде

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\hat{S} & -i\omega\mu_0\hat{F}\\ i\omega\varepsilon_0\hat{F} & \hat{S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\hat{\varepsilon}_r - \hat{I})\mathbf{E}\\ (\hat{\mu}_r - \hat{I})\mathbf{H}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\end{pmatrix}, \quad (31)$$

где вид операторов $\hat{S}$ и $\hat{F}$ ясен из (12), (13). Очевидно, что оператор $\hat{S}$ является сингулярным оператором в $\mathbf{L}_2(Q)$, а оператор $\hat{F}$ – компактным. Здесь $\mathbf{L}_2(Q)$ – гильбертово пространство интегрируемых с квадратом шестимерных вектор-функций.

Рассмотрим следующее уравнение в $\mathbf{L}_2(Q)$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\hat{S} & 0\\ 0 & \hat{S}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(\hat{\varepsilon}_r-\hat{I})\mathbf{E}\\ (\hat{\mu}_r-\hat{I})\mathbf{H}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}^0\\ \mathbf{H}^0\end{pmatrix}. \quad (32)$$

Из вида (32) следует, что при выполнении условий теоремы 4 для тензор-функций $\hat{\varepsilon}(x)$ и $\hat{\mu}(x)$ оператор уравнения (32) будет фредгольмовым в $\mathbf{L}_2(Q)$. Оператор уравнения (31) отличается от оператора (32) прибавлением компактных операторов. Значит, оператор уравнения (31) является фредгольмовым оператором в $\mathbf{L}_2(Q)$. Получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 2, *и, кроме того, тензор-функции* $(\hat{\varepsilon}_r(x)-\hat{I})$ *и* $(\hat{\mu}_r(x)-\hat{I})$ *имеют обратные в каждой точке из* $\overline{Q}$. *Тогда существует и единственно решение системы сингулярных интегральных уравнений* (12), (13) *в пространстве* $\mathbf{L}_2(Q)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы существования и единственности решения задач рассеяния электромагнитных волн на прозрачных телах (диэлектрических или магнитодиэлектрических) имеют не только теоретический, но и практический интерес. Единственность решения уравнений Максвелла, удовлетворяющих соответствующим условиям, означает, что в области неоднородности среды Q не может быть ненулевое электромагнитное поле, которое не излучает энергию в окружающее пространство.

В настоящей статье доказаны теоремы единственности решения задач рассеяния электромагнитных волн на трехмерных ограниченных неоднородных анизотропных телах в общей дифференциальной постановке, в том числе для тел без потерь и имеющих разрывы диэлектрической и магнитной проницаемости. Также доказаны теоремы о существовании и единственности решения объемных сингулярных интегральных уравнений, отвечающих задачам рассеяния электромагнитных волн на ограниченных трехмерных неоднородных анизотропных магнитодиэлектрических телах, т.е. для задач рассеяния в интегральной постановке, в том числе для сред без потерь и с разрывами параметров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Colton D., Kress R.* Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. Applied Mathematical Sciences. V. 93. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
2. *Potthast R.* Integral equation methods in electromagnetic scattering from anisotropic media // J. Integral Equat. Appl. 1999. V. 11. № 2. P. 197–215.
3. *Самохин А.Б.* Объемные сингулярные интегральные уравнения для задач рассеяния на трехмерных диэлектрических структурах // Дифференц. ур-ния. 2014. Т. 50. № 9. С. 1215–1230.
4. *Самохин А.Б.* Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М.: Радио и связь, 1998.
5. *Samokhin A.B.* Integral equations and iteration methods in electromagnetic scattering. Utrecht: VSP, 2001.
6. *Ball J.M., Capdeboscq Y., Tsering Xiao B.* On uniqueness for time harmonic anisotropic Maxwell's equations with piecewise regular coefficients // Math. Models Meth. Appl. Sci. 2012. V. 22. № 11. P. 1–34.
7. *Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.* Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М.: Русайнс, 2016.
8. *Смирнов Ю.Г., Цупак А.А.* О существовании и единственности классического решения задачи дифракции электромагнитной волны на неоднородном диэлектрическом теле без потерь // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 4. С. 702–709.
9. *Smirnov Yu.G., Tsupak A.A.* Integro-differential equations of the vector problem of electromagnetic wave diffraction by a system of nonintersecting screens and inhomogeneous bodies // Adv. Math. Phys. 2015. Article ID 945965.
10. *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях // Успехи матем. наук. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 61–75.
11. *Самохин А.Б.* Исследование интегральных уравнений для задач электромагнитного рассеяния на трехмерных прозрачных структурах // Дифференц. ур-ния. 2001. Т. 37. № 10. С. 1357–1363.
12. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 3. Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1987.
13. *Protter M.H.* Unique continuation for elliptic equations // Trans. Am. Math. Soc. 1960. V. 95. P. 81–90.
14. *Смирнов Ю.Г.* Об эквивалентности электромагнитной задачи дифракции не неоднородном ограниченном диэлектрическом теле объемному сингулярному интегро-дифференциальному уравнению // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 9. С. 1657–1666.