ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 1, с. 162–176

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.86

ЗАДАЧА АГРЕГИРОВАНИЯ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА И ДВОЙСТВЕННОСТЬ[1)]

© 2021 г. А. А. Шананин[1,2,3,4]

[1] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ, Россия
[2] 119333 Москва, ул. Вавилова, 44, кор. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия
[3] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, Россия
[4] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия
e-mail: alexshan@yandex.ru

Поступила в редакцию 25.06.2020 г.
Переработанный вариант 25.06.2020 г.
Принята к публикации 18.09.2020 г.

С помощью теоремы двойственности Фенхеля и преобразования Янга в работе построена операция свертки технологий и на ее основе исследована задача агрегирования модели нелинейного межотраслевого баланса с вогнутыми положительно-однородными производственными функциями. Библ. 9.

Ключевые слова: множители Лагранжа, двойственность по Фенхелю, преобразование Янга, межотраслевой баланс, продуктивность, производственная функция, агрегирование, эластичность замещения.

DOI: 10.31857/S0044466921010087

1. ВВЕДЕНИЕ

Метод межотраслевого баланса В.В. Леонтьева был удостоен премии имени Нобеля по экономике и успешно использовался в XX веке для анализа экстенсивного восстановительного роста экономики США после великой экономической депрессии и экономик европейских стран и Японии в послевоенное тридцатилетие. Модели межотраслевого баланса позволяли строить мультипликаторы, выявлять узкие места экономической динамики, определять драйверы экономического роста. В основу метода В.В. Леонтьева были положены система материальных балансов и гипотеза о постоянстве норм затрат на выпуск продукции в процессе межотраслевого взаимодействия. Однако в 90-е годы в развитых капиталистических странах изменился характер экономической динамики: экстенсивное увеличение объемов производства сменилось ростом разнообразия и качества товаров и услуг. В этих условиях гипотеза В.В. Леонтьева о постоянстве норм затрат перестала соответствовать возросшей взаимозаменяемости товаров и услуг. Модели межотраслевого баланса в этот период утратили прежнюю популярность. Их стали вытеснять модели, в которых игнорировалась отраслевая специфика, а экономическая динамика описывалась как воспроизводство валового внутреннего продукта (см., например, [1], [2]). Однако мировые экономические кризисы конца XX века и начала XXI века вновь актуализировали модели межотраслевых балансов как инструмент исследования структурных диспропорций. Стали разрабатываться сетевые модели межотраслевых связей для экономики США (см., например, [3]). В [3] гипотеза В.В. Леонтьева о постоянстве норм материальных затрат заменена гипотезой о постоянстве структуры финансовых затрат в процессе производства товаров и услуг с учетом их отраслевой дифференциации. Эта гипотеза соответствует допущению, что производитель фиксирует пропорции своих расходов, в рамках которых в зависимости от ценовой конъюнктуры осуществляет материальные затраты, варьируя качество приобретаемых товаров и услуг. В экономических условиях конца XX века и начала XXI века такая гипотеза представляется более адекватной, чем гипотеза В.В. Леонтьева. В отличие от леонтьевских отраслевых производственных функций с постоянными пропорциями, ей соответствуют производственные функции, учитывающие замещение производственных факторов. В данной работе рассматриваются новые математические задачи агрегирования и калибровки моделей нелинейного межотраслевого баланса.

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ код проекта 20-51-15004.

2. НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС

Рассмотрим группу из m чистых отраслей, связанных взаимными поставками продукции в качестве производственных факторов текущего пользования (ПФТП). Обозначим через X_i^j объем продукции i-й отрасли, который используется в качестве ПФТП в процессе производства в j-й отрасли, а через $X^j = (X_1^j, \ldots, X_m^j)$ – затраты j-й отраслью ПФТП, производимых рассматриваемой группой отраслей. Будем также предполагать, что в процессе производства отрасли затрачивают в качестве ПФТП первичные ресурсы (n видов), т.е. продукты, не производимые рассматриваемой группой отраслей. Обозначим через $l^j = (l_1^j, \ldots, l_n^j)$ вектор затрат первичных ресурсов j-й отраслью, а через $F_j(X^j, l^j)$ – производственную функцию j-й отрасли, т.е. зависимость выпуска j-й отрасли от затрат ПФТП. Будем предполагать, что производственные функции отраслей обладают неоклассическими свойствами, т.е. являются вогнутыми, монотонно неубывающими, непрерывными функциями на R_+^{m+n}, обращающимися в нуле в нуль. Кроме того, будем считать, что $F_j(X^j, l^j)$ являются функциями, положительно-однородными первой степени. Будем говорить, что такие функции принадлежат классу Φ_{m+n}.

Обозначим через $X^0 = (X_1^0, \ldots, X_m^0)$ объемы поставок производимой рассматриваемыми отраслями продукции внешним потребителям. Будем считать, что спрос внешних потребителей описывается с помощью функции полезности $F_0(X^0)$. Предположим, что функция $F_0(X^0) \in \Phi_m$ и что предложение первичных ресурсов рассматриваемой группе отраслей ограничено объемом $l = (l_1, \ldots, l_n) \geq 0$. Рассмотрим задачу об оптимальном распределении этих ресурсов между отраслями в целях максимизации функции полезности внешних потребителей при балансовых ограничениях по первичным ресурсам и выпускаемой отраслями продукции:

$$F_0(X^0) \to \max, \tag{2.1}$$

$$F_j(X^j, l^j) \geq \sum_{i=0}^{m} X_j^i, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} l^j \leq l, \tag{2.3}$$

$$X^0 \geq 0, \quad X^1 \geq 0, \quad \ldots, \quad X^m \geq 0, \quad l^1 \geq 0, \quad \ldots, \quad l^m \geq 0. \tag{2.4}$$

Будем считать, что рассматриваемая группа отраслей продуктивна, т.е. существуют $\hat{X}^1 \geq 0, \ldots, \hat{X}^m \geq 0, \hat{l}^1 \geq 0, \ldots, \hat{l}^m \geq 0$, такие, что

$$F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) > \sum_{i=0}^{m} \hat{X}_j^i, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Нетрудно доказать, что если группа отраслей продуктивна и $l = (l_1, \ldots, l_n) > 0$, то задача оптимизации (2.1)–(2.4) удовлетворяет условиям Слейтера.

Предложение 1 (см. [4]). *Для того чтобы набор векторов* $\{\hat{X}^0, \hat{X}^1, \ldots, \hat{X}^m, \hat{l}^1, \ldots, \hat{l}^m\}$, *удовлетворяющих ограничениям* (2.2)–(2.4), *являлся решением задачи оптимизации* (2.1)–(2.4), *необходимо и достаточно, чтобы существовали множители Лагранжа* $p_0 > 0$, $q = (q_1, \ldots, q_m) \geq 0$, $s = (s_1, \ldots, s_n) \geq 0$ *такие, что*

$$(\hat{X}^j, \hat{l}^j) \in \operatorname{Arg\,max}\left\{ q_j F_j(X^j, l^j) - qX^j - sl^j \,\middle|\, X^j \geq 0, l^j \geq 0 \right\}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.5}$$

$$q_j \left(F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^{m} \hat{X}_j^i \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

$$s_k \left(l_k - \sum_{j=1}^{m} \hat{l}_k^j \right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.7}$$

$$\hat{X}^0 \in \operatorname{Arg\,max}\left\{p_0 F_0(X^0) - qX^0 \,\middle|\, X^0 \geq 0\right\}. \tag{2.8}$$

Будем интерпретировать множители Лагранжа $q = (q_1, \ldots, q_m)$ к балансовым ограничениям по выпускаемым отраслями продуктам как цены на эти продукты, а множители Лагранжа $s = (s_1, \ldots, s_n)$ к балансовым ограничениям по первичным ресурсам – как цены на первичные ресурсы. Тогда соотношение (2.5) означает, что предложение продукции отраслями и их спрос на ПФТП определяются из максимизации прибыли при ценах (q, s). Соотношение (2.8) описывает спрос при ценах q репрезентативного рационального конечного потребителя с функцией полезности $F_0(X^0)$, и, кроме того, $p_0 = q_0(q)$, где функция $q_0(q)$ является преобразованием Янга функции $F_0(X^0)$, т.е.

$$q_0(q) = \inf\left\{\frac{qX^0}{F_0(X^0)} \middle| X^0 \geq 0,\ F_0(X^0) > 0\right\}.$$

Соотношения (2.2) и (2.6), (2.3) и (2.7) означают, что цены $q = (q_1, \ldots, q_m)$ и $s = (s_1, \ldots, s_n)$ равновесные. Таким образом, оптимальными механизмами распределения являются равновесные рыночные механизмы.

Двойственным описанием технологии производства j-й отрасли является функция себестоимости

$$q_j(q, s) = \inf\left\{\frac{qX^j + sl^j}{F_j(X^j, l^j)} \middle| X^j \geq 0,\ l^j \geq 0,\ F_j(X^j, l^j) > 0\right\}.$$

Функция себестоимости $q_j(q, s)$ является преобразованием Янга производственной функции $F_j(X^j, l^j)$.

3. ЗАДАЧА ОБ АГРЕГИРОВАННОМ ОПИСАНИИ ГРУППЫ ОТРАСЛЕЙ

Рассмотрим задачу агрегирования межотраслевого баланса (2)–(4) с помощью функции полезности $F_0(X^0)$. Обозначим через $F^A(l)$ оптимальное значение функционала в задаче (2.1)–(2.4) в зависимости от вектора предложения первичных ресурсов l в правой части балансового ограничения (2.3). Функция $F^A(l) \in \Phi_n$ интерпретируется как агрегированная производственная функция. Агрегированной производственной функции $F^A(l)$ соответствует двойственная агрегированная функция себестоимости

$$q_A(s) = \inf\left\{\frac{sl}{F^A(l)} \middle| l \geq 0,\ F^A(l) > 0\right\}. \tag{3.1}$$

Функция себестоимости $q_A(s) \in \Phi_n$ и, кроме того, справедливо соотношение (см., например, [5])

$$F^A(l) = \inf\left\{\frac{sl}{q_A(s)} \middle| s \geq 0,\ q_A(s) > 0\right\}.$$

В силу двойственности между производственными функциями и функциями себестоимости, например, производственной функции с постоянной эластичностью замещения (constant elasticity substitution, CES) $\left(\left(\frac{X_1}{w_1}\right)^{-\rho} + \left(\frac{X_2}{w_2}\right)^{-\rho} + \left(\frac{X_n}{w_n}\right)^{-\rho}\right)^{-1/\rho}$, где $\rho \in [-1, 0) \cup (0, +\infty]$, $w_1 > 0, \ldots, w_n > 0$, в силу преобразования Янга соответствует CES-функция себестоимости $\left((s_1 w_1)^{-\sigma} + (s_2 w_2)^{-\sigma} + (s_n w_n)^{-\sigma}\right)^{-1/\sigma}$, где $\sigma = -\frac{\rho}{1+\rho}$. Производственной функции Кобба–Дугласа (предельный случай при $\rho \to 0$) $F_{KD}(X_1, \ldots, X_n) = AX_1^{\alpha_1} \ldots .X_n^{\alpha_n}$, где $A > 0$, $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, в силу преобразования Янга соответствует функция себестоимости

$$q_{KD}(p_1, \ldots p_n) = \frac{1}{F_{KD}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} p_1^{\alpha_1} \ldots .p_n^{\alpha_n}.$$

Теорема 1. *Агрегированная функция себестоимости представима в виде*

$$q_A(s) = \sup\{q_0(p) \,|\, p = (p_1, \ldots, p_m) \geq 0,\ q_j(p,s) \geq p_j,\ j = 1, \ldots, m\}. \tag{3.2}$$

Доказательство. Построим двойственную задачу к задаче (2.1)–(2.4), предполагая, что $l \in R_+^n$. Для этого переформулируем задачу (2.1)–(2.4) в виде $\inf\{f(X^0) + g(X^0)\}$, где

$$f(X^0) = \begin{cases} -F_0(X^0), & \text{если} \quad X^0 \in R_+^m, \\ +\infty, & \text{если} \quad X^0 \notin R_+^m, \end{cases}$$

$$g(X^0) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \exists X^1, \ldots, X^m, l^1, \ldots, l^n, \text{ удовлетворяющие } (2.2)\text{–}(2.4), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Вычислим сопряженные функции:

$$f^*(-p) = \sup\{F_0(X^0) - pX^0 \,|\, X^0 \geq 0\} = \begin{cases} 0, & \text{если } p \geq 0, \quad q_0(p) \geq 1, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g^*(p) = \sup\{pX^0 - g(X^0)\} = \begin{cases} \inf\{sl \,|\, s \geq 0,\ q_j(s,p) \geq p_j,\ j = 1, \ldots, m\}, & \text{если} \quad p \in R_+^m, \\ +\infty, \quad \text{если} \quad p \notin R_+^m. \end{cases}$$

По теореме Фенхеля (см. [6, с. 47]) имеем, что

$$F^A(l) = \inf\{f^*(-p) + g^*(p)\} = \inf\{sl \,|\, q_0(p) \geq 1,\ q_j(p,s) \geq p_j,\ j = 1, \ldots, m,\ p \geq 0,\ s \geq 0\}. \tag{3.3}$$

В силу положительной однородности первой степени функций $q_0(p)$, $q_j(s,p)$, $j = 1, \ldots, m$, из (3.1) и (3.3) следует (3.2). Теорема 1 доказана.

Определение 1. Будем называть задачу (3.2) двойственной по Янгу к задаче (2.1)–(2.4).

Предложение 2. *Если множители Лагранжа* $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m) \geq 0$, $\hat{s} \geq 0$ *к задаче* (1)–(4) *удовлетворяют условиям*

$$(\hat{X}^j, \hat{l}^j) \in \operatorname{Arg\,max}\{\hat{p}_j F_j(X^j, l^j) - \hat{p}X^j - \hat{s}l^j \,|\, X^j \geq 0, l^j \geq 0\}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.4}$$

$$\hat{p}_j \left(F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i \right) = 0, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{3.5}$$

$$\hat{s}_k \left(l_k - \sum_{j=1}^m \hat{l}_k^j \right) = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.6}$$

$$\hat{X}^0 \in \operatorname{Arg\,max}\{F_0(X^0) - \hat{p}X^0 \,|\, X^0 \geq 0\}, \tag{3.7}$$

то является решением задачи (3.2) *для* $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_m) \geq 0$, $\hat{s} \geq 0$.

Доказательство. В силу положительной однородности и вогнутости функции $F_j(X^j, l^j)$ получаем из (3.4), что $\hat{p}_j \le q_j(\hat{p}, \hat{s})$, $j = 1, \ldots, m$, $\hat{p}_j F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) = \hat{p}\hat{X}^j + \hat{s}\hat{l}^j$. Из (3.7) следует, что $q_0(\hat{p}) = 1$, $F_0(\hat{X}^0) = \hat{p}\hat{X}^0$. Из (3.5) имеем, что

$$\sum_{j=1}^m (\hat{p}\hat{X}^j + \hat{s}\hat{l}^j) = \sum_{j=1}^m \hat{p}_j F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) = \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \hat{X}_j^0 + \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \sum_{i=1}^m \hat{X}_i^j = \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \hat{X}_j^0 + \sum_{i=1}^m \hat{p}\hat{X}^i,$$

$$\sum_{j=1}^m \hat{s}\hat{l}^j = \sum_{j=1}^m \hat{p}_j \hat{X}_j^0.$$

Откуда следует с учетом (3.6) и $\hat{s} \in \partial F^A(l)$, что

$$q_A(\hat{s}) = \frac{\hat{s}l}{F^A(l)} = \frac{\hat{s}l}{F_0(\hat{X}^0)} = q_0(\hat{p}).$$

Предложение 2 доказано.

4. ОБОБЩЕННАЯ КОНВОЛЮЦИЯ

В качестве примера рассмотрим две технологии $F_1(l^1)$ и $F_2(l^2)$, использующие одни и те же производственные факторы. Будем считать, что по этим технологиям выпускается частично взаимозаменяемая продукция и что потребители этой продукции оценивают ее с помощью функции полезности $F_0(X_1^0, X_2^0)$, которая является положительно-однородной, вогнутой, непрерывной на множестве R_+^2 функцией, принимающей положительные значения на множестве $\operatorname{int} R_+^2$.

Рассмотрим задачу распределения ресурсов между технологиями:

$$F_0(F_1(l^1), F_2(l^2)) \to \max, \tag{4.1}$$

$$l^1 + l^2 \le l, \tag{4.2}$$

$$l^1 \in R_+^n, \quad l^2 \in R_+^n. \tag{4.3}$$

Функция $\hat{F}^A(l)$, задающая зависимость оптимального значения функционала задачи (4.1)–(4.3) от вектора l суммарных затрат производственных факторов, описывает агрегированную технологию. Заметим, что операция построения функции $\hat{F}^A(l)$ по функциям $F_1(l^1)$ и $F_2(l^2)$ может рассматриваться как обобщение операции конволюции в выпуклом анализе.

Следствие 1. Пусть

$$q_j(\mathbf{s}) = \inf_{\{\mathbf{X} \ge 0 | F_j(\mathbf{X}) > 0\}} \frac{\mathbf{sX}}{F_j(\mathbf{X})} \quad (j = 1, 2), \quad q_0(\alpha_1, \alpha_2) = \inf_{\{Y_1 \ge 0, Y_2 \ge 0 | F_0(Y_1, Y_2) > 0\}} \frac{\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2}{F_0(Y_1, Y_2)}.$$

Функция $q_0(q_1(\mathbf{s}), q_2(\mathbf{s}))$ является функцией себестоимости для производственной функции $\hat{F}^A(l)$.

Двойственный к функции полезности $F_0(Y_1, Y_2)$ индекс цены выражается с помощью преобразования Янга:

$$q_0(\alpha_1, \alpha_2) = \inf_{\{Y_1 \ge 0, Y_2 \ge 0 | F_0(Y_1, Y_2) > 0\}} \frac{\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2}{F_0(Y_1, Y_2)}.$$

Предположим, что в силу преобразования Янга технологиям $F_1(l^1)$ и $F_2(l^2)$ соответствуют функции себестоимости $q_1(s_1 x_1, s_2 x_2)$ и $q_1(s_1 y_1, s_2 y_2)$.

Рассмотрим задачу об агрегировании технологий: для каких функций $q_0(\beta_1,\beta_2)$, $q_1(\beta_1,\beta_2)$, $q_2(\beta_1,\beta_2)$ существуют положительные числа z_1, z_2 такие, что для любых $s_1 \geq 0$, $s_2 \geq 0$ справедливо, что

$$q_0\left(q_1(s_1x_1, s_2x_2),\, q_1(s_1y_1, s_2y_2)\right) = q_2(s_1z_1, s_2z_2).$$

Предложение 3. *Пусть функции $q_0(\beta_1,\beta_2)$, $q_1(\beta_1,\beta_2)$, $q_2(\beta_1,\beta_2)$ положительно однородны, вогнуты, непрерывны на R_+^2, принимают положительные значения на множестве* $\operatorname{int} R_+^2$ *и удовлетворяют для любых $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$ условиям $q_j(\beta_1,\beta_2) = q_j(\beta_2,\beta_1)$, $q_j(0,\beta_2) = \beta_2$, $j = 0, 1, 2$. Тогда имеем*

$$q_0(\beta_1,\beta_2) = q_1(\beta_1,\beta_2) = q_2(\beta_1,\beta_2) = \left((\beta_1)^{-\sigma} + (\beta_2)^{-\sigma}\right)^{-1/\sigma},$$

где $-1 \leq \sigma < 0$.

Доказательство. Полагая $s_2 = 0$, получаем, что

$$q_0(q_1(s_1x_1,0), q_1(s_1x_2,0)) = q_0(s_1x_1, s_1x_2) = s_1q_0(x_1,x_2) = q_2(s_1z_1,0) = s_1z_1,$$

откуда следует, что $z_1 = q_0(x_1,x_2)$. Полагая $s_1 = 0$, аналогично получаем, что $z_2 = q_0(y_1,y_2)$. Таким образом, задача сводится к вопросу о существовании функции $q_2(\beta_1,\beta_2)$ такой, что для любых $\beta_1 \geq 0$, $\beta_2 \geq 0$ $q_2(\beta_1,\beta_2) = q_2(\beta_2,\beta_1)$, $q_2(0,\beta_2) = \beta_2$ и для любых $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$q_0(q_1(x_1,x_2), q_1(y_1,y_2)) = q_2(q_0(x_1,y_1), q_0(x_2,y_2)).$$

Полагая в этом соотношении $y_1 = y_2 = 0$, получаем, что

$$q_0(q_1(x_1,x_2), q_1(0,0)) = q_0(q_1(x_1,x_2),0) = q_1(x_1,x_2),$$
$$q_2(q_1(x_1,0), q_1(x_2,0)) = q_2(x_1,x_2).$$

Откуда следует, что $q_1(x_1,x_2) = q_2(x_1,x_2)$. Таким образом, для любых $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$q_0(q_1(x_1,x_2), q_1(y_1,y_2)) = q_1(q_0(x_1,y_1), q_0(x_2,y_2)).$$

Полагая в этом соотношении $x_2 = y_1 = 0$, получаем, что

$$q_0(q_1(x_1,0), q_1(0,y_2)) = q_0(x_1,y_2),$$
$$q_1(q_0(x_1,0), q_0(0,y_2)) = q_1(x_1,y_2).$$

Из этого следует, что $q_1(x_1,y_2) = q_0(x_1,y_2)$. Таким образом, для любых $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$q_0(q_0(x_1,x_2), q_0(y_1,y_2)) = q_0(q_0(x_1,y_1), q_0(x_2,y_2)) = q_0(q_0(x_1,y_2), q_0(x_2,y_1)).$$

По теореме Дебре–Гормана–Кукушкина (см. [7, теорема 1, с. 29]) существуют непрерывные, строго монотонные, обращающиеся в нуле в нуль функции $\lambda(\beta)$, $\mu(\beta)$ такие, что для любых $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$q_0(q_0(x_1,x_2), q_0(y_1,y_2)) = \lambda(\mu(x_1) + \mu(x_2) + \mu(y_1) + \mu(y_2)).$$

Полагая $y_1 = y_2 = 0$, получаем, что для любых $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$q_0(x_1,x_2) = q_0(q_0(x_1,x_2), q_0(0,0)) = \lambda(\mu(x_1) + \mu(x_2) + \mu(0) + \mu(0)) = \lambda(\mu(x_1) + \mu(x_2)).$$

Заметим, что для любого $x_1 \geq 0$ справедливо равенство

$$x_1 = q_0(x_1,0) = \lambda(\mu(x_1) + \mu(0)) = \lambda(\mu(x_1)),$$

т.е. функция $\lambda(\beta)$ является обратной функцией к $\mu(\beta)$. Таким образом, для любых $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ справедливо равенство

$$q_0(x_1,x_2) = \mu^{-1}(\mu(x_1), \mu(x_2)).$$

Без ограничения общности, умножая, если нужно, функцию $\mu(x)$ на положительное число, будем считать, что $\mu(1)=1$. Из положительной однородности функции $q_0(x_1,x_2)$ следует, что если числа $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ таковы, что $\mu(x_1)+\mu(x_2)=1$, то для любого $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\mu(tx_1)+\mu(tx_2)=\mu(t),$$

откуда следует, что $\mu(\beta)=\beta^{-\sigma}$, где $\sigma<0$. Из этого следует, что

$$q_0(\beta_1,\beta_2)=q_1(\beta_1,\beta_2)=q_2(\beta_1,\beta_2)=\left((\beta_1)^{-\sigma}+(\beta_2)^{-\sigma}\right)^{-1/\sigma},$$

где $-1 \leq \sigma < 0$ в силу предположения о вогнутости функции. Предложение 3 доказано.

5. АГРЕГИРОВАНИЕ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА

Рассмотрим вопрос об агрегировании межотраслевого баланса (2.1)–(2.4). Предположим, что множество номеров отраслей и выпускаемых ими продуктов $\{1,\ldots,m\}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\{I_\alpha \mid \alpha=1,\ldots,\nu\}$. Обозначим через $Z^\alpha=(X_j^0 \mid j\in I_\alpha)$, где $\alpha=1,\ldots,\nu$. Предположим, что функция полезности внешних потребителей имеет структуру $F_0(X^0)=G_0(G_1(Z^1),\ldots,G_\nu(Z^\nu))$, где функции G_α, $\alpha=1,\ldots,\nu$, являются положительно-однородными первой степени, вогнутыми, монотонно неубывающими, непрерывными функциями.

Лемма 1 (см. [8]). *Пусть* $G_1(Z^1),\ldots,G_\nu(Z^\nu)$ *– положительно-однородные, вогнутые, непрерывные функции, принимающие положительные значения при положительных значениях аргументов, а функция* $G_0(Y_1,\ldots,Y_\nu)$ *является положительно-однородной, вогнутой, непрерывной на множестве* R_+^ν *функцией, принимающей положительные значения на множестве* $\operatorname{int}R_+^\nu$. *Пусть функции*

$$h_\alpha(p^\alpha)=\inf_{\{Z^\alpha\geq 0 \mid G_\alpha(Z^\alpha)>0\}}\frac{p^\alpha Z^\alpha}{G_\alpha(Z^\alpha)},\quad \alpha=1,\ldots,\nu,$$
$$h_0(\beta_1,\ldots,\beta_\nu)=\inf_{\{Y_1\geq 0,\ldots,Y_\nu\geq 0 \mid G_0(Y_1,\ldots,Y_\nu)>0\}}\frac{\beta_1Y_1+\ldots+\beta_\nu Y_\nu}{G_0(Y_1,\ldots,Y_\nu)}$$

являются их преобразованиями Янга. Тогда получим

$$\inf_{\{Z^1\geq 0,\ldots,Z^\nu\geq 0 \mid G_0(G_1(Z^1),\ldots,G_\nu(Z^\nu))>0\}}\frac{p^1Z^1+\ldots+p^\nu Z^\nu}{G_0(G_1(Z^1),\ldots,G_\nu(Z^\nu))}=h_0(h_1(p^1),\ldots,h_\nu(p^\nu)).$$

Здесь $Z^\alpha=(X_j^0 \mid j\in I_\alpha)$, $p^\alpha=(p_j \mid j\in I_\alpha)$, $\alpha=1,\ldots,\nu$.

По лемме 1 функция $h_0(h_1(p^1),\ldots,h_\nu(p^\nu))$ в силу преобразования Янга будет двойственной к функции $F_0(X^0)=G_0(G_1(Z^1),\ldots,G_\nu(Z^\nu))$.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$H^\alpha(p^1,\ldots,p^{\alpha-1},p^{\alpha+1},\ldots,p^\nu,s)=\sup\left\{h_\alpha(p^\alpha)\,\middle|\,p^\alpha\geq 0,\,q_j(p,s)\geq p_j,\ j\in I_\alpha\right\}. \tag{5.1}$$

Теорема 2. *Пусть*

$$H^\alpha(p^1,\ldots,p^{\alpha-1},p^{\alpha+1},\ldots,p^\nu,s)=r^\alpha(h_1(p^1),\ldots,h_{\alpha-1}(p^{\alpha-1}),h_{\alpha+1}(p^{\alpha+1}),\ldots,h_\nu(p^\nu),s),\quad \alpha=1,\ldots,\nu, \tag{5.2}$$

где $r^\alpha(h_1,\ldots,h_{\alpha-1},h_{\alpha+1},\ldots,h_\nu,s)$ *– положительно-однородные, вогнутые, непрерывные функции, принимающие положительные значения при положительных значениях аргументов. Тогда*

$$q_A(s)=\sup\left\{h_0(h_1,\ldots,h_\nu)\,\middle|\,r^\alpha(h_1,\ldots,h_{\alpha-1},h_{\alpha+1},\ldots,h_\nu,s)\geq h_\alpha\geq 0,\ \alpha=1,\ldots,\nu\right\}. \tag{5.3}$$

Кроме того, если $\hat{p}=(\hat{p}^\alpha \mid \alpha=1,\ldots,\nu)$ *– решение задачи* (3.2), *то* $\left\{\hat{h}_\alpha=h^\alpha(\hat{p}^\alpha) \mid \alpha=1,\ldots,\nu\right\}$ *– решение задачи* (5.3).

Доказательство. Пусть $\widehat{p} = (\widehat{p}^{\alpha} \,|\, \alpha = 1, \ldots, \nu)$ – решение задачи (3.2). Положим $\widehat{h}_{\alpha} = h^{\alpha}(\widehat{p}^{\alpha})$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$. Из (5.1) следует, что $\widehat{h}_{\alpha} \le r^{\alpha}(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_{\alpha-1}, \widehat{h}_{\alpha+1}, \ldots, \widehat{h}_{\nu}, s)$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$. Поскольку $q_0(\widehat{p}) = h_0(h_1(\widehat{p}^1), \ldots, h_{\nu}(\widehat{p}^{\nu}))$, получаем, что

$$q_A(s) \le \sup\left\{h_0(h_1, \ldots, h_{\nu}) \,\middle|\, r^{\alpha}(h_1, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_{\nu}, s) \ge h_{\alpha} \ge 0,\ \alpha = 1, \ldots, \nu\right\}.$$

В обратную сторону, пусть $(\widehat{h}_1, \ldots, \widehat{h}_{\nu})$ – решение задачи

$$\sup\left\{h_0(h_1, \ldots, h_{\nu}) \,\middle|\, r^{\alpha}(h_1, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_{\nu}, s) \ge h_{\alpha} \ge 0,\ \alpha = 1, \ldots, \nu\right\}. \tag{5.4}$$

Используя свойства функций $h_{\alpha}(p^{\alpha})$, выберем $\widehat{p} = (\widehat{p}^{\alpha} \,|\, \alpha = 1, \ldots, \nu) \ge 0$ так, чтобы

$$\widehat{h}_{\alpha} = h_{\alpha}(\widehat{p}^{\alpha}), \quad \alpha = 1, \ldots, \nu, \quad q_j(\widehat{p}, s) \ge \widehat{p}_j, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Поскольку $q_0(\widehat{p}) = h_0(h_1(\widehat{p}^1), \ldots, h_{\nu}(\widehat{p}^{\nu}))$, получаем, что

$$q_A(s) \ge \sup\left\{h_0(h_1, \ldots, h_{\nu}) \,\middle|\, r^{\alpha}(h_1, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_{\nu}, s) \ge h_{\alpha} \ge 0,\ \alpha = 1, \ldots, \nu\right\}.$$

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть*

$$R^{\alpha}(Y_1, \ldots, Y_{\alpha-1}, Y_{\alpha+1}, \ldots, Y_{\nu}, l) = \\ = \inf_{\left\{h_1 \ge 0, \ldots, h_{\alpha-1} \ge 0, \ldots h_{\nu} \ge 0 \middle| r^{\alpha}(h_1, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_{\nu}, s)\right\}} \frac{h_1 Y_1 + \ldots + h_{\alpha-1} Y_{\alpha-1} + h_{\alpha+1} Y_{\alpha+1} + \ldots + h_{\nu} Y_{\nu} + sl}{r^{\alpha}(h_1, \ldots, h_{\alpha-1}, h_{\alpha+1}, \ldots, h_{\nu}, s)},$$

и $\{\widehat{X}^0, \ldots, \widehat{X}^m, \widehat{l}^1, \ldots, \widehat{l}^m\}$ *– решение задачи* (2.1)–(2.4). *Положим*

$$\widehat{L}^{\alpha} = \sum_{j \in I^{\alpha}} \widehat{l}^j, \ \widehat{Y}^0_{\beta} = G_{\beta}\left(\widehat{X}^0_i \,\middle|\, i \in I^{\beta}\right), \quad \beta = 1, \ldots, \nu,$$

$$\widehat{Y}^{\alpha}_{\beta} = G_{\beta}\left(\sum_{j \in I^{\alpha}} \widehat{X}^j_i \,\middle|\, i \in I^{\beta}\right), \quad \alpha \ne \beta, \quad \alpha = 1, \ldots, \nu, \quad \beta = 1, \ldots, \nu.$$

Тогда $\left\{\widehat{Y}^0_{\beta}, \widehat{Y}^{\alpha}_{\beta}, \widehat{L}^{\alpha} \,\middle|\, \alpha = 1, \ldots, \nu;\ \beta = 1, \ldots, \nu\right\}$ *является решением задачи*

$$G_0(Y^0_1, \ldots, Y^0_{\nu}) \to \max, \tag{5.5}$$

$$R^{\alpha}(Y^{\alpha}_1, \ldots, Y^{\alpha}_{\alpha-1}, Y^{\alpha}_{\alpha+1}, \ldots, Y^{\alpha}_{\nu}, L^{\alpha}) \ge Y^0_{\alpha} + \sum_{\beta \ne \alpha} Y^{\beta}_{\alpha}, \quad \alpha = 1, \ldots, \nu, \tag{5.6}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} L^{\alpha} \le l, \tag{5.7}$$

$$Y^0_{\beta} \ge 0, \quad Y^{\alpha}_{\beta} \ge 0, \quad \beta = 1, \ldots, \nu, \quad \beta \ne \alpha, \quad L^{\alpha} \ge 0, \quad \alpha = 1, \ldots, \nu. \tag{5.8}$$

Доказательство. По теореме 1 задача (5.5)–(5.8) является двойственной по Янгу к задаче (5.4). Из теоремы 2 следует, что оптимальные значения функционалов в задачах (3.2) и (5.4) равны, а значит, в силу двойственности по Янгу, равны и оптимальные значения функционалов в задачах (2.1)–(2.4) и (5.5)–(5.8). Из (2.3), (2.4) по построению следует, что $\left\{\widehat{Y}^0_{\beta}, \widehat{Y}^{\alpha}_{\beta}, \widehat{L}^{\alpha} \,\middle|\, \alpha = 1, \ldots, \nu;\ \beta = 1, \ldots, \nu\right\}$ удовлетворяют (5.7) и (5.8). Таким образом, для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\left\{\widehat{Y}^0_{\beta}, \widehat{Y}^{\alpha}_{\beta}, \widehat{L}^{\alpha} \,\middle|\, \alpha = 1, \ldots, \nu;\ \beta = 1, \ldots, \nu\right\}$ удовлетворяют (5.6).

В силу предложения 1 существуют $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m) \ge 0$, $\tilde{s} = (\tilde{s}_1, \ldots, \tilde{s}_n) \ge 0$ такие, что выполняются условия

$$(\widehat{X}^j, \widehat{l}^j) \in \operatorname{Arg\,max}\left\{\tilde{p}_j F_j(X^j, l^j) - \tilde{p} X^j - \tilde{s} l^j \,\middle|\, X^j \ge 0, l^j \ge 0\right\}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5.9}$$

$$\tilde{p}_j\left(F_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j)-\hat{X}_j^0-\sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i\right)=0,\quad j=1,\ldots,m, \tag{5.10}$$

$$\tilde{s}_k\left(l_k-\sum_{j=1}^m \hat{l}_k^j\right)=0,\quad k=1,\ldots,n, \tag{5.11}$$

$$\hat{X}^0\in \operatorname{Arg\,max}\left\{F_0(X^0)-\tilde{p}X^0\,\middle|\,X^0\ge 0\right\}. \tag{5.12}$$

В силу положительной однородности и вогнутости функции $F_j(X^j,l^j)$ получаем из (5.9), что $\tilde{p}_j=q_j\left(\tilde{p},\tilde{s}\right)$ и $\tilde{p}_jF_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j)=\tilde{p}\hat{X}^j+\tilde{s}\hat{l}^j$ (здесь $j=1,\ldots,m$). Откуда следует, что

$$\sum_{j=1}^m \tilde{p}_jF_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j)=\sum_{j=1}^m(\tilde{p}\hat{X}^j+\tilde{s}\hat{l}^j).$$

С учетом (5.10), (5.12) получаем

$$\sum_{j=1}^m(\tilde{p}\hat{X}^j+\tilde{s}\hat{l}^j)=\sum_{j=1}^m \tilde{p}_jF_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j)=\sum_{j=1}^m \tilde{p}_j\hat{X}_j^0+\sum_{j=1}^m\tilde{p}_j\sum_{i=1}^m\hat{X}_i^j=\sum_{j=1}^m \tilde{p}_j\hat{X}_j^0+\sum_{i=1}^m\tilde{p}\hat{X}^i,$$

$$\sum_{j=1}^m \tilde{s}\hat{l}^j=\sum_{j=1}^m \tilde{p}_j\hat{X}_j^0.$$

Из (5.12) следует, что $q_0\left(\tilde{p}\right)=h_0(h_1(\tilde{p}^1),\ldots,h_\nu(\tilde{p}^\nu))=1$, $F_0(\hat{X}^0)=\tilde{p}\hat{X}^0$, т.е.

$$h_0(h_1(\tilde{p}^1),\ldots,h_\nu(\tilde{p}^\nu))G_0\left(G_1\left(\hat{X}_j^0\,\middle|\,j\in I^1\right),\ldots,G_\nu\left(\hat{X}_j^0\,\middle|\,j\in I^\nu\right)\right)=\sum_{\alpha=1}^\nu h_\alpha(\tilde{p}^\alpha)G_\alpha\left(\hat{X}_j^0\,\middle|\,j\in I^\alpha\right),$$

$$h_\alpha(\tilde{p}^\alpha)G_\alpha\left(\hat{X}_j^0\,\middle|\,j\in I^\alpha\right)=\sum_{j\in I^\alpha}\tilde{p}_j\hat{X}_j^0,\quad \alpha=1,\ldots,\nu.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$G_\alpha\left(X_j^0\,\middle|\,j\in I^\alpha\right)\to\max, \tag{5.13}$$

$$F_j(X^j,l^j)\ge X_j^0+\sum_{i\in I^\alpha}X_j^i+\sum_{\beta\ne\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\hat{X}_j^i,\quad j\in I^\alpha, \tag{5.14}$$

$$\sum_{j\in I^\alpha}X_i^j\le\sum_{j\in I^\alpha}\hat{X}_i^j,\quad i\notin I^\alpha, \tag{5.15}$$

$$\sum_{j\in I^\alpha}l^j\le L^\alpha, \tag{5.16}$$

$$X_j^0\ge 0, X^j\ge 0,\quad l^j\ge 0,\quad j\in I^\alpha. \tag{5.17}$$

Набор переменных $\left\{\hat{X}_j^0,\hat{X}^j,\hat{l}^j\,\middle|\,j\in I^\alpha\right\}$ является решением задачи (5.13)–(5.17). Множители Лагранжа p, s удовлетворяют

$$(\hat{X}^j,\hat{l}^j)\in\operatorname{Arg\,max}\left\{\tilde{p}_jF_j(X^j,l^j)-\tilde{p}X^j-\tilde{s}l^j\,\middle|\,X^j\ge 0,l^j\ge 0\right\},\quad j\in I^\alpha,$$

$$\tilde{p}_j\left(F_j(\hat{X}^j,\hat{l}^j)-\hat{X}_j^0-\sum_{i=1}^m\hat{X}_j^i\right)=0,\quad j\in I^\alpha,$$

$$h_\alpha(\tilde{p}^\alpha)G_\alpha\left(\hat{X}_j^0\,\middle|\,j\in I^\alpha\right)=\sum_{j\in I^\alpha}\tilde{p}_j\hat{X}_j^0.$$

Следовательно, набор $\left\{h_\alpha(\tilde{p}^\alpha), \tilde{p}, \tilde{s}\right\}$ является множителями Лагранжа для задачи (5.13)–(5.17). Задача (5.1) является двойственной по Янгу к задаче (5.13)–(5.17). В силу предложения 2 вектор $\tilde{p}^\alpha$ является решением задачи (5.1), т.е.

$$H^\alpha(\tilde{p}^1, \ldots, \tilde{p}^{\alpha-1}, \tilde{p}^{\alpha+1}, \ldots, \tilde{p}^\nu, \tilde{s}) = h_\alpha(\tilde{p}^\alpha),$$

и, значит,

$$\left(\sum_{j\in I^\alpha} \hat{X}_i^j, L^\alpha \,\middle|\, i \in I^\beta, \beta \neq \alpha\right) \in \partial H^\alpha(\tilde{p}^1, \ldots, \tilde{p}^{\alpha-1}, \tilde{p}^{\alpha+1}, \ldots, \tilde{p}^\nu, \tilde{s}).$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} R^\alpha\left(G_\beta\left(\sum_{j\in I^\alpha} \hat{X}_i^j \,\middle|\, i \in I^\beta\right), L^\alpha \,\middle|\, \beta \neq \alpha\right) = \inf_{\left\{p^\beta \geq 0, s\geq 0 \middle| \beta\neq\alpha, H^\alpha(p^\beta, s|\beta\neq\alpha)>0\right\}} \frac{\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} p_i\hat{X}_i^j + sL^\alpha}{H^\alpha(p^1, \ldots, p^{\alpha-1}, p^{\alpha+1}, \ldots, p^\nu, s)} = \\ = \frac{\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_i\hat{X}_i^j + \tilde{s}L^\alpha}{H^\alpha(\tilde{p}^1, \ldots, \tilde{p}^{\alpha-1}, \tilde{p}^{\alpha+1}, \ldots, \tilde{p}^\nu, \tilde{s})} = \frac{\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_i\hat{X}_i^j + \tilde{s}L^\alpha}{h_\alpha(\tilde{p}^\alpha)}. \end{gathered} \tag{5.18}$$

Заметим, что

$$\begin{gathered} 0 = \sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_j\left(F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \hat{X}_j^0 - \sum_{i=1}^m \hat{X}_j^i\right) + \tilde{s}\left(L^\alpha - \sum_{j\in I^\alpha} \hat{l}^j\right) = \\ = \sum_{j\in I^\alpha} (\tilde{p}_j F_j(\hat{X}^j, \hat{l}^j) - \tilde{p}\hat{X}^j - \tilde{s}\tilde{l}^j) - \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_j\hat{X}_j^i + \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_i\hat{X}_i^j + \tilde{s}L^\alpha = \\ = \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_i\hat{X}_i^j + \tilde{s}L^\alpha - \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_j\hat{X}_j^i. \end{gathered}$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_i\hat{X}_i^j + \tilde{s}L^\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_j\hat{X}_j^i. \tag{5.19}$$

В силу определения преобразования Янга справедливо неравенство

$$\sum_{j\in I^\alpha}\sum_{i\in I^\beta} \tilde{p}_j\hat{X}_j^i \geq h_\alpha(\tilde{p}^\alpha) G_\alpha\left(\sum_{i\in I^\beta} \hat{X}_j^i \,\middle|\, j \in I^\alpha\right).$$

Из (5.18) и (5.19) получаем, что

$$\begin{gathered} h_\alpha(\tilde{p}^\alpha) R^\alpha\left(G_\beta\left(\sum_{j\in I^\alpha} \hat{X}_i^j \,\middle|\, i \in I^\beta\right), L^\alpha \,\middle|\, \beta \neq \alpha\right) = \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_i\hat{X}_i^j + \tilde{s}L^\alpha = \sum_{\beta\neq\alpha}\sum_{i\in I^\beta}\sum_{j\in I^\alpha} \tilde{p}_j\hat{X}_j^i \geq \\ \geq \sum_{\beta\neq\alpha} h_\alpha(\tilde{p}^\alpha) G_\alpha\left(\sum_{i\in I^\beta} \hat{X}_j^i \,\middle|\, j \in I^\alpha\right) = \sum_{\beta\neq\alpha} h_\alpha(\tilde{p}^\alpha) Y_\alpha^\beta. \end{gathered}$$

Теорема 3 доказана.

Замечание. Агрегированные балансы (5.6) не зависят от конкретного вида функции G_0, описывающей спрос внешнего потребителя. Поэтому конструкцию построения балансов (5.6) можно рассматривать как агрегирование межотраслевых балансов (2.2). Будем называть условия (5.2) из теоремы 2 условиями агрегирования балансов. Анализ условия (5.2) сводится к задаче о слабой отделимости.

Предложение 4. *Пусть* $H(p^1, p^2) \in \Phi_{m+n} \cap C^2(R_+^{m+n})$, $h(p^1) \in \Phi_m \cap C^2(R_+^m)$. *Для того чтобы* $H(p^1, p^2) = r(h(p^1), p^2)$, *где* $r(h, p^2) \in \Phi_{n+1} \cap C^2(R_+^{n+1})$, $p^1 = (p_1^1, \ldots, p_m^1) \in R_+^m$, $p^2 = (p_1^2, \ldots, p_n^2) \in R_+^n$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция* $\psi(p^1, p^2) \in C^1(R_+^{m+n})$ *такая, что*

$$\frac{\partial H(p^1, p^2)}{\partial p_j^1} = \psi(p^1, p^2)\frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1}, \quad j = 1, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 H(p^1, p^2)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j = \psi(p^1, p^2) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h(p^1)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j$$

для любых $u = (u_1, \ldots, u_m)$ *таких, что*

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1} u_j = 0.$$

Доказательство. *Необходимость*. Поскольку $H(p^1, p^2) = r(h(p^1), p^2)$, где $r(h, p^2) \in \Phi_{n+1} \cap C^2(R_+^{n+1})$, то

$$\frac{\partial H(p^1, p^2)}{\partial p_j^1} = \left.\frac{\partial r(h, p^2)}{\partial h}\right|_{h=h(p^1)} \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Положим

$$\psi(p^1, p^2) = \left.\frac{\partial r(h, p^2)}{\partial h}\right|_{h=h(p^1)}.$$

При сделанных предположениях $\psi(p^1, p^2) \in C^1(R_+^{m+n})$.

Если

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1} u_j = 0,$$

то

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 H(p^1, p^2)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j = \left.\frac{\partial r(h, p^2)}{\partial h}\right|_{h=h(p^1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h(p^1)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j +$$

$$+ \left.\frac{\partial^2 r(h, p^2)}{\partial h^2}\right|_{h=h(p^1)} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1} u_j\right)\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_i^1} u_i\right) =$$

$$= \left.\frac{\partial r(h, p^2)}{\partial h}\right|_{h=h(p^1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h(p^1)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j = \psi(p^1, p^2) \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h(p^1)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j.$$

Достаточность. В силу тождества Эйлера

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1} p_j^1 = h(p^1) > 0 \quad \text{при} \quad p^1 > 0.$$

Пусть для определенности $\dfrac{\partial h(p^1)}{\partial p_k^1} > 0$. По теореме о неявной функции существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\widehat{p}_k^1(h, p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1)$ такая, что $h(p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, \widehat{p}_k^1(\widehat{h}, p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1), p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1) = \widehat{h}$.

Причем для $j \neq k$ имеем

$$\frac{\partial h}{\partial p_k^1}\frac{\partial \hat{p}_k^1}{\partial p_j^1} + \frac{\partial h}{\partial p_j^1} = 0.$$

Сделаем в функции $H(p^1, p^2)$ замену переменных. Перейдем от переменных (p^1, p^2) к переменным $(p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, h, p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1, p^2)$, полагая $p_k^1 = \hat{p}_k^1(h, p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1)$. Заметим, что для $j \neq k$ справедливо равенство

$$\frac{\partial H(p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, \hat{p}_k^1(h, p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1), p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1, p^2)}{\partial p_j^1} =$$
$$= \frac{\partial H(p^1, p^2)}{\partial p_k^1}\frac{\partial \hat{p}_k^1(h, p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1)}{\partial p_j^1} + \frac{\partial H(p^1, p^2)}{\partial p_j^1} =$$
$$= \psi(p^1, p^2)\left(\frac{\partial h(p^1)}{\partial p_k^1}\frac{\partial \hat{p}_k^1(h, p_1^1, \ldots, p_{k-1}^1, p_{k+1}^1, \ldots, p_m^1)}{\partial p_j^1} + \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1}\right) = 0.$$

Откуда следует, что $H(p^1, p^2) = r(h(p^1), p^2)$, где $r(h, p^2) \in C^2(R_+^{n+1})$ и $\psi(p^1, p^2) = \left.\frac{\partial r(h, p^2)}{\partial h}\right|_{h=h(p^1)}$.

Кроме того, $\lambda r(h(p^1), p^2) = \lambda H(p^1, p^2) = H(\lambda p^1, \lambda p^2) = r(h(\lambda p^1), \lambda p^2) = r(\lambda h(p^1), \lambda p^2)$ при $\lambda > 0$. Откуда получаем, что если $\lambda > 0$, то справедливо равенство $r(\lambda h, \lambda p^2) = \lambda r(h, p^2)$. Заметим, что в силу положительной однородности функции $h(p^1)$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h(\lambda p^1)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} p_i^1 p_j^1 = \frac{d^2 h(\lambda p^1)}{d\lambda^2} = 0 \quad \text{при} \quad \lambda > 0, \quad p^1 > 0.$$

В силу вогнутости функции $H(p^1, p^2)$ для любых $u = (u_1, \ldots, u_m)$, $v = (v_1, \ldots, v_n)$ справедливо неравенство

$$0 \geq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 H(p^1, p^2)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H(p^1, p^2)}{\partial p_i^1 \partial p_j^2} u_i v_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H(p^1, p^2)}{\partial p_i^2 \partial p_j^2} v_i v_j =$$
$$= \left.\frac{\partial r(h, p^2)}{\partial h}\right|_{h=h(p^1)} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 h(p^1)}{\partial p_i^1 \partial p_j^1} u_i u_j + \left.\frac{\partial^2 r(h, p^2)}{\partial h^2}\right|_{h=h(p^1)} \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1} u_j\right)\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_i^1} u_i\right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial^2 r(h, p^2)}{\partial h \partial p_j^2}\right|_{h=h(p^1)} v_j \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_i^1} u_i\right) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r(h, p^2)}{\partial p_i^2 \partial p_j^2} v_i v_j.$$

Полагая $u = p^1$ и выбирая

$$\alpha = \pm \sum_{j=1}^m \frac{\partial h(p^1)}{\partial p_j^1} p_j^1,$$

получаем, что

$$\left.\frac{\partial^2 r(h, p^2)}{\partial h^2}\right|_{h=h(p^1)} \alpha^2 + \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial^2 r(h, p^2)}{\partial h \partial p_j^2}\right|_{h=h(p^1)} v_j \alpha + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 r(h, p^2)}{\partial p_i^2 \partial p_j^2} v_i v_j \leq 0$$

для произвольных значений α, v. Следовательно, $r(h, p^2) \in \Phi_{n+1} \cap C^2(R_+^{n+1})$. Предложение 4 доказано.

6. АГРЕГИРОВАНИЕ В СЛУЧАЕ ФУНКЦИЙ С ПОСТОЯННОЙ ЭЛАСТИЧНОСТЬЮ ЗАМЕЩЕНИЯ

Обозначим через J_0 множество номеров товаров, которые выпускаются рассматриваемыми отраслями и используются конечными потребителями. Обозначим через J_i множество номеров товаров, которые выпускаются рассматриваемыми отраслями и используются в качестве производственных факторов i-й отраслью, а через I_i — множество номеров первичных ресурсов, которые используются в качестве производственных факторов i-й отраслью. Будем предполагать, что каждая отрасль использует хотя бы один вид первичных ресурсов, т.е. $I_i \neq \varnothing$. Предположим, что функции

$$F_0(X) = \left(\sum_{j\in J_0}\left(\frac{X_j}{\lambda_j}\right)^{-\rho}\right)^{-1/\rho}, \quad F_i(X,l) = \left(\sum_{j\in J_i}\left(\frac{X_j}{w_{ij}}\right)^{-\rho} + \sum_{k\in I_i}\left(\frac{l_k}{v_{ik}}\right)^{-\rho}\right)^{-1/\rho}, \quad i = 1,\ldots,m,$$

где $\rho \in (-1,0)\cup(0,+\infty)$, $\lambda_j > 0$ $(j\in J_0)$, $w_{ij} > 0$ $(j \in J_i, i = 1,\ldots,m)$, $v_{ik} > 0$ $(k \in I_i,\ i = 1,\ldots,m)$.

Обозначим

$$a_{ij} = \begin{cases}(w_{ij})^{\frac{\rho}{1+\rho}}, & \text{если} \quad j \in J_i,\\ 0, & \text{если} \quad j \notin J_i,\end{cases}$$

$$b_{ik} = \begin{cases}(v_{ik})^{\frac{\rho}{1+\rho}}, & \text{если} \quad k \in I_i,\\ 0, & \text{если} \quad k \notin I_i.\end{cases}$$

Рассмотрим матрицы

$$A = \|a_{ij}\|_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,m}, \quad B = \|b_{ik}\|_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m},$$

E — единичную матрицу $(m\times m)$. Если матрица A продуктивна, то матрица $C = \|c_{ik}\|_{k=1,\ldots,n}^{i=1,\ldots,m} = (E-A)^{-1}B$ является неотрицательной.

Следствие 2. Пусть матрица A продуктивна. Задача

$$q_0(p) \to \max, \tag{6.1}$$

$$q_i(p,s) \geq p_i \geq 0, \quad i = 1,\ldots,m, \tag{6.2}$$

имеет решение вида

$$p_j = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(s_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}}, \quad j = 1,\ldots,m.$$

Агрегированная функция себестоимости и агрегированная производственная функция имеют вид

$$q_A(s) = \left(\sum_{k=1}^{n}(\gamma_k s_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}}, \quad F^A(l) = \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l_k}{\gamma_k}\right)^{-\rho}\right)^{-1/\rho},$$

где

$$\gamma_k = \left(\sum_{j=1}^{m} c_{jk}(\lambda_j)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Доказательство. Если $\rho \in (0,+\infty)$, то неравенства $q_i(p,s) \geq p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, эквивалентны неравенствам

$$\sum_{j\in J_i} a_{ij}(p_j)^{\frac{\rho}{1+\rho}} + \sum_{k\in I_i} b_{ik}(s_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}} \geq (p_i)^{\frac{\rho}{1+\rho}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

В силу продуктивности матрицы A существует неотрицательная матрица $(E - A)^{-1}$ (см. [9, с. 132]), и эти неравенства эквивалентны неравенствам

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(s_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}} \geq (p_i)^{\frac{\rho}{1+\rho}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Если $\rho \in (-1,0)$, то, аналогично, неравенства $q_i(p,s) \geq p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$, эквивалентны неравенствам

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(s_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}} \leq (p_i)^{\frac{\rho}{1+\rho}}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Для любых $\rho \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$ имеем систему неравенств

$$\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(s_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}} \geq p_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Функция

$$q_0(p) = \left(\sum_{j\in J_0} (\lambda_j p_j)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}} \tag{6.3}$$

монотонно не убывает по переменным p, откуда следует, что решение задачи (6.1), (6.2) имеет вид

$$p_j = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(s_k)^{\frac{\rho}{1+\rho}}\right)^{\frac{1+\rho}{\rho}}, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Подставляя решение в (6.3), получаем выражение для функции $q_A(s)$. Используя выражение для преобразования Янга CES-функции, получаем выражение для $F^A(l)$. Следствие 2 доказано.

Рассмотрим агрегирование межотраслевого баланса в случае CES-функций. Так же, как в разд. 5, предположим, что множество номеров отраслей и выпускаемых ими продуктов $\{1, \ldots, m\}$ разбито на непересекающиеся подмножества $\{I_\alpha \mid \alpha = 1, \ldots, \nu\}$. Будем считать, что производственные функции отраслей являются CES-функциями:

$$F_i(X,l) = \left(\sum_{j\in J_i}\left(\frac{X_j}{w_{ij}}\right)^{-\rho} + \sum_{k\in I_i}\left(\frac{l_k}{v_{ik}}\right)^{-\rho}\right)^{-1/\rho}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

где $\rho \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$, $w_{ij} > 0$, ($j \in J_i$, $i = 1, \ldots, m$), $v_{ik} > 0$ ($k \in I_i$, $i = 1, \ldots, m$).

Будем искать агрегирующие функции также в классе CES-функций:

$$G_\alpha\left(X_j \mid j \in I^\alpha\right) = \left(\sum_{j\in I^\alpha}\left(\frac{X_j}{\lambda_{\alpha j}}\right)^{-\rho}\right)^{-1/\rho}, \quad \text{где} \quad \lambda_j^\alpha \geq 0, \quad j \in I^\alpha; \quad \alpha = 1, \ldots, \nu. \tag{6.4}$$

Обозначим через $A_{\alpha\beta} = \|a_{ij}\|_{j\in I^\beta}^{i\in I^\alpha}$, $\alpha,\beta = 1, \ldots, \nu$, подматрицу матрицы A, а через $E_{\alpha\alpha}$ – единичную матрицу, у которой $|I^\alpha|$ строк. Определим вектор-строку

$$\theta^\alpha = \left((\lambda_{\alpha j})^{\frac{\rho}{1+\rho}} \,\middle|\, j \in I_\alpha \right).$$

Следствие 3. Пусть матрица A продуктивна. Тогда матрицы $A_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$, продуктивны. Для того чтобы функции (6.4) удовлетворяли условиям агрегирования балансов (5.2), необходимо и достаточно, чтобы для любой упорядоченной пары (α,β), где $\alpha = 1, \ldots, \nu$, $\beta = 1, \ldots, \nu$, $\beta \neq \alpha$, существовало число $\mu_{\beta\alpha} \geq 0$ такое, что выполняется равенство

$$\mu_{\alpha\beta}\theta^\beta = \theta^\alpha \left(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}\right)^{-1} A_{\alpha\beta}. \tag{6.5}$$

Заметим, что матрицы $A_{\alpha\alpha}$, $\alpha = 1, \ldots, \nu$, продуктивны, так как продуктивна матрица A. Доказательство следствия 3 непосредственно вытекает из следствия 2.

Замечание 2. Из (6.5) следует, что вектор θ^α должен быть собственным вектором матрицы $\left(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}\right)^{-1} A_{\alpha\beta} \left(E_{\beta\beta} - A_{\beta\beta}\right)^{-1} A_{\beta\alpha}$, где $\beta \neq \alpha$. По теореме Фробениуса–Перрона такой неотрицательный собственный вектор существует для каждого $\beta \neq \alpha$. Более того, если $\mu_{\alpha\beta} > 0$, то неотрицательный вектор $\theta^\beta = \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}}\theta^\alpha \left(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}\right)^{-1} A_{\alpha\beta}$ является собственным вектором матрицы $\left(E_{\beta\beta} - A_{\beta\beta}\right)^{-1} A_{\beta\alpha} \left(E_{\alpha\alpha} - A_{\alpha\alpha}\right)^{-1} A_{\alpha\beta}$, при этом выполняются соотношения (6.5) для пар (α,β) и (β,α).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Барро Р.Д., Сала-и-Мартин Х.* Экономический рост. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2017. 824 с.
2. *Асемоглу Д.* Введение в теорию современного экономического роста: в 2 кн. М.: Дело., РАНХ и ГС, 2018. 1624 с.
3. *Acemoglu D., Ozdaglar A., Tahbaz-Salehi A.* The network origins of aggregate fluctuations // Econometrica. 2012. V. 80. № 5. P. 1977–2016.
4. *Agaltsov A.D., Molchanov E.G., Shananin A.A.* Inverse problems in models of resource distribution // J. of Geometric Analysis. 2018. V. 28. № 1. P. 726–765.
5. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Физматлит, 1984. 294 с.
6. *Обен Ж.-П.* Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
7. *Kukushkin N.S.* Separable aggregation and existence of Nash equilibrium. Germany, University of Beilefeld, 1995, working paper № 28. 34 p.
8. *Вратенков С.Д., Шананин А.А.* Анализ структуры потребительского спроса с помощью экономических индексов. М.: ВЦ АН СССР, 1991. 62 с.
9. *Никойдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972. 517 с.