
**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА**

УДК 517.958

**МЕТОД ВОЗМУЩЕНИЙ В ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ДВУХЧАСТОТНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОМ
ВОЛНОВОДЕ I: ТЕ-ТЕ ВОЛНЫ¹⁾**

© 2021 г. Д. В. Валовик

440026 Пенза, ул. Красная, 40, Пензенский гос. ун-т, Россия

e-mail: dvalovik@mail.ru

Поступила в редакцию 06.02.2020 г.
Переработанный вариант 06.02.2020 г.
Принята к публикации 18.09.2020 г.

В статье рассмотрена задача о распространении двухчастотной электромагнитной волны в волноводе, заполненном нелинейной средой. Двухчастотная волна является суммой двух монохроматических ТЕ-волн, характеризующихся разными частотами. Диэлектрическая проницаемость волновода характеризуется весьма общей функцией нелинейности, отвечающей эффектам самовоздействия. В работе показано, что при некоторых условиях рассматриваемая двухчастотная волна является собственной модой волновода. С математической точки зрения изучаемая задача сводится к нелинейной двухпараметрической задаче на собственные значения для системы (нелинейных) уравнений Максвелла. Основным результатом статьи является доказательство существования нелинеаризуемых решений указанной задачи. Библ. 36. Фиг. 2.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, нелинейная диэлектрическая проницаемость, плоский диэлектрический волновод, нелинейная задача типа Штурма–Лиувилля, двухпараметрическая задача на собственные значения, метод возмущений, интегральное характеристическое уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466921010099

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Классический метод возмущений [1] основан на следующей идее. Рассмотрим нелинейную задачу $R(\alpha)$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ – вектор числовых параметров. В операторном виде такую задачу можно записать так: $\mathcal{R}(\mathbf{u}; \lambda, \alpha) = 0$, где \mathcal{R} – некоторая нелинейная по \mathbf{u} оператор-функция, λ – еще один вектор параметров (например, спектральных). Пусть существует решение $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_0(x; \lambda)$ задачи $R(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, которая является линейной. При достаточно широких предположениях относительно \mathcal{R} можно доказать, что как только величина $|\alpha|$ достаточно мала, задача $R(\alpha)$ имеет решение $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_\alpha(x; \lambda)$ и $\mathbf{u}_\alpha(x; \lambda) \rightarrow \mathbf{u}_0(x; \lambda)$ при $|\alpha| \rightarrow \mathbf{0}$. Этот подход реализован, например, в [2]–[4].

Пусть задача $R(\alpha')$, где $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_r \neq 0$, остается нелинейной, но является в некотором смысле более простой, чем задача $R(\alpha)$. Предположим, что разрешимость задачи $R(\alpha')$ может быть установлена и пусть $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}_{\alpha'}(x; \lambda)$ – ее решение. Тогда при определенных условиях на \mathcal{R} можно доказать, что если достаточно мала величина $|\alpha - \alpha'|$, то разрешима будет и задача $R(\alpha)$ и $\mathbf{u}_\alpha(x; \lambda) \rightarrow \mathbf{u}_{\alpha'}(x; \lambda)$ при $|\alpha - \alpha'| \rightarrow 0$.

Обсуждаемый подход может оказаться полезным, если:

- (i) найдется вектор α' такой, что $R(\alpha')$, будучи более простой нелинейной задачей, может быть исследована каким-либо методом;
- (ii) решения задачи $R(\alpha')$ существуют не только для “малых” $|\alpha'|$;
- (iii) задача $R(\alpha')$ имеет решения, не связанные с решениями задачи $R(\mathbf{0})$.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (код проекта 18-71-10015).

Очевидно, что в случаях (ii), (iii) рассмотрение задачи $R(\mathbf{0})$ в качестве “невозмущенной” даст весьма скудную информацию о решениях задачи $R(\boldsymbol{\alpha})$. Более того, задача $R(\mathbf{0})$ может не иметь решений.

В электродинамике нелинейных волноведущих структур возникают задачи, для которых справедливы ситуации (i)–(iii). Например, задачи, зависящие от скалярного параметра α и удовлетворяющие условиям (ii), (iii), изучались в работах [5], [6]. В работе [4] введен широкий класс задач, зависящих от (векторного) параметра $\boldsymbol{\alpha}$, к которым применим изложенный выше подход. В работах [7], [8] изучались многопараметрические задачи, для которых справедливы условия (i)–(iii).

Перейдем к постановке задачи. Всюду ниже индекс j принимает значения 1, 2. Пусть $I = (0, h)$, $\bar{I} = [0, h]$, где $h > 0$ – фиксированная постоянная,

$$\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2), \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4), \quad \boldsymbol{\alpha}' = (\alpha_1, \alpha_2, 0, 0)$$

являются наборами положительных параметров. Считаем, что

$$\boldsymbol{\Lambda}^* = \Lambda_1^* \times \Lambda_2^*, \quad \mathbf{A}^* = A_1^* \times A_2^* \times A_3^* \times A_4^*,$$

где $\Lambda_j^* = (b_j, \lambda_j^*)$, $A_j^* = (0, \alpha_j^*)$, $A_{j+2}^* = (0, \alpha_{j+2}^*)$; $b_j > 0$ – фиксированные постоянные; положительные числа λ_j^* , α_j^* , α_{j+2}^* фиксированы, при этом числа λ_j^* и α_{j+2}^* будут определены позднее (см. следствие 1 и утверждение 5). Необходимо отметить, что параметры α_j^* не предполагаются малыми.

Наконец, введем в рассмотрение вещественнозначные неотрицательные функции $f_j \equiv f_j(s_j)$ и функции произвольного знака $g_j \equiv g_j(s_1, s_2)$ одного и двух аргументов соответственно, такие, что $f_j(0) = 0$ и $g_j(0, 0) = 0$. При этом функции $f_j(s_j) \in C[0, +\infty)$, $s_j f_j'(s_j) \in C[0, +\infty)$, а g_j являются однократно непрерывно дифференцируемыми при $s_1, s_2 \in [0, +\infty)$. Кроме этого, предполагается, что функции f_j монотонно возрастают и на бесконечности характеризуются следующим поведением:

$$f_j(t) = t^{q_j} + \tilde{f}_j(t) \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty,$$

где $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-q_j} \tilde{f}_j(t) = 0$, а $q_j > 0$ – некоторые постоянные.

Задача $P = P(\boldsymbol{\alpha})$ заключается в нахождении тех значений параметра $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$, для которых существуют решения $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$ и $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$ системы

$$u_1'' = -(a_1 - \lambda_1 + \alpha_1 f_1(u_1^2) + \alpha_3 g_1(u_1^2, u_2^2))u_1, \tag{1.1}$$

$$u_2'' = -(a_2 - \lambda_2 + \alpha_2 f_2(u_2^2) + \alpha_4 g_2(u_1^2, u_2^2))u_2,$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$u_j|_{x=0} = A_j, \quad u_j'|_{x=0} = \kappa_{s,j} A_j, \tag{1.2}$$

$$(\kappa_{c,j} u_j + u_j')|_{x=h} = 0, \tag{1.3}$$

где $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \boldsymbol{\Lambda}^* \times \mathbf{A}^*$, $\kappa_{c,j} = \sqrt{\lambda_j - c_j} > 0$, $\kappa_{s,j} = \sqrt{\lambda_j - b_j} > 0$, $a_j, b_j, c_j, A_j > 0$ – вещественные постоянные такие, что $c_j \leq b_j < a_j$, и

$$u_1, u_2 \in C^2[0, h]. \tag{1.4}$$

Определение 1. Вектор $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}} \in \mathbf{A}^*$, где $\bar{\boldsymbol{\lambda}} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ такой, что существуют функции $u_1 \equiv u_1(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$, $u_2 \equiv u_2(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$, удовлетворяющие (1.1)–(1.4), называется векторным собственным значением задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$, а отвечающие ему функции u_1, u_2 – собственными функциями задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$.

Рассмотрим задачу $P(\boldsymbol{\alpha}')$. Эта задача распадается на две (независимые) нелинейные задачи, обозначаемые P_j , удовлетворяющие условиями (ii), (iii).

Пусть $\Lambda_j = (b_j, +\infty)$ и $A = (0, +\infty)$. Задача P_j заключается в нахождении тех значений параметра $\lambda_j = \hat{\lambda}_j$, для которых существуют решения $v_j \equiv v_j(x; \hat{\lambda}_j, \alpha_j)$ уравнения

$$v_j'' = -(a_j - \lambda_j)v_j - \alpha_j f_j(v_j^2)v_j, \quad (1.5)$$

удовлетворяющие краевым условиям

$$v_j|_{x=0} = A_j, \quad v_j'|_{x=0} = \kappa_{s,j}A_j, \quad (1.6)$$

$$(\kappa_{c,j}v_j + v_j')|_{x=h} = 0, \quad (1.7)$$

где $(x, \lambda_j, \alpha_j) \in \bar{I} \times \Lambda_j \times A$, постоянные и параметры $a_j, A_j, \kappa_{s,j}, \kappa_{c,j}$ определены в (1.1)–(1.3), и

$$v_j \in C^2[0, h]. \quad (1.8)$$

Определение 2. Число $\lambda_j = \hat{\lambda}_j \in \Lambda_j$, для которого существует функция $v_j \equiv v_j(x; \hat{\lambda}_j, \alpha_j)$, удовлетворяющая (1.5)–(1.8), называется собственным значением задачи P_j , а отвечающая ему функция v_j – собственной функцией задачи P_j .

Задача $P(\mathbf{0})$, где $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0)$, распадается на две (независимые) линейные задачи, которые обозначим P_j^0 . Задача P_j^0 заключается в нахождении тех значений параметра $\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$, для которых существуют нетривиальные решения $w_j \equiv w_j(x; \tilde{\lambda}_j)$ уравнения $w_j'' = -(a_j - \lambda_j)w_j$, удовлетворяющие краевым условиям $(\kappa_{s,j}w_j - w_j')|_{x=0} = 0, (\kappa_{c,j}w_j + w_j')|_{x=h} = 0$, где $(x, \lambda_j) \in \bar{I} \times (b_j, a_j)$, постоянные и параметры $a_j, \kappa_{s,j}, \kappa_{c,j}$ определены в (1.1)–(1.3), и $w_j \in C^2[0, h]$.

Основным методом исследования задач P_j является метод интегрального характеристического уравнения [9]. Отметим, что широко известные подходы нелинейного анализа, такие как вариационный метод [10], [11] и методы теории ветвления решений [12], [13], не применимы для исследования задач $P(\mathbf{a})$ и P_j , см. также комментарии в работе [14].

Результаты и методы, представленные в настоящей статье, могут быть полезны и в других областях нелинейной математической физики, где возникают многопараметрические задачи на собственные значения, например, в теории связанных осцилляторов с нелинейным взаимодействием, см. [15]–[19] и библиографию там; экспериментальные наблюдения представлены в [17], [19]. Основная идея предлагаемого здесь метода заключается в сведении (когда таковое возможно) нелинейной многопараметрической задачи к нескольким нелинейным задачам с меньшим числом параметров. В рассматриваемом случае это однопараметрические задачи. Если эти (нелинейные) однопараметрические задачи могут быть эффективно исследованы и их решения существенно отличаются от решений соответствующих линеаризованных задач, то предлагаемый метод, вероятно, позволит распространить результаты, полученные для (нелинейных) однопараметрических задач, на случай многопараметрической задачи.

Заметим, что предложенный ниже подход может быть применен для задач с различными краевыми условиями, см., например, [3], где используются нелинейные краевые условия и [8], где используются краевые условия I рода.

Статья написана в соответствии со следующим планом: формулировки результатов приведены в разд. 2; численные результаты представлены в разд. 3; обсуждение результатов и заключительные комментарии даны в разд. 4; доказательства представлены в разд. 5; физическая задача о распространении волн, которая приводит к задаче $P(\mathbf{a})$, сформулирована в разд. 6.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Собственные значения задач $P(\mathbf{a})$, P_j и P_j^0 обозначим через $\bar{\lambda}_{k,l} = (\bar{\lambda}_{1,k}, \bar{\lambda}_{2,l})$, $\hat{\lambda}_{j,k}$ и $\tilde{\lambda}_{j,k}$ соответственно, где $k, l = 1, 2, \dots$, – некоторые целочисленные индексы; также будут использоваться обозначения $\bar{\lambda}$, $\hat{\lambda}_j$ и $\tilde{\lambda}_j$. Если собственное значение снабжено дополнительным индексом, то предполагается, что они упорядочены по возрастанию.

2.1. Задача P_j^0

Решение задачи P_j^0 хорошо известно из классической электродинамики волноводов [20], [21]. А именно, все собственные значения (постоянные распространения) задачи P_j^0 и только они являются (однократными) корнями трансцендентного уравнения

$$\tan \sqrt{a_j - \lambda_j} h = \frac{\sqrt{a_j - \lambda_j} (\sqrt{\lambda_j - b_j} + \sqrt{\lambda_j - c_j})}{a_j - \lambda_j - \sqrt{\lambda_j - b_j} \sqrt{\lambda_j - c_j}}. \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) в электродинамике носит название дисперсионного уравнения [20], [21]; с точки зрения теории Штурма–Лиувилля это уравнение естественно называть характеристическим уравнением задачи P_j^0 [22].

Элементарное исследование уравнения (2.1) позволяет сформулировать

Утверждение 1. *Существует постоянная $h_0 > 0$ такая, что задача P_j^0 имеет конечное число (не менее одного) положительных и простых (кратности 1) собственных значений $\tilde{\lambda}_{j,k}$ и все $\tilde{\lambda}_{j,k} \in (b_j, a_j)$; при этом, если $b_j = c_j$, то $h_0 = 0$. Если $a_j \leq b_j$, то задача P_j^0 (положительных) решений не имеет.*

Доказательство опустим в силу его элементарности.

Используя в качестве “невозмущенной” линейную задачу P_j^0 , методом возмущений можно доказать, что при достаточно малых α_j, α_{j+2} в некоторой окрестности всякого собственного значения $\tilde{\lambda}_{j,k}$ задачи P_j^0 будет лежать собственное значение $\hat{\lambda}_{j,k}$ задачи P_j [23], а в окрестности пары $(\tilde{\lambda}_{1,k}, \tilde{\lambda}_{2,l})$ – собственное значение $\bar{\lambda}_{k,l}$ задачи $P(\alpha)$ [2]–[4]. Очевидно, что при $a_j \leq b_j$ упомянутый метод возмущений неприменим для нахождения решений задач P_j и P , поскольку задача P_j^0 не имеет (положительных) решений.

2.2. Задача P_j

В дальнейшем нам понадобится

Утверждение 2. *Задача Коши (1.5), (1.6) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение $v_j \equiv v_j(x; \lambda_j, \alpha_j)$ непрерывно зависит от точки $(x, \lambda_j, \alpha_j) \in \bar{I} \times \Lambda_j \times A$.*

В работе [9] получено уравнение относительно λ_j , которое имеет вид

$$\Phi_j(\lambda_j; n_j) \equiv \int_{-\kappa_{c,j}}^{\kappa_{s,j}} \frac{ds}{w_j(s; \lambda_j)} + n_j \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \lambda_j)} = h, \tag{2.2}$$

где

$$w_j(\mu_j; \lambda_j) \equiv \mu_j^2 + a_j - \lambda_j + \alpha_j f_j(\theta_j(\mu_j; \lambda_j)), \quad n_j = 0, 1, \dots,$$

величины μ_j и θ_j связаны соотношением

$$(\mu_j^2 + a_j - \lambda_j)\theta_j + \alpha_j F_j(\theta_j^2) = C_j, \tag{2.3}$$

здесь $F_j(v_j^2) = \int_0^{v_j^2} f_j(t) dt$, а $C_j = (a_j - b_j)A_j^2 + \alpha_j F_j(A_j^2) > 0$ – постоянная. Уравнение (2.2) является семейством уравнений для различных n_j .

Имеет место следующая

Теорема 1 (об эквивалентности). *Число $\hat{\lambda}_j \in \Lambda_j$ является собственным значением задачи P_j если и только если существует целое число $\hat{n}_j \geq 0$ такое, что $\lambda_j = \hat{\lambda}_j$ удовлетворяет уравнению (2.2) при $n_j = \hat{n}_j$; при этом собственная функция $v_j \equiv v_j(x; \hat{\lambda}_j, \alpha_j)$, отвечающая собственному значению $\hat{\lambda}_j$, имеет \hat{n}_j простых нулей $x_i \in I$.*

Пусть $\Delta = (0, +\infty)$. Обозначим через R_Δ (открытую) окрестность множества Δ на комплексной плоскости \mathbb{C} , не содержащую точки $z = 0$.

Разрешимость задачи P_j устанавливает

Теорема 2. *Задача P_j имеет бесконечное число собственных значений $\hat{\lambda}_{j,k} \in \Lambda_j$ с точкой накопления на бесконечности. Кроме того, верно следующее:*

(i) *если задача P_j^0 имеет k' решений $\tilde{\lambda}_{j,k}$, $k = 1, \dots, k'$, то существует постоянная $\alpha_j'' > 0$ такая, что для любого положительного $\alpha_j = \alpha_j' < \alpha_j''$ верно, что*

$$\hat{\lambda}_{j,k} \in (b_j, a_j) \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha_j \rightarrow +0} \hat{\lambda}_{j,k} = \tilde{\lambda}_{j,k}, \quad k = 1, \dots, k',$$

где $\hat{\lambda}_{j,1} < \hat{\lambda}_{j,2} < \dots < \hat{\lambda}_{j,k'}$ – первые k' решений задачи P_j при $\alpha_j = \alpha_j'$;

(ii) *для больших $\hat{\lambda}_j$ справедлива оценка $\max_{x \in [0, h]} |u_j(x; \hat{\lambda}_j)| = O(\hat{\gamma}^{1/q_j})$.*

Если дополнительно предположить, что функция $f_j(z)$ является аналитической функцией z при $z \in R_\Delta \subset \mathbb{C}$, то множество собственных значений задачи P_j является дискретным на Λ_j , т.е. на каждом отрезке $\Lambda_j' \subset \Lambda_j$ содержится не более конечного числа (изолированных) собственных значений.

Замечание 1. Если $k > k'$, то собственные значения $\hat{\lambda}_{j,k}$ не связаны с решениями (линейной) задачи P_j^0 , в том числе при $\alpha_j \rightarrow +0$ [9].

Используя полученные результаты, можно показать, что справедливо

Утверждение 3. *Если функция $f_j(z)$ является аналитической функцией z при $z \in R_\Delta \subset \mathbb{C}$, то из последовательности $\{\hat{\lambda}_{j,k}\}$ собственных значений задачи P_j можно выделить такую (бесконечную) подпоследовательность $\{\hat{\lambda}_{j,k'}\}$ с точкой накопления на бесконечности, что для каждого элемента $\hat{\lambda}_{j,k'}$ указанной подпоследовательности найдется такое число $\delta_{j,k'} > 0$, что*

$$(\Phi_j(\hat{\lambda}_{j,k'} - \delta_{j,k'}; \hat{n}_j) - h) \cdot (\Phi_j(\hat{\lambda}_{j,k'} + \delta_{j,k'}; \hat{n}_j) - h) < 0 \quad (2.4)$$

и отрезок $[\hat{\lambda}_{j,k'} - \delta_{j,k'}, \hat{\lambda}_{j,k'} + \delta_{j,k'}]$ не содержит других элементов последовательности $\{\hat{\lambda}_{j,k}\}$.

Из утверждения 3 получаем

Следствие 1. Можно выбрать такую постоянную $\lambda_j^* > a_j$, что интервал (a_j, λ_j^*) содержит собственные значения $\hat{\lambda}_j$ задачи P_j , которые не связаны с решениями $\tilde{\lambda}_j$ задачи P_j^0 при $\alpha_j \rightarrow +0$.

В силу теоремы 2 для всякого достаточно малого $\alpha_j > 0$ все собственные значения $\hat{\lambda}_j \in (b_j, a_j)$ задачи P_j удовлетворяют свойству, сформулированному в утверждении 3. Однако если $\alpha_j > 0$ не мало, то интервал (a_j, λ_j^*) может содержать в том числе такие собственные значения $\hat{\lambda}_j$, что $\lim_{\alpha_j \rightarrow +0} \hat{\lambda}_j = \tilde{\lambda}_j$.

Свойство функции Φ_j , определяемое неравенством (2.4), имеет место без предположения об аналитичности функции $f_j(z)$. Однако в этом случае вопрос о том, являются ли собственные значения изолированными, остается открытым. Если рассмотреть задачу P_j с краевыми условиями I рода и функцией $f_j(z) = z$, то можно доказать, что отвечающая такой задаче функция Φ_j является монотонной при достаточно больших $\lambda_j > 0$ [8]. Аналогичный результат можно получить и для некоторых других функций f_j , например для $f_j(z) = P_k(z^2)$, где P_k – многочлен степени $k \geq 1$ с неотрицательными коэффициентами. Из указанного свойства монотонности следует, что все достаточно большие собственные значения являются изолированными.

Принимая во внимание теорему 1, уравнение (2.2) естественно называть *интегральным характеристическим уравнением (ИХУ) задачи P_j* .

Уравнения типа уравнения (2.2) являются мощным инструментом исследования нелинейных задач на собственные значения [6], [14], [24]. В частности, на основании исследования уравне-

ния (2.2) в работе [9] получены глубокие результаты о разрешимости задачи P_j и установлены многие свойства собственных значений и собственных функций.

В классической (линейной) теории Штурма–Лиувилля используется понятие характеристической функции [22]. В случае задачи P_j можно ввести характеристическую функцию аналогичным образом.

Имеет место следующее

Утверждение 4. Число $\hat{\lambda}_j \in \Lambda_j$ является собственным значением задачи P_j , если и только если $\lambda_j = \hat{\lambda}_j$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_j(\lambda_j, \alpha_j) = 0, \tag{2.5}$$

где $\varphi_j(\lambda_j, \alpha_j) := (\kappa_{c,j}v_j + v'_j) \Big|_{x=h}$, а $v_j \equiv v_j(x; \lambda_j, \alpha_j)$ – решение задачи Коши (1.5), (1.6).

Естественно называть уравнение (2.5) *характеристическим уравнением*, а его левую часть – *характеристической функцией задачи P_j* .

Теоремы 1, 2 и утверждение 4 дают

Следствие 2. Всякое решение $\lambda_j = \hat{\lambda}_j \in \Lambda_j$ уравнения (2.2) является решением уравнения (2.5) и наоборот; при этом, если $\hat{\lambda}_j \in \Lambda_j$ такое, что для него выполняется условие (2.4), то для него также выполняется условие

$$\varphi_j(\hat{\lambda}_j - \delta_j, \alpha_j) \cdot \varphi_j(\hat{\lambda}_j + \delta_j, \alpha_j) < 0, \tag{2.6}$$

где функция $\varphi_j(\lambda_j, \alpha_j)$ определена в (2.5), а $\delta_j > 0$ – некоторая постоянная. В силу теоремы 2 для каждого собственного значения $\hat{\lambda}_j$ задачи P_j , удовлетворяющего свойству (2.4), постоянную δ_j можно выбрать так, что отрезок $[\hat{\lambda}_j - \delta_j, \hat{\lambda}_j + \delta_j]$ не содержит других собственных значений задачи P_j .

2.3. Задача $P(\alpha)$

Имеет место

Утверждение 5. Существуют такие $\alpha_{j+2}^* > 0$, что при $0 < \alpha_{j+2} < \alpha_{j+2}^*$ задача Коши (1.1), (1.2) глобально однозначно разрешима при $x \in \bar{I}$, а ее (классическое) решение

$$u_1 \equiv u_1(x; \lambda, \alpha), \quad u_2 \equiv u_2(x; \lambda, \alpha) \tag{2.7}$$

непрерывно зависит от точки $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times \Lambda^*$. Кроме того, при $\alpha_{j+2} \rightarrow +0$ функции u_j и u'_j , определенные формулами (2.7) равномерно при $x \in \bar{I}$ стремятся к функциям v_j и v'_j соответственно,

где $v_j \equiv v_j(x; \lambda_j, \alpha_j)$ – решение задачи Коши (1.5), (1.6), а $v'_j \equiv v'_j(x; \lambda_j, \alpha_j)$.

Далее считаем, что $(x, \lambda, \alpha) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times \Lambda^*$, где λ_j^* выбраны в соответствии со следствием 1, а α_{j+2}^* выбраны по λ_j^*, α_j^* в смысле утверждения 5. Подчеркнем, что числа λ_j^*, α_j^* не предполагаются малыми.

Ввиду того, что утверждение 5 дает существование глобально определенного непрерывного решения задачи Коши (1.1), (1.2), можно ввести понятие системы характеристических уравнений задачи $P(\alpha)$, аналогично тому, как это сделано в утверждении 4 для задачи P_j .

Имеем место следующее

Утверждение 6. Величина $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2)$ является (векторным) собственным значением задачи $P(\alpha)$, если и только если $\lambda = \bar{\lambda} \in \Lambda^*$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda, \alpha) &= 0, \\ \psi_2(\lambda, \alpha) &= 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\psi_j(\lambda, \alpha) := (\kappa_{c,j}u_j + u'_j) \Big|_{x=h}$, а $u_j \equiv u_j(x; \lambda, \alpha)$ – решение задачи Коши (1.1), (1.2), определенное в утверждении 5.

Рассмотрим систему уравнений (2.8). Вычитая из левых и правых частей уравнений (2.8) левые части уравнений (2.5), получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\Psi_1(\lambda, \alpha) - \varphi_1(\lambda_1, \alpha_1) &= -\varphi_1(\lambda_1, \alpha_1), \\ \Psi_2(\lambda, \alpha) - \varphi_2(\lambda_2, \alpha_2) &= -\varphi_2(\lambda_2, \alpha_2),\end{aligned}\quad (2.9)$$

где все входящие в формулу (2.9) выражения определены формулами (2.5) и (2.8). Доказательство существования векторных собственных значений $\bar{\lambda}$ задачи $P(\alpha)$ основано на изучении системы (2.9) при $\alpha_{j+2} \rightarrow +0$.

Левые части уравнений (2.9) зависят от параметров α_j, α_{j+2} , в то время как правые части только от α_j . Кроме того, при предельном переходе $\alpha_{j+2} \rightarrow +0$ система уравнений (2.9) распадается на два независимых уравнения (2.5). Принимая во внимание следствие 2 о существовании собственных значений задачи P_j , при переходе через которые характеристическая функция φ_j задачи P_j меняет знак, получаем основной результат настоящей работы.

Теорема 3. Пусть каждая из задач P_j имеет n_j^1 собственных значений

$$\hat{\lambda}_{j,1}, \dots, \hat{\lambda}_{j,n_j^1} \in (b_j, \lambda_j^*) \subset \Lambda_j$$

соответственно; при этом постоянные λ_j^* выбраны так, что множество (a_j, λ_j^*) содержит собственные значения $\hat{\lambda}_j$ задачи P_j , удовлетворяющие свойству, сформулированному в следствии 2.

Тогда найдутся такие постоянные $\alpha_{j+2}^0 > 0$, что для любых $\alpha_{j+2} \in (0, \alpha_{j+2}^0)$ задача $P(\alpha)$ имеет, по крайней мере, $n_1^1 \times n_2^1$ векторных собственных значений $\bar{\lambda}_{i,i_2} = (\bar{\lambda}_{1,i_1}, \bar{\lambda}_{2,i_2})$, где $i_j = \overline{1, n_j^1}$; при этом каждое $\bar{\lambda}_{i,i_2}$ содержится в некоторой окрестности точки $(\bar{\lambda}_{1,i_1}, \bar{\lambda}_{2,i_2})$.

Замечание 2. Числа λ_j^*, α_j^* и α_{j+2}^* введены при постановке задачи $P(\alpha)$. При этом числа λ_j^* выбираются достаточно большими, чтобы в интервал $(\alpha_j^*, \lambda_j^*)$ попали собственные значения $\hat{\lambda}_{j,i}$ задачи P_j (см. следствие 1), а числа α_j^* (>0) могут быть выбраны без каких-либо дополнительных условий. После того как зафиксированы параметры λ_j^* и α_j^* , в соответствии с утверждением 5 фиксируются (достаточно малые) параметры α_{j+2}^* .

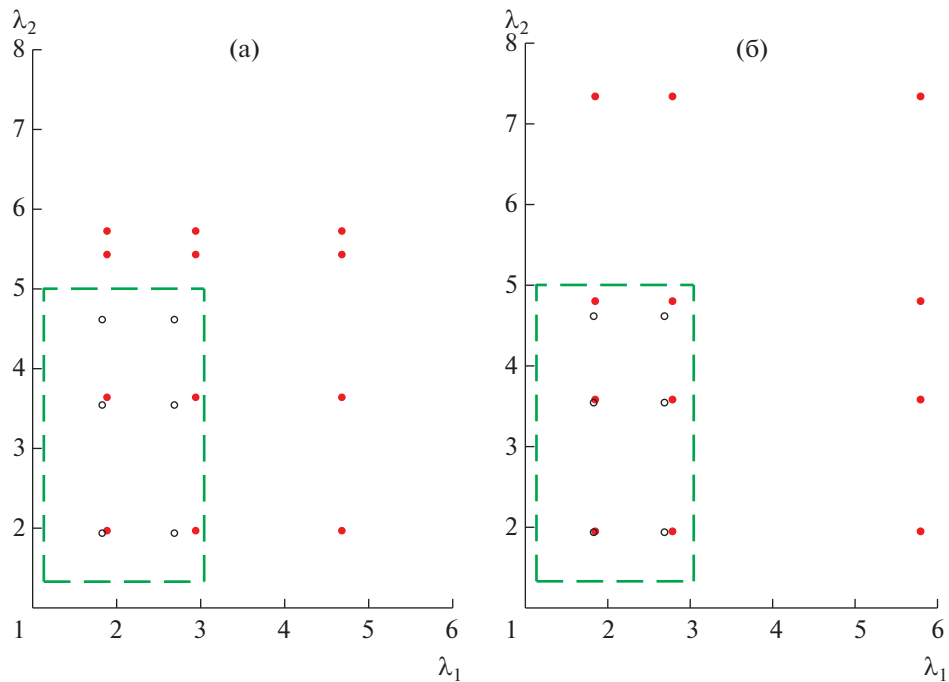
3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В вычислениях использованы следующие значения параметров: $n = 2, \varepsilon_{i,1} = 3, \varepsilon_{i,2} = 5, \varepsilon_{c,1} = \varepsilon_{s,1} = 1, \varepsilon_{c,2} = \varepsilon_{s,2} = 1.2, A_1 = A_2 = 1, h = 4$. Параметры α_j и α_{j+2} выбраны различными в различных экспериментах.

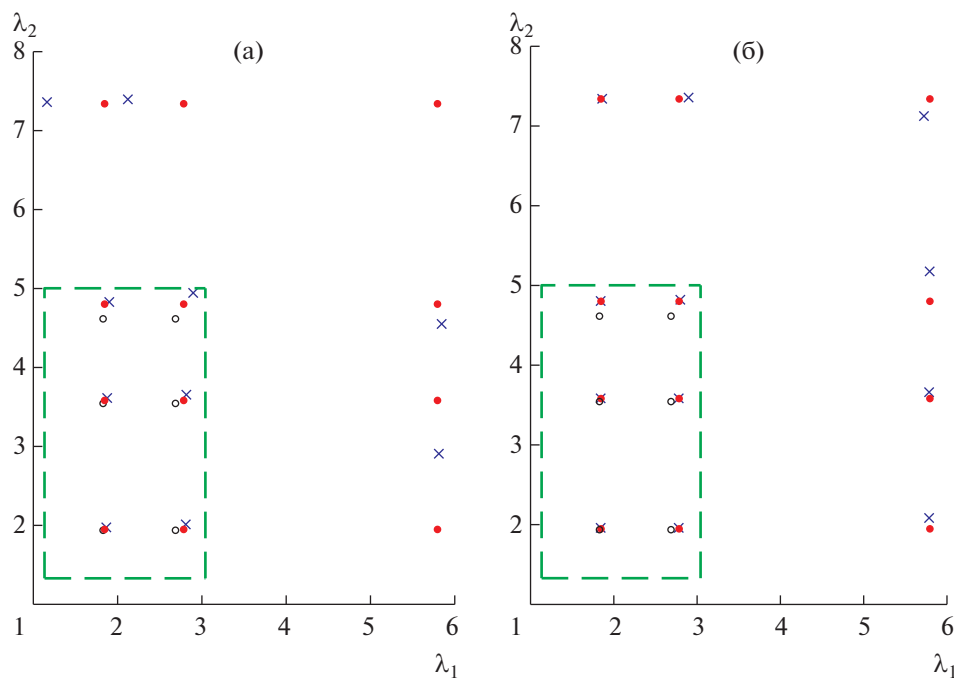
Несмотря на то что собственные значения задач P_1^0, P_2^0 и P_1, P_2 являются скалярными величинами, мы рассматриваем их как двумерные наборы $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$ и $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$, где $i, j = \{1, 2\}$ и k, k' — неотрицательные целые индексы. Объединяя эти собственные значения в пары, мы имеем возможность построить их как точки на плоскости $O\lambda_1\lambda_2$. Мы не перегружаем графики излишними обозначениями: все необходимые пояснения даны в тексте и подрисовочных подписях.

На каждом графике пары $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$, которые составлены из решений задач P_1^0, P_2^0 , существуют только внутри прямоугольников на плоскости $O\lambda_1\lambda_2$, границы которых отмечены штриховой линией.

На фиг. 1, 2 пары $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$ решений задач P_1^0, P_2^0 обозначены окружностями; пары $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$ решений задач P_1, P_2 — красными кружками. На фиг. 2 векторные собственные значения $\bar{\lambda}_{k,k'} = (\bar{\lambda}_{i,k}, \bar{\lambda}_{j,k'})$ задачи $P(\alpha)$ обозначены синими крестиками.



Фиг. 1. Выбраны следующие значения параметров: для (а) — $\alpha_1 = 0.045$, $\alpha_2 = 0.055$, и $\alpha_3 = \alpha_{21} = 0$; здесь $\hat{\lambda}_{1,0} \approx 1.798$, $\hat{\lambda}_{1,1} \approx 2.904$, $\hat{\lambda}_{1,2} \approx 4.727$ и $\hat{\lambda}_{2,0} \approx 1.851$, $\hat{\lambda}_{2,1} \approx 3.581$, $\hat{\lambda}_{2,2} \approx 5.433$, $\hat{\lambda}_{2,3} \approx 5.738$; для (б) — $\alpha_1 = 0.019$, $\alpha_2 = 0.022$, и $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$, где $\hat{\lambda}_{1,0} \approx 1.774$, $\hat{\lambda}_{1,1} \approx 2.760$, $\hat{\lambda}_{1,2} \approx 5.902$ и $\hat{\lambda}_{2,0} \approx 1.843$, $\hat{\lambda}_{2,1} \approx 3.527$, $\hat{\lambda}_{2,2} \approx 4.797$, $\hat{\lambda}_{2,3} \approx 7.407$.



Фиг. 2. Выбраны следующие значения параметров: для (а) — $\alpha_1 = 0.019$, $\alpha_2 = 0.022$, $\alpha_3 = 0.01$, $\alpha_4 = 0.02$, где $\bar{\lambda}_{00} \approx (1.778, 1.857)$, $\bar{\lambda}_{01} \approx (1.789, 3.552)$, $\bar{\lambda}_{02} \approx (1.815, 4.810)$, $\bar{\lambda}_{03} \approx (1.041, 7.429)$, $\bar{\lambda}_{10} \approx (2.766, 1.896)$, $\bar{\lambda}_{11} \approx (2.773, 3.595)$, $\bar{\lambda}_{13} \approx (2.858, 4.929)$, $\bar{\lambda}_{13} \approx (2.046, 7.465)$, $\bar{\lambda}_{20} \approx (5.912, 2.822)$, $\bar{\lambda}_{21} \approx (5.947, 4.522)$; для (б) — $\alpha_1 = 0.019$, $\alpha_2 = 0.022$, $\alpha_3 = 0.001$, $\alpha_4 = 0.002$, где $\bar{\lambda}_{00} \approx (1.774, 1.843)$, $\bar{\lambda}_{01} \approx (1.775, 3.530)$, $\bar{\lambda}_{02} \approx (1.777, 4.799)$, $\bar{\lambda}_{03} \approx (1.797, 7.409)$, $\bar{\lambda}_{10} \approx (2.761, 1.848)$, $\bar{\lambda}_{11} \approx (2.761, 3.534)$, $\bar{\lambda}_{12} \approx (2.768, 4.809)$, $\bar{\lambda}_{20} \approx (5.901, 1.977)$, $\bar{\lambda}_{21} \approx (5.903, 3.602)$, $\bar{\lambda}_{22} \approx (5.908, 5.176)$, $\bar{\lambda}_{23} \approx (5.858, 7.190)$.

Для выбранных значений параметров существует 2 и 3 собственных значения задач P_1^0 и P_2^0 соответственно. Отсюда следует, что можно составить 6 пар, а именно $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$, где $\tilde{\lambda}_{1,0} \approx 1.754$, $\tilde{\lambda}_{1,1} \approx 2.669$ и $\tilde{\lambda}_{2,0} \approx 1.828$, $\tilde{\lambda}_{2,1} \approx 3.488$, $\tilde{\lambda}_{2,2} \approx 4.612$.

На фиг. 1 пары $\hat{\lambda}_{k,k'}$ собственных значений задач P_1, P_2 построены вместе с парами $\tilde{\lambda}_{k,k'}$ собственных значений задач $P_{0,1}, P_{0,2}$ для того чтобы можно было сравнить их. Каждая из задач P_1, P_2 имеет бесконечное число положительных собственных значений; на фигурах представлены только по несколько первых собственных значений в каждом случае.

Фигуры 1а, 1б иллюстрируют утверждение (i) теоремы 2. Действительно, уменьшая α_1 и α_2 , можно видеть, что существует, по крайней мере, одна пара $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$ в окрестности каждой пары $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$ и, следовательно, существует, по крайней мере, одно собственное значение $\hat{\lambda}_{i,k}$ в окрестности всякого собственного значения $\tilde{\lambda}_{i,k}$ как только $\alpha_j > 0$ достаточно малы.

Фигуры 2а, 2б частично иллюстрируют теорему 3. Действительно, как видно существует по крайней мере одна пара $\hat{\lambda}_{k,k'} = (\hat{\lambda}_{i,k}, \hat{\lambda}_{j,k'})$ в окрестности каждой пары $\tilde{\lambda}_{k,k'} = (\tilde{\lambda}_{i,k}, \tilde{\lambda}_{j,k'})$ как только $\alpha_3 > 0$ и $\alpha_4 > 0$ достаточно малы.

4. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В связи с теоремой 3 уместно дать два комментария. Во-первых, поскольку числа λ_j^* и Λ_j^* заданы произвольно, а значит, могут быть выбраны достаточно большими, то теорема 3 утверждает существование векторных собственных значений задачи $P(\mathbf{a})$ в том числе в области, в которой отсутствуют собственные значения задач P_j^0 . Во-вторых, теорема 3 также дает существование тех собственных значений $\bar{\lambda}_{k,l} = (\bar{\lambda}_{1,k}, \bar{\lambda}_{2,l})$, которые являются возмущениями пар решений $(\bar{\lambda}_{1,k}, \bar{\lambda}_{2,l})$ линейных задач P_j^0 . Результат, аналогичный последнему, в некоторых нелинейных задачах ранее был получен с помощью интегральных уравнений, см. [2]–[4] и библиографию там.

Теорема 3 утверждает существование лишь конечного числа векторных собственных значений задачи $P(\mathbf{a})$. Учитывая, что каждая из задач P_j имеет бесконечное число собственных значений (при любом $\alpha_j > 0$), можно предположить, что задача $P(\mathbf{a})$ также имеет бесконечное число векторных собственных значений. Доказательство этого результата хотя бы для малых α_{j+2}^* явилось бы следующим существенным продвижением. Первое и очевидное препятствие к получению такого результата – отсутствие однозначной глобальной разрешимости задачи Коши (1.1), (1.2) при $x \in \bar{I}$ для всех λ, \mathbf{a} таких, что $(\lambda, \mathbf{a}) \in \Lambda \times \Lambda^*$, где $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$. Следующим препятствием является неограниченный рост максимумов собственных функций v_j при $\hat{\lambda}_j \rightarrow +\infty$, см. утверждение (ii) теоремы 2. Вероятно, что последнее затруднение можно преодолеть, используя подходящую “нормировку” собственных функций, как это сделано при доказательстве утверждения 2.1 в работе [14].

Также обратим внимание читателя, что техника, развитая в настоящей статье, существенно отличается от техники, предложенной в работах [7], [8]. В цитированных работах для многопараметрической задачи на собственные значения получена система ИХУ, являющихся многомерным обобщением уравнения (2.2). Исследование такой системы уравнений позволяет получить результаты, аналогичные представленным в настоящей работе. Важным, однако, является то, что здесь результаты получены при помощи простых вспомогательных средств (утверждение 5 и 6), а выкладки технически более просты, чем выкладки в работах [7], [8]. В то же время необходимо отметить, что техника, развитая в цитированных работах, позволяет получить некоторые глубокие результаты о собственных значениях в “неэлектродинамическом” случае задачи $P(\mathbf{a})$. А именно, если поставить задачу $P(\mathbf{a})$ в экранированном волноводе (в этом случае условия III рода (1.2), (1.3) надо заменить на условия I рода [8]), то в такой задаче существует бесконечное число векторных собственных значений с отрицательными компонентами, такие собственные значения не имеют электродинамического смысла, но могут представлять интерес с точки зрения теории задач на собственные значения. В указанном случае метод ИХУ позволяет не только доказать существование бесконечного числа векторных собственных значений, но и выявить их асимптотику и другие свойства [8].

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Доказательство утверждения 2. Это утверждение доказано в работе [9] (см. утверждение 2 в [9]). Двукратная непрерывная дифференцируемость решения v_j по переменной x при $x \in \bar{\Gamma}$ следует из гладкости правой части уравнения (1.5).

Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы следует из доказательства теоремы 1 и следствия 1, представленных в работе [9].

Доказательство теоремы 2. Доказательство этой теоремы следует из доказательств теорем 4, 5, 6, представленных в работе [9].

Доказательство утверждения 3. Легко показать, что функция w_j , определенная в (2.2), является положительной. Действительно, приравняв w_j к нулю, выразив из этого соотношения $\mu_j^2 + a_j - \lambda_j$ и подставив результат в (2.3), получим противоречие. Теперь достаточно выяснить знак w_j в какой-либо одной точке. Легко видеть, что для любого $\lambda_j < a_j$ функция w_j положительна, а значит, она (если существует) положительна для всех $\lambda_j \in \Lambda_j$. Существование функции w_j для всех $\lambda_j \in \Lambda_j$ элементарно следует из анализа формулы (2.3).

Непрерывность функции Φ_j относительно $\lambda_j \in \Lambda_j$ элементарно следует из анализа формул (2.2) и (2.3).

Принимая во внимание положительность функции w_j , получаем следующие неравенства:

$$n_j T_j(\lambda_j) < \Phi_j(\lambda_j; n_j) < (n_j + 1) T_j(\lambda_j), \tag{5.1}$$

где $n_j = 0, 1, \dots, \lambda_j \in \Lambda_j$, а $T_j(\lambda_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{w_j(s; \lambda_j)}$.

В работе [9] доказано, что $\lim_{\lambda_j \rightarrow +\infty} T_j(\lambda_j) = 0$. Отсюда следует существование бесконечного числа решений уравнения (2.2). Действительно, для любого $h > 0$ можно подобрать такой номер $n_j = n_j^0 \geq 0$, что $h < n_j^0 \max_{\lambda_j \in \Lambda_j} T_j(\lambda_j) < \max_{\lambda_j \in \Lambda_j} \Phi_j(\lambda_j; n_j^0)$. Поскольку $\lim_{\lambda_j \rightarrow +\infty} T_j(\lambda_j) = 0$, то всегда можно выбрать такое значение $\lambda_j \geq \lambda_j^0$, что $\Phi_j(\lambda_j^0; n_j^0) < (n_j^0 + 1) T_j(\lambda_j^0) < h$. Но тогда между значением λ_j , на котором функция $\Phi_j(\lambda_j; n_j^0)$ достигает максимального значения, и значением λ_j^0 найдется такое $\lambda_j = \hat{\lambda}_j$, что $\Phi_j(\hat{\lambda}_j; n_j^0) = h$.

Далее, поскольку $\lim_{\lambda_j \rightarrow +\infty} T_j(\lambda_j) = 0$, то среди собственных значений $\hat{\lambda}_{j,k}$ встречается бесконечное множество таких, при переходе через которые функция $\Phi_j(\lambda_j; n_j) - h$, см. формулу (2.2), меняет знак. Таким образом, мы доказали, что существует бесконечное число собственных значений задачи P_j , для которых выполняется неравенство (2.4). Так как $f_j(z)$ является аналитической функцией z при $z \in R_\Delta \subset \mathbb{C}$, то в силу следствий теоремы 4 работы [9] все указанные собственные значения изолированные, а значит, каждое из них можно заключить внутрь некоторой окрестности, в замыкание которой не попадает других собственных значений задачи P_j .

Доказательство утверждения 4. Пусть $v_j \equiv v_j(x; \hat{\lambda}_j, \alpha_j)$ – решение задачи Коши (1.5), (1.6). Если $\lambda_j = \hat{\lambda}_j$ удовлетворяет уравнению (2.5), то, очевидно, $\hat{\lambda}_j$ является собственным значением, а $v_j(x; \hat{\lambda}_j, \alpha_j)$ – собственной функцией задачи P_j .

Пусть $\lambda_j = \hat{\lambda}_j^* \in \Lambda_j$ – некоторое решение уравнения (2.5). Рассмотрим задачу Коши (1.5), (1.6), где $\lambda_j = \hat{\lambda}_j^*$. В силу утверждения 2 нетривиальное решение $v_j \equiv v_j(x; \hat{\lambda}_j^*, \alpha_j)$ указанной задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от точки $(x, \lambda_j, \alpha) \in \bar{\Gamma} \times \Lambda_j \times A$. Если уравнение (2.5) выполняется при $\lambda_j = \hat{\lambda}_j^*$ для указанного решения задачи Коши, то $\lambda_j = \hat{\lambda}_j^*$ является собственным значением задачи P_j . Предположим, что для указанного решения задачи Коши уравнение (2.5) не выполняется при $\lambda_j = \hat{\lambda}_j^*$. Но отсюда следует, что существует неединственное решение задачи Коши (1.5), (1.6), где $\lambda_j = \hat{\lambda}_j^*$; для одного из них уравнение (2.5) выполняется, а для другого – нет. Такой вывод противоречит утверждению 2. А значит, предположение о существовании решения задачи Коши (1.5), (1.6), где $\lambda_j = \hat{\lambda}_j^*$, для которого не выполняется уравнение (2.5), неверно.

Доказательство утверждения 5. Указанное утверждение является следствием “интегральной” теоремы непрерывности [25]. Следуя [25], рассмотрим нормальную систему уравнений

$$u_i' = f_i(x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l), \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.2)$$

правые части которой зависят от параметров $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. В векторной форме систему (5.2) запишем в виде

$$\mathbf{u}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}). \quad (5.3)$$

Будем предполагать, что правые части системы (5.2) определены и непрерывны вместе с их частными производными $\frac{\partial}{\partial u_k} f_i(x, \mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma})$ в некоторой области $\tilde{\Gamma}$ пространства \tilde{R} переменных $x, u_1, \dots, u_n, \gamma_1, \dots, \gamma_l$.

Справедлива

Теорема 4 (см. [25]). Пусть $(x_0, \mathbf{u}_0, \gamma_0)$ – некоторая точка области $\tilde{\Gamma}$ и $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ – решение уравнения (5.3), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{\varphi}(x_0, \boldsymbol{\gamma}) = \mathbf{u}_0$. Если решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \gamma_0)$ определено при $x \in \bar{I}$, то существует такое число $\gamma_0 > 0$, что при $|\boldsymbol{\gamma} - \gamma_0| < \gamma_0$ решение $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ определено на том же отрезке \bar{I} , а функция $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ непрерывна по совокупности переменных $x, \boldsymbol{\gamma}$ при $x \in \bar{I}$ и $|\boldsymbol{\gamma} - \gamma_0| < \gamma_0$. Кроме того, $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}) \rightarrow \boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$ равномерно по $x \in \bar{I}$ при $\boldsymbol{\gamma} \rightarrow \boldsymbol{\gamma}^*$ как только $|\boldsymbol{\gamma} - \boldsymbol{\gamma}^*| < \gamma_0$.

Необходимо отметить, что эта теорема сформулирована в [25] без дополнительного утверждения о равномерности стремления $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma})$ к $\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\gamma}^*)$. Однако этот факт следует из доказательства, данного в [25].

Теперь утверждение 5 является прямым следствием применения указанной выше теоремы к задаче Коши (1.1), (1.2) при дополнительном предположении о глобальной однозначной разрешимости задач Коши (1.5), (1.6) при $(x, a_j, \alpha_j) \in \bar{I} \times \Lambda_j \times \mathbf{A}$. Справедливость этого дополнительного предположения гарантируется утверждением 2.

Двукратная непрерывная дифференцируемость решений u_1, u_2 по x при $x \in \bar{I}$ следует из гладкости правых частей уравнений (1.1).

Доказательство утверждения 6. Пусть $u_j \equiv u_j(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$ – решение задачи Коши (1.1), (1.2). Если $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}$ удовлетворяет системе уравнений (2.8), то, очевидно, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$ является собственным значением, а $u_j \equiv u_j(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \boldsymbol{\alpha})$ – собственной функцией задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$.

Пусть $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^* \in \Lambda^*$ – некоторое решение системы уравнений (2.8). Рассмотрим задачу Коши (1.1), (1.2), где $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*$. В силу теоремы 5 нетривиальное решение $u_j \equiv u_j(x; \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*, \boldsymbol{\alpha})$ указанной задачи Коши существует, единственно и непрерывно зависит от точки $(x, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \in \bar{I} \times \Lambda^* \times \mathbf{A}$. Если уравнения (2.8) выполняются при $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*$ для указанного решения задачи Коши, то $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*$ является собственным значением задачи $P(\boldsymbol{\alpha})$. Предположим, что для указанного решения задачи Коши уравнение (2.8) не выполняется при $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*$. Но отсюда следует, что существует неединственное решение задачи Коши (1.1), (1.2), где $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*$: для одного из них уравнения (2.8) выполняются, а для другого – нет. Такой вывод противоречит утверждению 5. А значит, предположение о существовании решения задачи Коши (1.1), (1.2), где $\boldsymbol{\lambda} = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^*$, для которого не выполняется уравнение (2.8), неверно.

Доказательство теоремы 3. Искомый результат получается из таких рассуждений. Из утверждения 5 следует, что если $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda^*$ и $\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \boldsymbol{\alpha}'$, то

$$u_1(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow v_1(x; \lambda_1, \alpha_1), \quad u_2(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow v_2(x; \lambda_2, \alpha_2), \quad (5.4)$$

$$u_1'(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow v_1'(x; \lambda_1, \alpha_1), \quad u_2'(x; \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\alpha}) \rightarrow v_2'(x; \lambda_2, \alpha_2) \quad (5.5)$$

равномерно при $x \in \bar{I}$; $u_j(x; \lambda_j, \alpha_j)$ – решение задачи Коши (1.1), (1.2), $v_j(x; \lambda_j, \alpha_j)$ – решение задачи Коши (1.5), (1.6).

Учитывая формулы (5.4), (5.5), ясно, что если $\alpha \rightarrow \alpha'$, то

$$\psi_1(\lambda, \alpha) \rightarrow \varphi_1(\lambda_1, \alpha_1), \tag{5.6}$$

$$\psi_2(\lambda, \alpha) \rightarrow \varphi_2(\lambda_2, \alpha_2) \tag{5.7}$$

равномерно при $\lambda \in \Lambda^*$, где φ_j и ψ_j определены формулами (2.5) и (2.8) соответственно.

В силу формул (5.6), (5.7) получаем, что для любого $\epsilon > 0$ найдется такое $\epsilon' > 0$, что для всех $\lambda \in \Lambda^*$ левые части формул (2.9) по абсолютному значению будут меньше ϵ как только $|\alpha \rightarrow \alpha'| < \epsilon'$.

Нули правых частей формул (2.9) являются собственными значениями задач P_j . Из следствия 1 известно, что существует такая постоянная λ_j^* ($> a_j$), что интервал (b_j, λ_j^*) содержит собственные значения задачи P_j , удовлетворяющие следствию 2. При этом предполагается, что λ_j^* достаточно велико и, таким образом, интервал (b_j, λ_j^*) содержит собственные значения задачи P_j , которые не переходят в соответствующие собственные значения задачи P_j^0 при $\alpha_{j+2} \rightarrow +0$. Отсюда следует, что для всякого собственного значения $\hat{\lambda}_{j,k}$, удовлетворяющего следствию 2, найдется содержащий его отрезок такой, что правая часть формулы в (2.9), отвечающая $\hat{\lambda}_{j,k}$, принимает значения разных знаков на противоположных концах этого отрезка. Поскольку левые части могут быть сделаны как угодно малыми, а правые части не зависят от α_{j+2} , непрерывны по λ_j и меняют знак при переходе через $\hat{\lambda}_{j,k}$, то при достаточно малых α_{j+2} в указанных отрезках найдутся числа $\bar{\lambda}_{1,i_1}$ и $\bar{\lambda}_{2,i_2}$, удовлетворяющие системе (2.9).

6. ФИЗИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЛН

Задача $P(\alpha)$ описывает распространение двухчастотной электромагнитной ТЕ-ТЕ-волны в плоском экранированном немагнитном диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой. Нелинейный отклик среды отвечает эффектам самовоздействия для сред с центром инверсии [26]–[29].

Рассмотрим эту задачу подробнее. Пусть $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq h, (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$ – диэлектрический слой, расположенный между полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены немагнитными средами, характеризующимися вещественными диэлектрическими проницаемостями $\epsilon = \epsilon_s \geq \epsilon_0 > 0$ и $\epsilon = \epsilon_c \geq \epsilon_0 > 0$ соответственно, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Диэлектрическая проницаемость ϵ_j слоя Σ будет введена ниже; магнитная проницаемость μ во всем пространстве есть положительная постоянная.

В соответствии с [2], [4], введем двухчастотное электромагнитное поле

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad \mathbf{H}_\omega = \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}, \tag{6.1}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= (0, e_y, 0)^\top e^{i\gamma_1 z}, & \mathbf{H}_1 &= (h_x^{(1)}, 0, h_z)^\top e^{i\gamma_1 z}, \\ \mathbf{E}_2 &= (0, 0, e_z)^\top e^{i\gamma_2 y}, & \mathbf{H}_2 &= (h_x^{(2)}, h_y, 0)^\top e^{i\gamma_2 y}, \end{aligned} \tag{6.2}$$

здесь компоненты $e_y, e_z, h_x^{(1)}, h_x^{(2)}, h_y, h_z$ зависят только от одной пространственной координаты x , а γ_j – подлежащие определению вещественные постоянные. Частоты ω_1, ω_2 различны, но их выбор подчинен некоторым ограничениям, связанным с выбранным законом нелинейности для ϵ_j [4], [5], [26]. Величины $\mathbf{E}_j = \mathbf{E}_j^+ + i\mathbf{E}_j^-$, $\mathbf{H}_j = \mathbf{H}_j^+ + i\mathbf{H}_j^-$ – называются комплексными амплитудами [30]. Другими словами, мы рассматриваем сумму двух ТЕ-волн, распространяющихся в направлениях Oz и Oy соответственно. Поле (6.1), (6.2) носит название ТЕ-ТЕ-волны и представляет собой частный случай многочастотной ТЕ-волны [4]. Вещественное (физическое) поле $\tilde{\mathbf{E}}_\omega, \tilde{\mathbf{H}}_\omega$ имеет вид $\text{Re } \mathbf{E}_\omega, \text{Re } \mathbf{H}_\omega$ соответственно.

Считаем, что диэлектрическая проницаемость ϵ_l слоя Σ описывается диагональным (3×3) -тензором

$$\epsilon_l(\tilde{\mathbf{E}}_\omega) \equiv \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где $\epsilon_{yy} = \epsilon_y + \beta_1 f_1(s_1) + \beta_3 g_1(s_1, s_2)$, $\epsilon_{zz} = \epsilon_z + \beta_2 f_2(s_2) + \beta_4 g_2(s_1, s_2)$, элемент $*$ тензора ϵ_l не оказывает влияния на распространение ТЕ-ТЕ-волны; $\epsilon_y, \epsilon_z, \beta_j, \beta_{j+2} > 0$ – вещественные постоянные; $s_1 = |(\mathbf{E}_1, \mathbf{e}_y)|^2$, $s_2 = |(\mathbf{E}_2, \mathbf{e}_z)|^2$, $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ – векторы электрических полей, образующих ТЕ-ТЕ-волну; $\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – единичные орты осей Oy, Oz декартовых координат $Oxyz$; (\cdot, \cdot) – евклидово скалярное произведение.

Предполагается, что выполняются неравенства

$$\min\{\epsilon_y, \epsilon_z\} > \epsilon_s \geq \epsilon_c > 0.$$

Неравенство $\min\{\epsilon_y, \epsilon_z\} > \max\{\epsilon_s, \epsilon_c\}$ является необходимым условием для существования распространяющихся ТЕ-волн в слое, заполненном линейной средой, т.е. при $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$.

Диэлектрическая проницаемость вида (6.3) соответствует некоторым важным прикладным случаям [5], [24], [30]–[36]; кроме того, свойства функций f_j и g_j позволяют изучать широкий класс нелинейностей, возникающих в оптике; керровская, полиномиальная, степенная нелинейности и т.д.

Теоретически существование двухчастотных распространяющихся волн было доказано недавно: (связанные) ТЕ-ТМ- и ТЕ-ТЕ-волны в слое с керровской нелинейностью введены и изучены в [3] и [2] соответственно. Задача о ТЕ-ТЕ-волне, распространяющейся на одной частоте в слое с керровской нелинейностью, была рассмотрена впервые в [31]; позже эта задача также привлекала внимание исследователей [5], [33], [34]. Случай многочастотной распространяющейся волны в нелинейных фотонных кристаллах указан в работе [35]. Общие формулировки задач о распространении многочастотных волн различных конфигураций в плоских и круглых цилиндрических волноводах, заполненных нелинейными средами, впервые представлены в [4].

Подставляя (6.1) в уравнении Максвелла и принимая во внимание линейность оператора rot , получаем, что $\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k$ удовлетворяют следующим (связанным) уравнениям:

$$\begin{aligned} e^{-i\omega_1 t} \text{rot } \mathbf{H}_1 + e^{-i\omega_2 t} \text{rot } \mathbf{H}_2 &= -i\epsilon(\omega_1 \mathbf{E}_1 e^{-i\omega_1 t} + \omega_2 \mathbf{E}_2 e^{-i\omega_2 t}), \\ e^{-i\omega_1 t} \text{rot } \mathbf{E}_1 + e^{-i\omega_2 t} \text{rot } \mathbf{E}_2 &= i\mu(\omega_1 \mathbf{H}_1 e^{-i\omega_1 t} + \omega_2 \mathbf{H}_2 e^{-i\omega_2 t}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где i – мнимая единица. Поскольку полученная система справедлива для всех t , то приходим к системе 4 (векторных) уравнений

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}_j &= -i\epsilon\omega_j \mathbf{E}_j, \\ \text{rot } \mathbf{E}_j &= i\mu\omega_j \mathbf{H}_j, \end{aligned} \quad (6.5)$$

где $j = 1, 2$.

Итак, поля $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ удовлетворяют уравнениям (6.5). Поскольку мы ищем распространяющиеся волны, то искомые решения затухают как $O(|x|^{-1})$ при $|x| \rightarrow \infty$. Кроме этого, классическая теория электромагнитного поля утверждает, что касательные компоненты полей $\mathbf{E}_j, \mathbf{H}_j$ являются непрерывными на границах $x = 0, x = h$ [20], [21]. Дополнительно мы требуем, чтобы величины $e_y(x)|_{x=0}$ и $e_z(x)|_{x=0}$ имели фиксированные (известные) значения.

Подставляя (6.2) в (6.5) и используя обозначения $u_1 := e_y, u_2 := e_z$, после некоторых преобразований приходим к системе

$$\begin{aligned} u_1 &= -\mu\omega_1^2(\epsilon_1 - \gamma_1^2)u_1, \\ u_2 &= -\mu\omega_2^2(\epsilon_2 - \gamma_2^2)u_2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$h_y = -(i\mu\omega_2)^{-1}e'_z, h_z = (i\mu\omega_1)^{-1}e'_y$, где

$$\epsilon_1 = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_{yy}, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h, \end{cases} \quad \epsilon_2 = \begin{cases} \epsilon_s, & x < 0, \\ \epsilon_{zz}, & 0 \leq x \leq h, \\ \epsilon_c, & x > h, \end{cases} \quad (6.7)$$

а $\epsilon_{yy} = \epsilon_y + \beta_1 f_1(u_1^2) + \beta_3 g_1(u_1^2, u_2^2)$, $\epsilon_{zz} = \epsilon_z + \beta_2 f_2(u_2^2) + \beta_4 g_2(u_1^2, u_2^2)$.

В соответствии с условием на бесконечности решения системы (6.6) в полупространствах имеют вид

$$\begin{aligned} u_j(x) &= A_j \exp(\omega_j \sqrt{\mu(\gamma_j^2 - \epsilon_s)} x) \quad \text{для } x < 0, \\ u_j(x) &= B_j \exp(-\omega_j \sqrt{\mu(\gamma_j^2 - \epsilon_c)}(x - h)) \quad \text{для } x > h, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $A_j, B_j \neq 0$ – вещественные постоянные и без потери общности $A_j > 0$.

Внутри слоя Σ система (6.6) принимает вид

$$\begin{aligned} u_1'' &= -\mu\omega_1^2(\epsilon_y - \gamma_1^2)u_1 - \mu\omega_1^2\beta_1 f_1(u_1^2)u_1 + \mu\omega_1^2\beta_3 g_1(u_1^2, u_2^2)u_1, \\ u_2'' &= -\mu\omega_2^2(\epsilon_z - \gamma_2^2)u_2 - \mu\omega_2^2\beta_2 f_2(u_2^2)u_2 + \mu\omega_2^2\beta_4 g_2(u_1^2, u_2^2)u_2. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Касательными компонентами поля (6.1), (6.2) являются e_y, h_z и e_z, h_y . Таким образом, функции u_j и u'_j непрерывны на границах $x = 0$ и $x = h$. Принимая во внимание указанную непрерывность и используя решения в полупространствах (6.8), приходим к условиям сопряжения

$$\omega_j \sqrt{\mu(\gamma_j^2 - \epsilon_s)} u_j \Big|_{x=0} - u'_j \Big|_{x=0} = 0, \quad -\omega_j \sqrt{\mu(\gamma_j^2 - \epsilon_c)} u_j \Big|_{x=h} - u'_j \Big|_{x=h} = 0. \quad (6.10)$$

Упомянутое условие фиксированных значений поля на границе имеет вид

$$u_j \Big|_{x=0} = A_j,$$

где A_j совпадает с одноименной постоянной в (6.8).

Сформулированная физическая задача о распространении волн есть ни что иное как задача $P(\mathbf{a})$, где использованы обозначения: $\lambda_j = \omega_j^2 \mu_0 \gamma_j^2$, $a_1 = \omega_1^2 \mu_0 \epsilon_y$, $a_2 = \omega_2^2 \mu_0 \epsilon_z$, $b_j = \omega_j^2 \mu_0 \epsilon_s$, $c_j = \omega_j^2 \mu_0 \epsilon_c$; $\alpha_j = \omega_j^2 \mu_0 \beta_j$, $\alpha_{j+2} = \omega_j^2 \mu_0 \beta_{j+2}$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума. Постановку задачи для закрытого волновода см. в [4], [8].

Условия, перечисленные в этом пункте, приводят к условиям (1.2), (1.3) при $n = 2$ и условиям (1.6), (1.7) при $n = 1$.

Поле (6.1), (6.2) распространяется в слое Σ только для выделенных значений пар (γ_1, γ_2) . Эти значения будем называть *(векторными) постоянными распространения*. С математической точки зрения, сформулированная задача является нелинейной двухпараметрической задачей на собственные значения для системы (6.9) с перечисленными начальными и краевыми условиями. Векторные собственные значения этой задачи являются векторными постоянными распространения.

Поскольку γ_j в (6.2) вещественные, то $\lambda_j = \mu\omega_j^2 \gamma_j^2 > 0$. Если $n = 1$ или $\beta_3 = \beta_4 = 0$, то с точностью до обозначений получаем задачи P_j . Если $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$, то получаем 2 линейных задачи об определении постоянных распространения ТЕ-волн, распространяющихся в волноводе, заполненном линейной средой. Эти задачи эквивалентны задачам P_j^0 , сформулированным в разд. 1.

Нелинейные законы, используемые в оптике нелинейных волноводов, часто содержат множители, которые являются малыми параметрами [5], [26], [27]. Это позволяет применять методы теории возмущений, основанные на поиске возмущенных решений соответствующих линеаризованных задач, см., например, [2]–[4]. Такой подход не всегда оправдан, поскольку могут существовать нелинеаризуемые решения (см. теорему 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: ГИТТЛ, 1956.
2. *Smirnov Yu. G., Valovik D. V.* Problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TE wave propagation // *J. Math. Phys.* 2013. V. 54. № 8. Art. no. 083502 (13 pages).
3. *Valovik D. V.* On the problem of nonlinear coupled electromagnetic TE-TM wave propagation // *J. Math. Phys.* 2013. V. 54. № 4. Art. no. 042902 (14 pages).
4. *Valovik D. V.* Nonlinear multi-frequency electromagnetic wave propagation phenomena // *J. Opt.* 2017. V. 18. № 11. Art. no. 115502 (16 pages).
5. *Boardman A. D., Egan P., Lederer F., Langbein U., Mihalache D.* Third-Order Nonlinear Electromagnetic TE and TM Guided Waves. Elsevier Sci. Publ. North-Holland, Amsterdam London New York Tokyo, 1991. Reprinted from Nonlinear Surface Electromagnetic Phenomena, Eds. Ponath H.-E., Stegeman G. I.
6. *Valovik D. V.* On the existence of infinitely many nonperturbative solutions in a transmission eigenvalue problem for nonlinear Helmholtz equation with polynomial nonlinearity // *Appl. Math. Modelling.* 2018. V. 52. P. 296–309.
7. *Tikhov S. V., Valovik D. V.* Perturbation of nonlinear operators in the theory of nonlinear multifrequency electromagnetic wave propagation // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2019. V. 75. P. 76–93.
8. *Kurseeva V. Yu., Tikhov S. V., Valovik D. V.* Nonlinear multiparameter eigenvalue problems. Linearised and non-linearised solutions // *J. of Differential Equations.* 2019. V. 267. № 4. P. 2357–2384.
9. *Валовик Д.В.* Распространение электромагнитных волн в открытом плоском диэлектрическом волноводе, заполненном нелинейной средой I: TE-волны // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2019. Т. 59. № 5. С. 838–858.
10. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ, 1956.
11. *Ambrosetti A., Rabinowitz P. H.* Dual variational methods in critical point theory and applications // *J. of Functional Analysis.* 1973. V. 14. № 4. P. 349–381.
12. *Красносельский М.А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956.
13. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
14. *Валовик Д.В.* О нелинейной задаче на собственные значения, связанной с теорией распространения электромагнитных волн // *Дифференц. ур-ния.* 2018. Т. 54. № 2. С. 168–179.
15. *Theotokoglou E. E., Panayotounakos D. E.* Nonlinear asymptotic analysis of a system of two free coupled oscillators with cubic nonlinearities // *Appl. Math. Modelling.* 2017. V. 43. P. 509–520.
16. *Cuevas J., Kevrekidis P. G., Saxena A., Khare A.* Pt-symmetric dimmer of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. A.* 2013. V. 88. № 3. Art. no. 032108 (11 pages).
17. *Borkowski L., Perlikowski P., Kapitaniak T., Stefanski A.* Experimental observation of three-frequency quasiperiodic solution in a ring of unidirectionally coupled oscillators // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 91. № 6. Art. no. 062906 (7 pages).
18. *Tao M.* Simply improved averaging for coupled oscillators and weakly nonlinear waves // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2019. V. 71. P. 1–21.
19. *In V., Kho A., Neff J. D., Palacios A., Longhini P., Meadows B. K.* Experimental observation of multifrequency patterns in arrays of coupled nonlinear oscillators // *Phys. Rev. Lett.* 2003. V. 91. № 24. Art. no. 244101 (4 pages).
20. *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Радио о связь, 1988.
21. *Адамс М.* Введение в теорию оптических волноводов. М.: Мир, 1984.
22. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Наук. думка, 1972.
23. *Schüürmann H. W., Smirnov Yu. G., Shestopalov Yu. V.* Propagation of TE-waves in cylindrical nonlinear dielectric waveguides // *Phys. Rev. E.* 2005. V. 71. № 1. Art. no. 016614 (10 pages).
24. *Smirnov Yu. G., Valovik D. V.* Guided electromagnetic waves propagating in a plane dielectric waveguide with nonlinear permittivity // *Phys. Rev. A.* 2015. V. 91. № 1. Art. no. 013840 (6 pages).
25. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 1961.
26. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
27. *Шен И.Р.* Принципы нелинейной оптики. М.: Наука, 1989.
28. *Ахмедиев Н.Н., Анкевич А.* Солитоны. М.: Физматлит, 2003.
29. *Манькин Э.А.* Взаимодействие излучения с веществом. Феноменология нелинейной оптики. М.: МИФИ, 1996.
30. *Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P.* Cylindrical nonlinear waveguides // *Soviet Physics JETP.* 1972. V. 35. № 1. P. 44–47.
31. *Eleonskii P. N., Ogan'es'yants L. G., Silin V. P.* Structure of three-component vector fields in self-focusing waveguides // *Soviet Physics JETP.* 1973. V. 36. № 2. P. 282–285.

32. *Akhmediev N.N., Ankevich A.* Solitons, Nonlinear Pulses and Beams. London: Chapman and Hall, 1997.
33. *Boardman A.D., Twardowski T.* Theory of nonlinear interaction between TE and TM waves // J. of the Optical Society of America B. 1988. V. 5. № 2. P. 523–528.
34. *Boardman A.D., Twardowski T.* Transverse-electric and transverse-magnetic waves in nonlinear isotropic waveguides // Phys. Rev. A. 1989. V. 39. № 5. P. 2481–2492.
35. *Ping Xie, Zhao-Qing Zhang.* Multifrequency gap solitons in nonlinear photonic crystals // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 91. № 21. Art. no. 213904 (4 pages).
36. *Skryabin D.V., Biancalana F., Bird D.M., Benabid F.* Effective kerr nonlinearity and two-color solitons in photonic band-gap fibers filled with a Raman active gas // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 93. № 14. Art. no. 143907 (4 pages).