

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 532.51

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ  
СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА<sup>1)</sup>

© 2021 г. Г. В. Засько<sup>1,\*</sup>, Ю. М. Нечепуренко<sup>1,2,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 119333 Москва, ул. Губкина, 8, Отделение Московского центра фундаментальной и прикладной математики  
в ИВМ им. Г.И. Марчука РАН, Россия

<sup>2</sup> 119333 Москва, ул. Губкина, 8, ИВМ им. Г.И. Марчука РАН, Россия

\*e-mail: zasko.gr@bk.ru

\*\*e-mail: yumnech@yandex.ru

Поступила в редакцию 10.12.2019 г.  
Переработанный вариант 27.07.2020 г.  
Принята к публикации 18.09.2020 г.

Рассматриваются собственные моды и оптимальные возмущения уравнений стратифицированного турбулентного течения Куэтта, осредненных по горизонтальным пространственным переменным и линеаризованных относительно стационарного состояния. Установлено, что спектр таких уравнений симметричен относительно вещественной оси и лежит строго в левой полуплоскости, т.е. все собственные моды устойчивые, а главная часть оптимального возмущения представляет собой линейную комбинацию большого числа мод, отвечающих собственным значениям с наибольшими вещественными частями. При этом число наиболее значимых мод в этой линейной комбинации растет с ростом числа Рейнольдса. Библ. 20. Фиг. 5. Табл. 2.

**Ключевые слова:** стратифицированное турбулентное течение Куэтта, мелкомасштабная турбулентность, крупномасштабные структуры, собственные моды, максимальная амплификация, оптимальные возмущения.

DOI: 10.31857/S0044466921010105

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В геофизических пограничных слоях на фоне мелкомасштабной турбулентности часто наблюдаются крупномасштабные структуры. Они вносят существенный вклад в обмены импульсом, теплом и влагой между свободной атмосферой и подстилающей поверхностью (см. [1]). Примером таких структур являются слоистые структуры в поле температуры, наблюдаемые в природе и при прямом (DNS) или вихреразрешающем (LES) численном моделировании устойчиво-стратифицированной атмосферной турбулентности (см. [2]–[4]).

В [3], [5] было проведено DNS-моделирование стратифицированного турбулентного течения Куэтта. Это модельное течение близко к турбулентным течениям в пограничных слоях атмосферы и океана. Установлено, что при больших числах Рейнольдса, в широком диапазоне статической устойчивости, характеризуемой различными значениями числа Ричардсона, наряду с хаотической турбулентностью течение Куэтта содержит крупные структуры, которые могут быть выделены из результатов DNS-моделирования путем разложения мгновенных полей в ряды Фурье по горизонтальным переменным и отбора крупномасштабных гармоник. В случаях, близких к нейтральной стратификации, эти структуры представляют собой крупномасштабные вихри приблизительно круглой формы в поперечном сечении канала, а в случае устойчивой стратификации – крупномасштабные наклонные слои в поле температуры в продольном сечении канала.

Иногда возникновение крупномасштабных структур удается объяснить гидродинамической неустойчивостью осредненного течения (см. [6], [7]). Однако в случае течения Куэтта среднее течение устойчиво. В [8]–[10] образование крупномасштабных структур связывается с возникновением и развитием в мелкомасштабном турбулентном потоке оптимальных возмущений. Опти-

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Московского Центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2019-1624).

мальные возмущения вычислялись с помощью технологии, предложенной в [11], [12], на основе уравнений турбулентного течения, осредненных по горизонтальным пространственным переменным и линеаризованных относительно стационарного состояния. Качественное и количественное сравнение крупномасштабных структур с соответствующими им по волновым числам оптимальными возмущениями показало совпадение их пространственных масштабов и конфигураций.

Данная работа посвящена численному исследованию собственных мод и оптимальных возмущений уравнений турбулентного течения, осредненных по горизонтальным пространственным переменным и линеаризованных относительно стационарного состояния. Установлено, что спектр таких уравнений симметричен относительно вещественной оси и лежит строго в левой полуплоскости, т.е. все собственные моды устойчивы, а глобальные оптимальные возмущения представляют собой линейную комбинацию большого числа собственных мод, отвечающих собственным значениям из ведущей части спектра. Причем число значимых мод в этой линейной комбинации растет с ростом числа Рейнольдса.

## 2. ОСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ

Рассмотрим в декартовых координатах  $x$  (продольная),  $y$  (вертикальная),  $z$  (поперечная) турбулентное течение вязкой несжимаемой жидкости в поле силы тяжести в бесконечном трехмерном канале

$$\{-\infty < x < +\infty, -h < y < h, -\infty < z < +\infty\}$$

полувысоты  $h$ , верхняя стенка которого движется со скоростью  $(U_0/2, 0, 0)$ , нижняя – со скоростью  $(-U_0/2, 0, 0)$ . На стенках поддерживаются постоянные значения температуры  $T_2$  и  $T_1 < T_2$  соответственно. Определим числа Рейнольдса, Ричардсона и Прандтля как

$$\text{Re} = U_0 h / \nu, \quad \text{Ri} = g(T_2 - T_1) U_0 / T_1 h^2, \quad \text{Pr} = \nu / \mu,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения,  $\nu$  и  $\mu$  – кинематическая вязкость и теплопроводность соответственно.

Следуя [8]–[10], будем считать, что эволюция крупномасштабных составляющих течения в нормированных переменных определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U^2}{\partial x} + \frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} - \left( \bar{\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\nu} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial UV}{\partial x} + \frac{\partial V^2}{\partial y} + \frac{\partial VW}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial y} - \left( \bar{\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\nu} \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) - \text{Ri} T &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial UW}{\partial x} + \frac{\partial VW}{\partial y} + \frac{\partial W^2}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial z} - \left( \bar{\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\nu} \frac{\partial W}{\partial y} + \bar{\nu} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial UT}{\partial x} + \frac{\partial VT}{\partial y} + \frac{\partial WT}{\partial z} - \left( \bar{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial T}{\partial y} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где взаимодействие с мелкомасштабной турбулентностью параметризовано с помощью коэффициентов турбулентной вязкости  $\bar{\nu}$  и теплопроводности  $\bar{\mu}$ , зависящих только от вертикальной координаты  $y$ . Здесь  $x, y, z$  – нормированные декартовы координаты;  $U, V, W, T, P$  – нормированные компоненты вектора скорости, температура и удельное давление соответственно. Верхняя и нижняя стенки канала движутся со скоростями  $1/2$  и  $-1/2$  в направлении  $x$ , и на них поддерживаются постоянные значения температуры  $2$  и  $1$  соответственно.

Система уравнений (2.1) имеет стационарное решение вида

$$U = \bar{U}(y), \quad V = 0, \quad W = 0, \quad T = \bar{T}(y), \quad P = \bar{P}(y) \quad (2.2)$$

с профилями продольной компоненты скорости, давления и температуры, удовлетворяющими соотношениям

$$\bar{v} \frac{d\bar{U}}{dy} = \text{const}, \quad \bar{\mu} \frac{d\bar{T}}{dy} = \text{const}, \quad \frac{d\bar{P}}{dy} = \text{Ri} \bar{T}(y). \quad (2.3)$$

Это течение мы далее будем называть основным.

Представим произвольное решение системы (2.2) в окрестности основного течения в виде

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} + \delta u' + o(\delta), & V &= \delta v' + o(\delta), & W &= \delta w' + o(\delta), \\ T &= \bar{T} + \delta T' + o(\delta), & P &= \bar{P} + \delta p' + o(\delta), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $\delta$  – малый параметр. Требуя, чтобы для любого сколь угодно малого  $\delta$  (2.4) было решением системы (2.2), получаем следующие уравнения распространения малых возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{d\bar{U}}{dy} v' + \frac{\partial p'}{\partial x} - \left( \bar{v} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \left( \bar{v} \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \frac{\partial v'}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} \right) - \text{Ri} T' &= 0, \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \left( \bar{v} \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial T'}{\partial x} + \frac{d\bar{T}}{dy} v' - \left( \bar{\mu} \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial T'}{\partial y} + \bar{\mu} \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Уравнения (2.5) рассматриваются с нулевыми граничными условиями для  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$ ,  $T'$  при  $y = \pm 1$ .

Нас будут интересовать периодические по  $x$  и  $z$  возмущения вида

$$(u', v', w', T', p') = \text{Real}\{(u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}) e^{i\alpha x + i\gamma z}\}, \quad (2.6)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  – вещественные продольное и поперечное волновые числа соответственно, а  $f_{\alpha\gamma}$  – комплексные амплитуды, зависящие только от  $y$  и  $t$ . Амплитуды таких возмущений удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha \bar{U} u_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{U}}{dy} v_{\alpha\gamma} + i\alpha p_{\alpha\gamma} + \left( \alpha^2 \bar{v} u_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \frac{\partial u_{\alpha\gamma}}{\partial y} + \gamma^2 \bar{v} u_{\alpha\gamma} \right) &= 0, \\ \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha \bar{U} v_{\alpha\gamma} + \frac{\partial p_{\alpha\gamma}}{\partial y} + \left( \alpha^2 \bar{v} v_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y} + \gamma^2 \bar{v} v_{\alpha\gamma} \right) - \text{Ri} T_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \frac{\partial w_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha \bar{U} w_{\alpha\gamma} + i\gamma p_{\alpha\gamma} + \left( \alpha^2 \bar{v} w_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \frac{\partial w_{\alpha\gamma}}{\partial y} + \gamma^2 \bar{v} w_{\alpha\gamma} \right) &= 0, \\ \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial t} + i\alpha \bar{U} T_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{T}}{dy} v_{\alpha\gamma} + \left( \alpha^2 \bar{\mu} T_{\alpha\gamma} - \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial T_{\alpha\gamma}}{\partial y} + \gamma^2 \bar{\mu} T_{\alpha\gamma} \right) &= 0, \\ i\alpha u_{\alpha\gamma} + \frac{\partial v_{\alpha\gamma}}{\partial y} + i\gamma w_{\alpha\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

### 3. СОБСТВЕННЫЕ МОДЫ И ОПТИМАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Решение вида

$$(u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}) = (\tilde{u}_{\alpha\gamma}, \tilde{v}_{\alpha\gamma}, \tilde{w}_{\alpha\gamma}, \tilde{T}_{\alpha\gamma}, \tilde{p}_{\alpha\gamma}) e^{\lambda t} \quad (3.1)$$

системы (2.7), где  $\lambda$  – комплексное число, а  $\tilde{f}_{\alpha\gamma}$  – комплексные амплитуды, зависящие только от  $y$ , называется ее собственной модой, отвечающей собственному значению  $\lambda$ . Подставляя (3.1) в (2.7), получаем следующую проблему собственных значений:

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{u}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{u}_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{U}}{dy} \tilde{v}_{\alpha\gamma} + i\alpha \tilde{p}_{\alpha\gamma} + \left( \alpha^2 \bar{v} \tilde{u}_{\alpha\gamma} - \frac{d}{dy} \bar{v} \frac{d\tilde{u}_{\alpha\gamma}}{dy} + \gamma^2 \bar{v} \tilde{u}_{\alpha\gamma} \right) &= 0, \\ \lambda \tilde{v}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{v}_{\alpha\gamma} + \frac{d\tilde{p}_{\alpha\gamma}}{dy} + \left( \alpha^2 \bar{v} \tilde{v}_{\alpha\gamma} - \frac{d}{dy} \bar{v} \frac{d\tilde{v}_{\alpha\gamma}}{dy} + \gamma^2 \bar{v} \tilde{v}_{\alpha\gamma} \right) - \text{Ri} \tilde{T}_{\alpha\gamma} &= 0, \\ \lambda \tilde{w}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{w}_{\alpha\gamma} + i\gamma \tilde{p}_{\alpha\gamma} + \left( \alpha^2 \bar{v} \tilde{w}_{\alpha\gamma} - \frac{d}{dy} \bar{v} \frac{d\tilde{w}_{\alpha\gamma}}{dy} + \gamma^2 \bar{v} \tilde{w}_{\alpha\gamma} \right) &= 0, \\ \lambda \tilde{T}_{\alpha\gamma} + i\alpha \bar{U} \tilde{T}_{\alpha\gamma} + \frac{d\bar{T}}{dy} \tilde{v}_{\alpha\gamma} + \left( \alpha^2 \bar{\mu} \tilde{T}_{\alpha\gamma} - \frac{d}{dy} \bar{\mu} \frac{d\tilde{T}_{\alpha\gamma}}{dy} + \gamma^2 \bar{\mu} \tilde{T}_{\alpha\gamma} \right) &= 0, \\ i\alpha \tilde{u}_{\alpha\gamma} + \frac{d\tilde{v}_{\alpha\gamma}}{dy} + i\gamma \tilde{w}_{\alpha\gamma} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

**Теорема 1.** Пусть  $\bar{U}(y)$ ,  $\bar{T}(y)$ ,  $\bar{v}(y)$ ,  $\bar{\mu}(y)$  удовлетворяют соотношениям (2.3), причем профили скорости и температуры являются нечетными функциями. Тогда спектр проблемы собственных значений (3.2) симметричен относительно вещественной оси, и если

$$(\lambda, \tilde{u}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{v}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{w}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{T}_{\alpha\gamma}(y), \tilde{p}_{\alpha\gamma}(y))$$

является решением проблемы (3.2), то

$$(\lambda^*, \tilde{u}_{\alpha\gamma}(-y)^*, \tilde{v}_{\alpha\gamma}(-y)^*, \tilde{w}_{\alpha\gamma}(-y)^*, \tilde{T}_{\alpha\gamma}(-y)^*, -\tilde{p}_{\alpha\gamma}(-y)^*)$$

также является решением проблемы (3.2), где \* означает комплексное сопряжение.

Отметим, что приведенная теорема доказывается комплексным сопряжением уравнений (3.2) и заменой переменных  $y \rightarrow -y$ . Она является непосредственным обобщением соответствующего утверждения, справедливого для классического течения Куэтта (см. [13]), т.е. ламинарного течения с  $\text{Ri} = 0$  и  $\bar{v} = 1/\text{Re} = \text{const}$ . Классическое течение Куэтта имеет линейный профиль продольной компоненты скорости  $\bar{U}(y) = y/2$ . Известно, что оно устойчиво при любом числе Рейнольдса, т.е. спектр, соответствующий проблеме (3.2), лежит строго в левой полуплоскости [14]. Доказательством последнего утверждения для проблемы (3.2) в условиях теоремы 1 мы не располагаем, но, как показывают приведенные ниже результаты расчетов, оно по-видимому верно.

Обозначим через  $r_{\max}^{\alpha\gamma}$  максимальную вещественную часть собственных значений проблемы (3.2) при фиксированных значениях волновых чисел  $\alpha$ ,  $\gamma$ , а через

$$r_{\max} = \max_{\alpha, \gamma} r_{\max}^{\alpha\gamma}$$

глобальную максимальную вещественную часть соответственно, где максимум берется по всем вещественным  $\alpha$  и  $\gamma$ . Собственную моду вида (3.1), на которой достигается  $r_{\max}$ , будем далее называть *глобальной ведущей*.

Определим среднюю плотность полной энергии возмущения вида (2.6) в момент времени  $t$  как

$$\mathcal{E}_t = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left( |u_{\alpha\gamma}|^2 + |v_{\alpha\gamma}|^2 + |w_{\alpha\gamma}|^2 + \frac{\text{Ri}}{d\bar{T}/dy} |T_{\alpha\gamma}|^2 \right) dy. \quad (3.3)$$

Максимально возможное увеличение

$$\Gamma^{\alpha\gamma}(t) = \max \frac{\mathcal{E}_t}{\mathcal{E}_0}$$

средней плотности полной энергии возмущения, где максимум берется по всем решениям системы (2.7), будем называть *максимальной амплификацией средней плотности* полной энергии при фиксированных значениях  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $t$ . Введем обозначения

$$\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \max_{t \geq 0} \Gamma^{\alpha\gamma}(t), \quad \Gamma_{\max} = \max_{\alpha, \gamma} \Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}, \quad (\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}}, t_{\text{opt}}) = \arg \max_{\alpha, \gamma, t} \Gamma^{\alpha\gamma}(t)$$

для максимальной амплификации средней плотности полной энергии при фиксированных волновых числах, глобальной максимальной амплификации и оптимальных значений волновых чисел и оптимального момента времени соответственно. Начальное возмущение, на котором достигается  $\Gamma_{\max}$ , будем называть *глобальным оптимальным возмущением*.

Для классического течения Куэтта известно (см. [15]), что глобальная максимальная амплификация достигается при значении продольного волнового числа  $\alpha$ , близкого к нулю, а глобальное оптимальное возмущение представляет собой крупномасштабные чередующиеся по направлению вращения вихри в поперечном сечении канала.

#### 4. ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ

Следуя работам [8]–[10], пространственную аппроксимацию по  $y$  системы уравнений (2.7) будем выполнять методом Галеркина-коллокаций, описанным в [16], [17]. В качестве узлов сетки для давления выберем корни  $y_1 < \dots < y_n$  производной  $L_{n+1}$  многочлена Лежандра степени  $n+1$ , а в качестве узлов сетки для компонент скорости и температуры – те же узлы вместе с точками  $y_0 = -1$  и  $y_{n+1} = 1$  (узлы Гаусса–Лобатто). В качестве базисных функций для компонент скорости и температуры с учетом нулевых граничных условий будем использовать элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа, представимые в виде

$$\psi_i(y) = \frac{(y^2 - 1)L'_{n+1}(y)}{(n+1)(n+2)(y - y_i)L_{n+1}(y_i)},$$

а для давления – элементарные интерполяционные многочлены Лагранжа, представимые в виде

$$\phi_i(y) = \frac{(y_i^2 - 1)L'_{n+1}(y)}{(n+1)(n+2)(y - y_i)L_{n+1}(y_i)}.$$

Таким образом, компоненты амплитуд возмущения будем аппроксимировать как

$$g(y, t) \approx \sum_{i=1}^n g_i(t) \psi_i(y), \quad p_{\alpha\gamma}(y, t) \approx \sum_{i=1}^n p_{\alpha\gamma, i}(t) \phi_i(y),$$

где  $g$  означает  $u_{\alpha\gamma}$ ,  $v_{\alpha\gamma}$ ,  $w_{\alpha\gamma}$  или  $T_{\alpha\gamma}$ . Коэффициенты  $g_i(t)$ ,  $p_i(t)$  при такой аппроксимации являются значениями аппроксимантов в узле  $y_i$ .

В качестве пробных функций для каждого из первых четырех уравнений в (2.7) будем использовать функции  $\psi_i(y)$ , а для уравнения неразрывности –  $\phi_i(y)$ . Для расчета фигурирующих в слабой постановке скалярных произведений будем использовать квадратурную формулу с узлами и весами Гаусса–Лобатто (см. [16]):

$$\int_{-1}^1 f(y) dy \approx \sum_{k=0}^{n+1} \kappa_k f(y_k), \quad \kappa_k = \frac{2}{(n+1)(n+2)L_{n+1}^2(y_k)},$$

точную для многочленов от  $y$  степени не выше  $2n+1$ .

Обозначим через  $K_0$  положительно определенную диагональную матрицу порядка  $n+2$  квадратурных коэффициентов, а через  $K$  – ее подматрицу порядка  $n$ , отвечающую внутренним узлам. Введем также следующие диагональные матрицы порядка  $n$ :  $U$ ,  $U_y$ ,  $N$ ,  $M$  и  $T_y$ , составленные соответственно из значений профиля  $\bar{U}$  и производной  $d\bar{U}/dy$  профиля продольной компоненты скорости основного течения, значений коэффициентов турбулентной вязкости  $\bar{\nu}$  и диффузии  $\bar{\mu}$  и значений производной  $d\bar{T}/dy$  профиля температуры основного течения в узлах  $y_1 < \dots < y_n$ , а также диагональные матрицы  $N_0$ ,  $M_0$  порядка  $n+2$ , составленные из значений коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии в узлах сетки  $y_0 < \dots < y_{n+1}$ . Для вычисления значений в узлах

$y_0 < \dots < y_{n+1}$  производной функции, заданной в узлах  $y_1 < \dots < y_n$  и удовлетворяющей нулевым граничным условиям, будем использовать матрицу дифференцирования  $D$  размера  $(n+2) \times n$ . Так же нам потребуется матрица проектирования  $P$  размера  $(n+2) \times n$ , восстанавливающая по значениям функции в узлах  $y_1 < \dots < y_n$  ее значения в узлах  $y_0 < \dots < y_{n+1}$ . Эффективные методы вычисления матриц  $D$  и  $P$  на основе интерполяционных многочленов Лагранжа описаны в [18].

Выполнив дискретизацию системы уравнений (2.7) методом галеркина-коллокаций, получим систему обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений, которую можно привести к следующему виду:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = J\mathbf{v} - Gp, \quad F\mathbf{v} = 0, \quad (4.1)$$

где

$$\mathbf{v} = E^{1/2}(u^T, v^T, w^T, T^T)^T, \quad E = \frac{1}{2} \text{diag}(K, K, K, \text{Ri} K T_y^{-1}),$$

а  $u, v, w, T, p$  суть  $n$ -компонентные векторные функции, компонентами которых являются соответственно значения амплитуд  $u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma}, p_{\alpha\gamma}$  в узлах  $y_1 < \dots < y_n$ . Отметим, что при выбранной нормировке дискретным аналогом функционала (3.3) средней плотности полной энергии будет  $\|\mathbf{v}\|_2^2$ .

Матрицы в (4.1) устроены следующим образом:

$$J = \begin{bmatrix} S_v & -U_y & 0 & 0 \\ 0 & S_v & 0 & R \\ 0 & 0 & S_v & 0 \\ 0 & -R & 0 & S_\mu \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} i\alpha I \\ G \\ i\gamma I \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F = -G^*,$$

где  $I$  – единичная матрица порядка  $n$ ,  $G = -K^{-1/2} D^T K_0 P K^{-1/2}$ ,

$$S_v = -i\alpha U - \alpha^2 N + L_v - \gamma^2 N, \quad S_\mu = T_y^{-1/2} (-i\alpha U - \alpha^2 M + L_\mu - \gamma^2 M) T_y^{1/2},$$

$$L_v = -K^{-1/2} D^T K_0 N_0 D K^{-1/2}, \quad L_\mu = -K^{-1/2} D^T K_0 M_0 D K^{-1/2}.$$

Отметим, что матрицы  $G$  и  $F$  являются дискретными аналогами оператора  $\partial/\partial y$  в градиенте давления и уравнении неразрывности соответственно,  $L_v$  и  $L_\mu$  – соответственно дискретные аналоги операторов

$$\frac{\partial}{\partial y} \bar{v} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \bar{\mu} \frac{\partial}{\partial y},$$

а  $R = \sqrt{\text{Ri}} T_y^{1/2}$ .

Из второго уравнения системы (4.1) следует, что ее решение принадлежит ядру матрицы  $F$ . После замены переменных  $\mathbf{v} = V\mathbf{u}$ , где  $V$  – прямоугольная матрица, столбцы которой образуют ортонормированный базис в ядре матрицы  $F$ , и умножения полученного уравнения слева на  $V^*$ , а также с учетом того, что  $G = -F^*$ , мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = H\mathbf{u}, \quad (4.2)$$

где  $H = V^* J V$  – квадратная комплексная матрица порядка  $3n+1$  при  $\alpha = \gamma = 0$  и порядка  $3n$  в остальных случаях. Подробное обоснование такого типа редукций линейных дифференциально-алгебраических систем дано в [19].

Для вычисления вектора значений амплитуды  $(u_{\alpha\gamma}, v_{\alpha\gamma}, w_{\alpha\gamma}, T_{\alpha\gamma})$  возмущения вида (2.6) в узлах расчетной сетки необходимо сделать обратную замену переменных

$$(u^T, v^T, w^T, T^T)^T = E^{-1/2} V \mathbf{u}. \quad (4.3)$$

### 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ МОД И ОПТИМАЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Каждой собственной паре  $(\lambda, \tilde{\mathbf{u}})$  матрицы  $H$  системы (4.2) соответствует (с точностью до погрешности аппроксимации) собственная мода (3.1) исходной системы (2.7). Ее амплитуда в узлах расчетной сетки может быть вычислена по формуле (4.3) с  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}$ .

В силу унитарной инвариантности второй нормы  $\|\mathbf{u}(t)\|_2^2 = \|\mathbf{v}(t)\|_2^2$ . Следовательно,  $\|\mathbf{u}(t)\|_2^2$  является дискретным аналогом средней плотности полной энергии соответствующего возмущения вида (2.6). Поскольку произвольное решение системы (4.2) представимо в виде

$$\mathbf{u}(t) = \exp\{tH\}\mathbf{u}^0,$$

с точностью до погрешности аппроксимации

$$\Gamma^{\alpha\gamma}(t) = \|\exp\{tH\}\|_2^2, \quad \Gamma_{\max}^{\alpha\gamma} = \max_{t \geq 0} \Gamma^{\alpha\gamma}(t).$$

Таким образом, вычисление максимальной амплификации средней плотности полной энергии возмущений сводится к вычислению для заданной квадратной комплексной матрицы  $H$  максимума функции  $\Gamma^{\alpha\gamma}(t)$  при  $t \geq 0$ . Для нахождения  $t = t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$ , дающего максимум  $\Gamma^{\alpha\gamma}(t)$  с заданной относительной точностью, будем использовать эффективный алгоритм, предложенный в [12] и основанный на малоранговой аппроксимации. После того как  $t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$  найдено, вычисляем максимальное сингулярное число  $\sigma_{\text{opt}}$  и отвечающий ему правый сингулярный вектор  $\mathbf{u}_{\text{opt}}$  матрицы  $\exp\{t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}H\}$ . Максимальная амплификация  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$  равна  $\sigma_{\text{opt}}^2$ , а амплитуда оптимального возмущения в узлах расчетной сетки может быть вычислена по формуле (4.3) с  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{opt}}$ .

Пусть  $\Lambda$  означает некоторое изолированное подмножество спектра матрицы  $H$ ,  $\mathcal{U}$  – инвариантное подпространство, отвечающее  $\Lambda$ , а  $P_{\mathcal{U}}$  – соответствующий спектральный проектор, т.е. проектор на  $\mathcal{U}$ , коммутирующий с матрицей  $H$ . Нас будет интересовать квадрат нормы

$$c_{\mathcal{U}}(t) = \|P_{\mathcal{U}} \exp\{tH\}\mathbf{u}_{\text{opt}}\|_2^2$$

проекции глобального оптимального возмущения на подпространство  $\mathcal{U}$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t_{\text{opt}}^{\alpha\gamma}$  и максимальная амплификация

$$\Gamma_{\mathcal{U}, \max} = \max_{t \geq 0} \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{U}, \|\mathbf{w}\|_2=1} \|\exp\{tH\}\mathbf{w}\|_2^2$$

на этом подпространстве. Эти величины мы будем вычислять на основе разложения Шура (см. [20])

$$H = [Q_1, Q_2] \begin{bmatrix} S_1 & S_{12} \\ 0 & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^* \\ Q_2^* \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  – верхние треугольные матрицы, причем  $\lambda(S_1) = \Lambda$ , а  $[Q_1, Q_2]$  – унитарная матрица, разбитая на два блока в соответствии с разбиением на блоки формы Шура. Максимальная амплификация на подпространстве  $\mathcal{U}$  равна

$$\Gamma_{\mathcal{U}, \max} = \max_{t \geq 0} \|\exp\{tS_1\}\|_2^2,$$

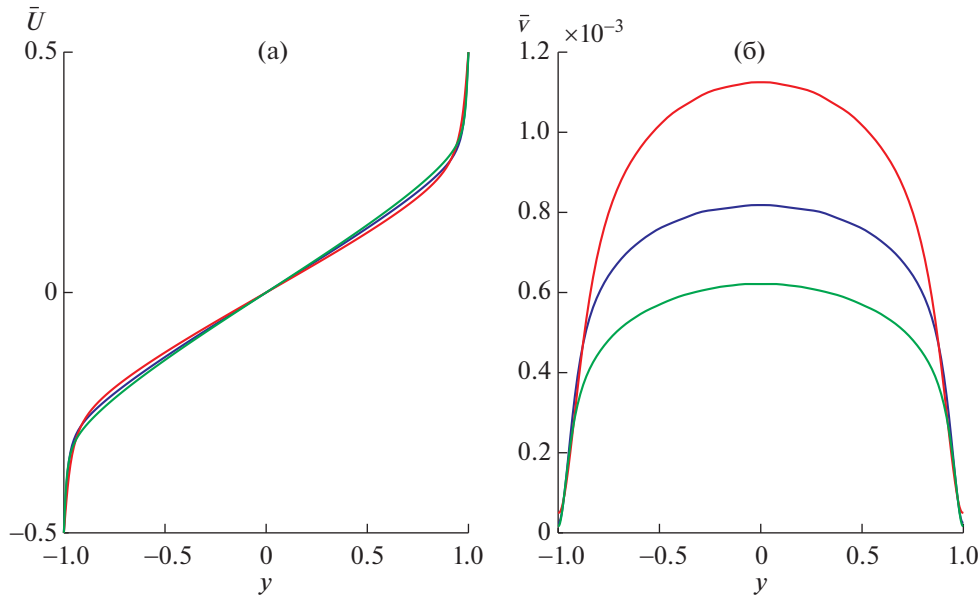
а

$$c_{\mathcal{U}}(t) = \left\| Q_1 \exp\{tS_1\} (Q_1^* - MQ_2^*) \mathbf{u}_{\text{opt}} \right\|_2^2,$$

где  $M$  – решение уравнения Сильвестра

$$MS_2 - S_1M = S_{12}. \quad (5.2)$$

Отметим, что уравнение (5.2) однозначно разрешимо, так как спектры матриц  $S_1$  и  $S_2$  не пересекаются.



**Фиг. 1.** Профили  $\bar{U}(y)$  (а) и  $\bar{v}(y)$  (б) основного течения при  $Ri = 0.03$  и  $Re = 2 \times 10^4$  (красным),  $4 \times 10^4$  (синим) и  $6 \times 10^4$  (зеленым).

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Профили продольной компоненты скорости  $\bar{U}(y)$  и температуры  $\bar{T}(y)$  основного течения, а также соответствующие коэффициенты турбулентной вязкости  $\bar{v}(y)$  и теплопроводности  $\bar{\mu}(y)$  возьмем из результатов работы [5], где было выполнено прямое численное моделирование стратифицированного турбулентного течения Куэтта в широких диапазонах чисел Рейнольдса  $1 \leq Re \times 10^{-4} \leq 6$  и Ричардсона  $0 \leq Ri \leq 0.12$ . В данной работе мы ограничимся рассмотрением устойчиво-стратифицированного течения при фиксированном числе Ричардсона  $Ri = 0.03$  и значениях числа Рейнольдса  $Re = 2 \times 10^4$ ,  $4 \times 10^4$  и  $6 \times 10^4$ . Профили  $\bar{U}(y)$  и  $\bar{v}(y)$  при указанных значениях  $Ri$  и  $Re$  изображены на фиг. 1. Профили  $\bar{T}(y)$  и  $\bar{\mu}(y)$  выглядят аналогично.

### 6.1. Сравнение ведущих мод и глобальных оптимальных возмущений

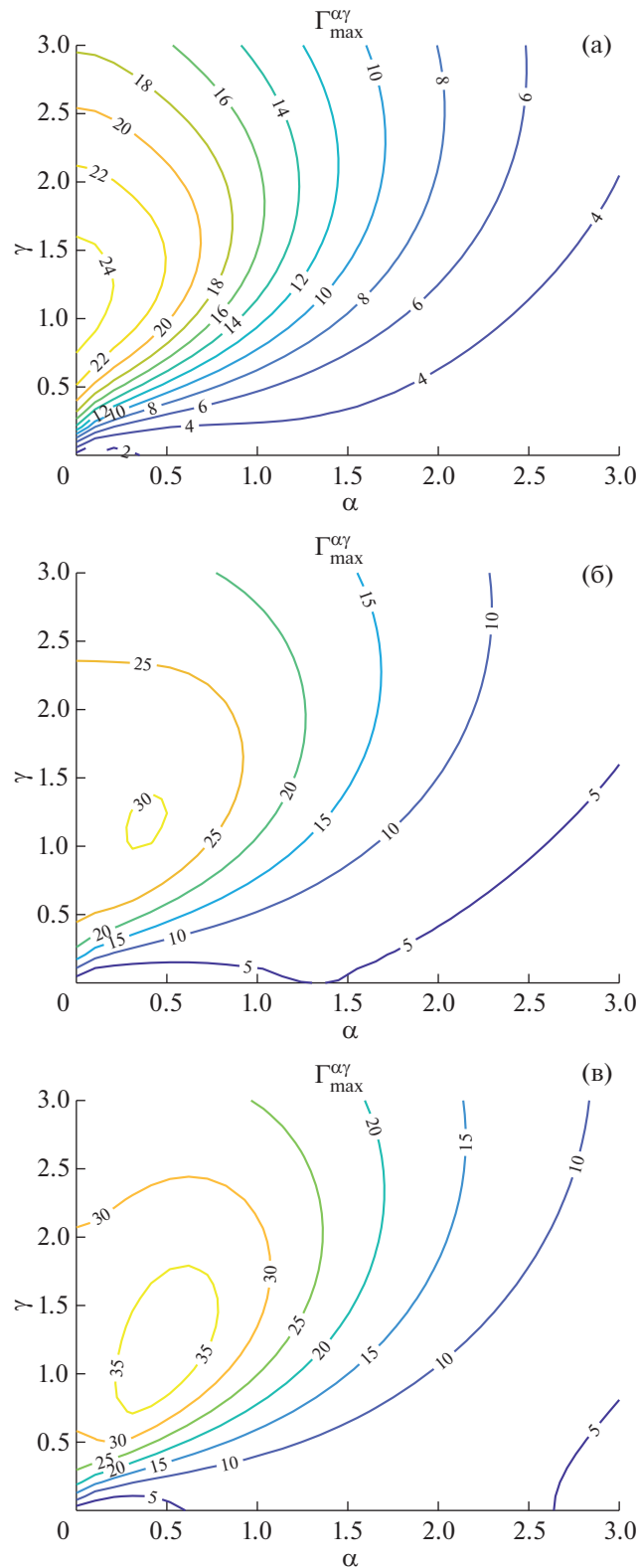
Линии уровня  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$  при рассматриваемых значениях чисел Ричардсона и Рейнольдса изображены на фиг. 2. Значения глобальной максимальной амплификации  $\Gamma_{\max}$ , оптимальных волновых чисел и оптимального времени  $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}}, t_{\text{opt}})$  приведены в табл. 1. Видно, что с увеличением числа Рейнольдса наблюдается увеличение  $\Gamma_{\max}$ . Глобальная максимальная амплификация достигается при ненулевом поперечном волновом числе  $\gamma$  при всех рассмотренных числах Рейнольдса и ненулевом продольном волновом числе  $\alpha$  при всех рассмотренных числах Рейнольдса, кроме минимального. Причем,

с увеличением числа Рейнольдса наблюдается увеличение оптимального продольного волнового числа  $\alpha_{\text{opt}}$ , а оптимальное поперечное волновое число  $\gamma_{\text{opt}}$  почти не меняется.

**Таблица 1.** Значения  $\Gamma_{\max}$ ,  $(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}}, t_{\text{opt}})$  и  $r_{\max}$  в зависимости от числа Рейнольдса  $Re$  при  $Ri = 0.03$

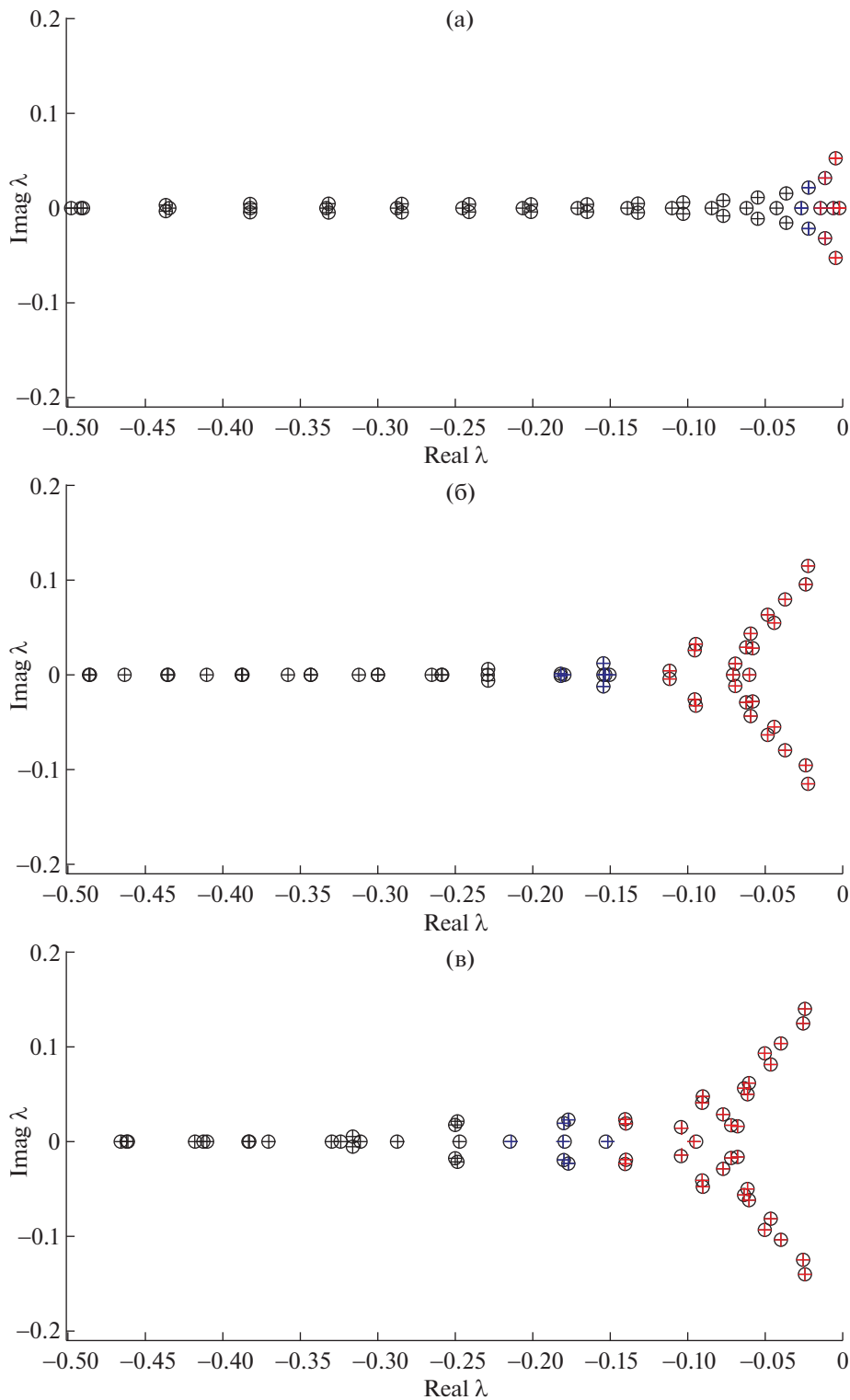
$Re$	$\Gamma_{\max}$	$(\alpha_{\text{opt}}, \gamma_{\text{opt}}, t_{\text{opt}})$	$r_{\max}$
$2 \times 10^4$	24.8383	(0.0000, 1.1165, 57.6)	-0.000847
$4 \times 10^4$	30.4001	(0.3890, 1.1606, 46.6)	-0.000683
$6 \times 10^4$	38.0889	(0.4664, 1.1424, 46.8)	-0.000553





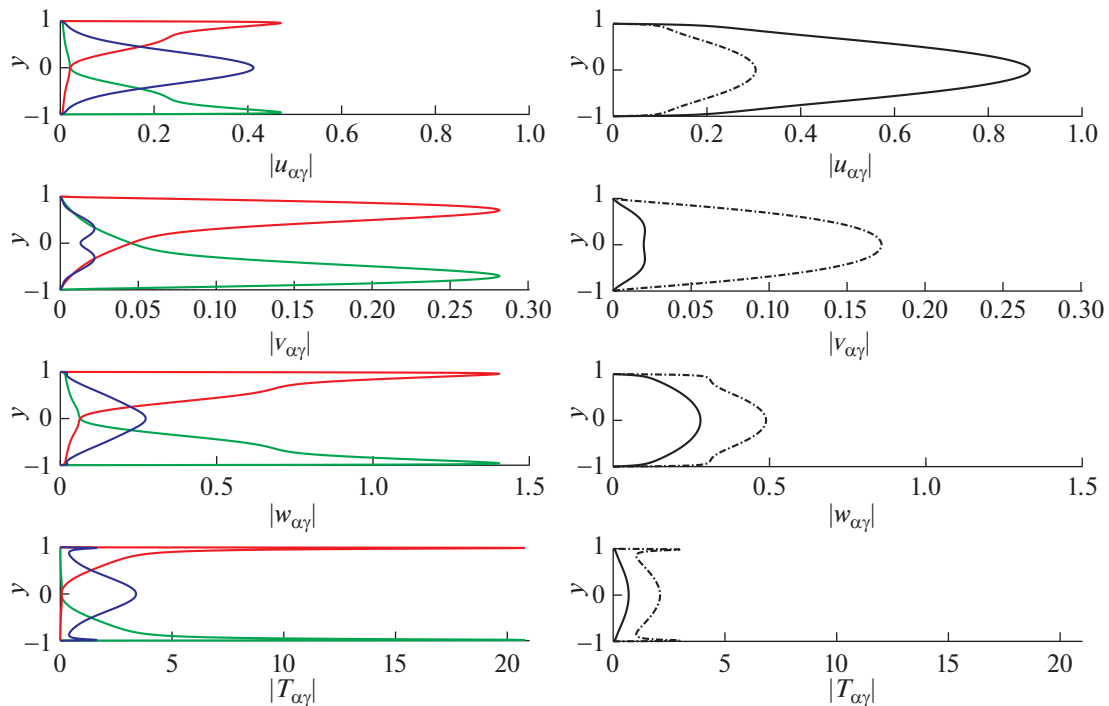
Фиг. 2. Линии уровня  $\Gamma_{\max}^{\alpha\gamma}$  в плоскости  $(\alpha, \gamma)$  при  $Ri = 0.03$  и  $Re = 2 \times 10^4$  (а),  $4 \times 10^4$  (б) и  $6 \times 10^4$  (в).

Отметим, что согласно [9], [10], оптимальные возмущения при  $\alpha = 0$  представляют собой ро-лики – крупномасштабные вихри приблизительно круглой формы в поперечном сечении канала, а оптимальные возмущения при  $\alpha > 0$  – крупномасштабные наклонные слоистые структуры.



**Фиг. 3.** Ведущая часть спектра матрицы  $H$  при  $Ri = 0.03$ ,  $Re = 2 \times 10^4$  (а),  $4 \times 10^4$  (б),  $6 \times 10^4$  (в) и оптимальных значениях волновых чисел  $(\alpha_{opt}, \gamma_{opt})$ , вычисленная на сетках с  $n = 100$  (“+”) и  $200$  (“o”). Подмножества  $\Lambda_{11}$  и  $\Lambda_{12}$  выделены красным и синим цветами соответственно.

Причем ролики развиваются во времени заметно медленнее, чем слоистые структуры, что соответствует приведенным в табл. 1 оптимальным временам. Таким образом, с увеличением числа Рейнольдса наблюдается существенное изменение структуры глобального оптимального возмущения.



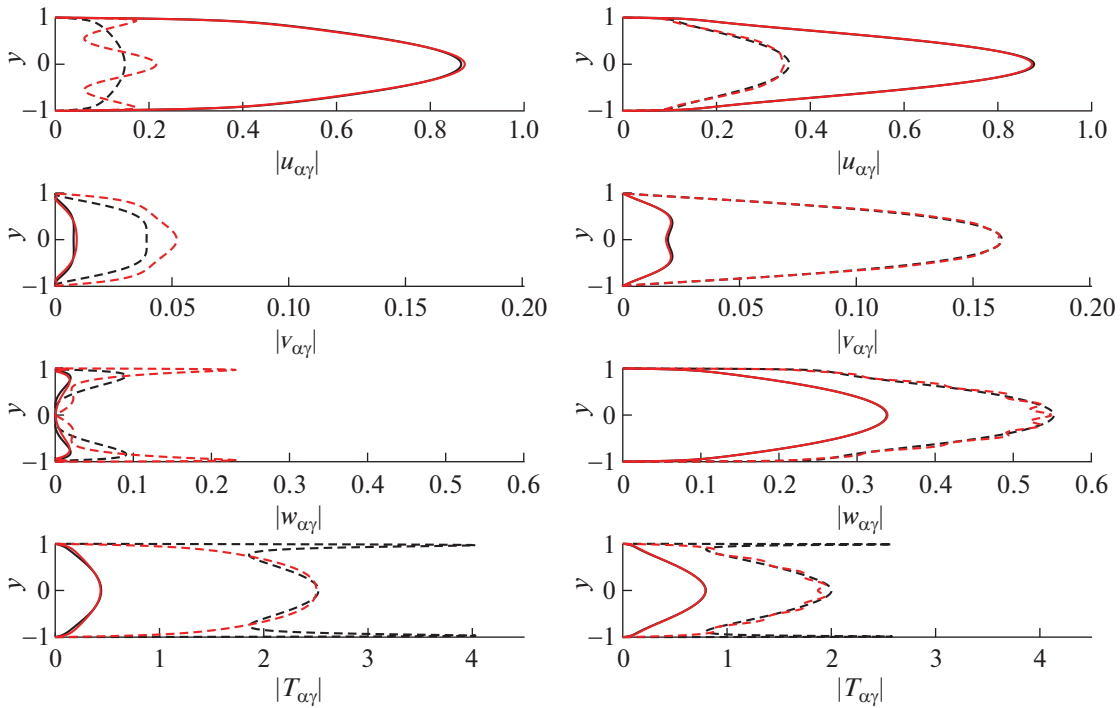
**Фиг. 4.** Результаты при  $Re = 4 \times 10^4$ ,  $Ri = 0.03$  и оптимальных значениях волновых чисел. Слева: абсолютные величины амплитуд компонент нормированной ведущей вещественной моды (синим) и нормированных ведущих комплексно-сопряженных мод (зеленым и красным — моды, отвечающие собственным значениям с положительными и отрицательными мнимыми частями соответственно); справа: абсолютные величины амплитуд компонент нормированного глобального оптимального возмущения в момент времени  $t = 0$  (штрихпунктир) и нормированного глобального оптимального возмущения в моменты времени  $t_{opt}$  (сплошная линия).

В табл. 1 также представлены результаты вычисления глобальной максимальной вещественной части  $r_{max}$  собственных значений матрицы  $H$ , т.е. инкременты нарастания глобальных ведущих мод. Видно, что как и глобальная максимальная амплификация, величина  $r_{max}$  возрастает с ростом числа Рейнольдса. Однако она остается отрицательной. Отметим, что величина  $r_{max}$  достигалась при значениях волновых чисел  $\alpha = \gamma = 0$  при всех рассмотренных числах Рейнольдса. Таким образом, глобальные ведущие моды существенно отличаются от глобальных оптимальных возмущений даже по волновым числам, т.е. глобальные ведущие моды не входят в состав глобальных оптимальных возмущений. Для сравнения ведущих мод и оптимальных возмущений при оптимальных значениях волновых чисел обратимся к фиг. 3 и 5.

На фиг. 3 изображена ведущая часть спектра матрицы  $H$  при различных числах Рейнольдса и значениях числа узлов сетки  $n = 100$  и  $200$ . В изображенных ведущих частях спектров кратных собственных значений обнаружено не было. Видно, что имеется сходимость по шагу сетки при  $n = 100$ . Все дальнейшие результаты расчетов мы будем приводить только для  $n = 100$ , поскольку расчеты при  $n = 200$  давали те же результаты с точностью до приводимых значащих цифр.

На фиг. 3 видно, что при минимальном из рассмотренных чисел Рейнольдса максимальную вещественную часть имеет вещественное собственное значение, а при больших числах Рейнольдса максимальную вещественную часть имеет комплексно-сопряженная пара собственных значений.

На фиг. 4 при  $Re = 4 \times 10^4$  сравниваются абсолютные величины амплитуд компонент нормированной ведущей вещественной моды и нормированных ведущих комплексно-сопряженных мод с абсолютными величинами амплитуд компонент нормированного глобального оптимального возмущения в моменты времени  $t = 0$  и  $t_{opt}$ . Видно, что как ведущая вещественная, так и ведущие комплексные моды существенно отличаются от оптимального возмущения как при  $t = 0$ , так и при  $t = t_{opt}$ .



**Фиг. 5.** Абсолютные величины амплитуд компонент нормированного глобального оптимального возмущения (черным) и оптимального на подпространстве  $\Lambda_1$  (красным) в моменты времени  $t = 0$  (штриховая) и  $t_{\text{opt}}$  (сплошная линия) при  $\text{Re} = 2 \times 10^4$  (слева) и  $\text{Re} = 6 \times 10^4$  (справа).

### 6.2. Спектральный состав глобальных оптимальных возмущений

Для каждого из рассматриваемых значений числа Рейнольдса и соответствующих оптимальных значений волновых чисел будем рассматривать инвариантные подпространства, отвечающие изолированным подмножествам спектра  $\lambda(H)$  матрицы  $H$  следующего вида:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \{\lambda \in \lambda(H) : \text{Real } \lambda > r_1\}, & \Lambda_2 &= \lambda(H) \setminus \Lambda_1, \\ \Lambda_{11} &= \{\lambda \in \lambda(H) : \text{Real } \lambda > r_2\}, & \Lambda_{12} &= \Lambda_1 \setminus \Lambda_{11}, \end{aligned}$$

где  $r_1 < r_2 < 0$ . Подмножества  $\Lambda_{11}$  и  $\Lambda_{12}$  выделены на фиг. 3 соответственно красным и синим цветами.

Пусть  $\Lambda$  означает одно из описанных выше подмножеств спектра,  $\mathcal{U}$  — инвариантное подпространство, отвечающее  $\Lambda$ ,  $\dim \mathcal{U}$  — его размерность, т.е. суммарная алгебраическая кратность собственных значений, входящих в  $\Lambda$ . Нас будет интересовать квадрат нормы  $c_{\mathcal{U}}(t)$  проекции глобального оптимального возмущения на  $\mathcal{U}$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t_{\text{opt}}$  и максимальная амплификация  $\Gamma_{\mathcal{U}, \text{max}}$  на этом подпространстве. Результаты вычисления этих величин для введенных подмножеств спектра приведены в табл. 2.

Из табл. 2 видно, что глобальное оптимальное возмущение лежит главным образом в подпространстве  $\mathcal{U}_1$ , поскольку квадрат нормы его проекции на дополнительное инвариантное подпространство  $\mathcal{U}_2$  при  $t = 0$  равен величине порядка  $10^{-2}$ , а при  $t_{\text{opt}}$  становится равным величине порядка  $10^{-4}$  либо меньше. При этом необходимая размерность подпространства  $\mathcal{U}_1$  растет (21, 37 и 52) с ростом числа Рейнольдса.

Учитывая, что  $\Gamma_{\mathcal{U}, \text{max}}$  примерно равно  $c_{\mathcal{U}}(t_{\text{opt}})/c_{\mathcal{U}}(0)$  для  $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1$ , можно также заключить, что проекция глобального оптимального возмущения на подпространство  $\mathcal{U}_1$  является в этом подпространстве оптимальным возмущением, т.е. имеет наибольшую амплификацию. В то же время любой вектор из дополнительного подпространства  $\mathcal{U}_2$  не может иметь амплификацию,

**Таблица 2.** Размерность инвариантного подпространства  $\mathcal{U}$ , максимальная амплификация  $\Gamma_{\mathcal{U},\max}$  и квадрат нормы проекции глобального оптимального возмущения на  $\mathcal{U}$  в моменты времени  $t = 0$  и  $t_{\text{opt}}$  в зависимости от числа Рейнольдса

Параметры	$\mathcal{U}$	$\dim \mathcal{U}$	$\Gamma_{\mathcal{U},\max}$	$c_{\mathcal{U}}(0)$	$c_{\mathcal{U}}(t_{\text{opt}})$
$\text{Re} = 2 \times 10^4$ $r_1 = -0.11$ $r_2 = -0.025$	$\mathcal{U}_1$	21	24.6367	1.0133	24.8382
	$\mathcal{U}_2$	279	1.0000	0.0133	0.0000
	$\mathcal{U}_{11}$	9	24.0670	1.0584	24.8702
$\text{Re} = 4 \times 10^4$ $r_1 = -0.24$ $r_2 = -0.13$	$\mathcal{U}_{12}$	12	1.6596	0.0685	0.0004
	$\mathcal{U}_1$	37	30.3495	1.0216	30.4001
	$\mathcal{U}_2$	263	1.0900	0.0216	0.0000
$\text{Re} = 6 \times 10^4$ $r_1 = -0.38$ $r_2 = -0.15$	$\mathcal{U}_{11}$	26	30.0807	3.2660	30.4001
	$\mathcal{U}_{12}$	11	1.0000	2.3251	0.0000
	$\mathcal{U}_1$	52	38.0686	1.0122	38.0889
	$\mathcal{U}_2$	248	1.1516	0.0122	0.0000
	$\mathcal{U}_{11}$	33	37.8930	10.5533	38.0889
	$\mathcal{U}_{12}$	19	1.0000	9.5607	0.0000

большую максимальной амплификации на этом подпространстве, которая максимальна в случае  $\text{Re} = 6 \times 10^4$  и равна 1.1516.

Для более детального спектрального анализа глобального оптимального возмущения мы разлагали инвариантное пространство  $\mathcal{U}_1$  в прямую сумму двух инвариантных подпространств  $\mathcal{U}_{11}$  и  $\mathcal{U}_{12}$  и рассматривали проекции глобального оптимального возмущения на каждое из этих подпространств. Результаты некоторых возможных вариантов таких разбиений показаны в остальной части табл. 2. Видно, что подскок глобального оптимального возмущения достигается за счет двух различных факторов. Во-первых, величина квадрата нормы его проекции на подпространство  $\mathcal{U}_{11}$  при  $t = 0$  больше единицы. Во-вторых, квадрат нормы этой проекции возрастает при  $t = t_{\text{opt}}$ , а проекция глобального оптимального возмущения на подпространство  $\mathcal{U}_{12}$  становится малозначимой. При максимальном числе Рейнольдса наиболее значим первый фактор, при минимальном – второй.

Интерес представляет и то, что максимальная амплификация векторов из подпространства  $\mathcal{U}_{11}$  немногим меньше амплификации глобального оптимального возмущения. Возникает вопрос, чем отличается глобальное оптимальное возмущение от оптимального возмущения из подпространства  $\mathcal{U}_{11}$ . Ответ на этот вопрос дает фиг. 5, где сравниваются абсолютные величины компонент этих оптимальных возмущений при  $t = 0$  и  $t_{\text{opt}}$ . Видно, что абсолютные величины сравниваемых оптимальных возмущений близки друг к другу в  $C$ -норме, причем близость увеличивается с ростом числа Рейнольдса, но глобальное оптимальное возмущение – значительно более гладкая функция (кроме его температурной компоненты в пристеночной области) даже при максимальном из рассмотренных значений числа Рейнольдса.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе установлено, что спектр уравнений стратифицированного турбулентного течения Куэтта, осредненных по горизонтальным пространственным переменным и линеаризованных относительно стационарного состояния, симметричен относительно вещественной оси и лежит строго в левой полуплоскости, т.е. все собственные моды устойчивы, а главная часть оптимального возмущения представляет собой линейную комбинацию большого числа мод, отвечающих собственным значениям с наибольшими вещественными частями. При этом число наиболее значимых мод растет с ростом числа Рейнольдса.

Авторы благодарны А.В. Глазунову и Е.В. Мортикову за предоставление данных прямого численного моделирования, интерес к данной работе и полезные обсуждения результатов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Drobinski P., Brown R., Flamant P., Pelon J.* Evidence of organized large eddies by ground-based doppler lidar, sonic anemometer and sodar // *Bound.-Layer Meteor.* 1988. V. 88. № 3. P. 343–361.
2. *Глазунов А.В.* Численное моделирование устойчиво-стратифицированных турбулентных течений над плоской и городской поверхностями. // *Изв. РАН, сер. ФАиО.* 2014. Т. 50. № 3. С. 271–281.
3. *Глазунов А.В., Мортиков Е.В., Барсков К.В., Каданцев Е.В., Зилитинкевич С.С.* О слоистой структуре устойчиво-стратифицированных турбулентных течений со сдвигом скорости // *Изв. РАН, сер. ФАиО.* 2019. Т. 55. № 4. С. 13–26.
4. *Sullivan P.P., Weil J.C., Patton E.G., Jonker H.J., Mironov D.V.* Turbulent winds and temperature fronts in large-eddy simulations of the stable atmospheric boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 2016. V. 73. № 4. P. 1815–1840.
5. *Mortikov E.V., Glazunov A.V., Lykosov V.N.* Numerical study of plane Couette flow: turbulence statistics and the structure of pressure-strain correlations // *Russ. J. Num. Anal. Math. Model.* 2019. V. 34. № 2. P. 119–132.
6. *Lilly D.K.* On the instability of Ekman boundary flow // *J. Atmos. Sci.* 1966. V. 23. № 5 P. 481–494.
7. *Brown A.R.* A secondary flow model for the planetary boundary layer // *J. Atmos. Sci.* 1970. V. 27. № 5. P. 742–757.
8. *Glazunov A.V., Zasko G.V., Mortikov E.V., Nечепуренко Ю.М.* Optimal disturbances of stably stratified turbulent Couette flow // *Doklady Physics.* 2019. V. 64. № 7. P. 308–312.
9. *Заско Г.В., Глазунов А.В., Мортиков Е.В., Нечепуренко Ю.М.* Крупномасштабные структуры стратифицированного турбулентного течения Куэтта и оптимальные возмущения: Препринты ИПМ им. Келдыша. 2019. № 63.
10. *Zasko G.V., Glazunov A.V., Mortikov E.V., Nечепуренко Ю.М.* Large-scale structures in stratified turbulent Couette flow and optimal disturbances // *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.* 2020. V. 35. № 2. P. 37–53.
11. *Бойко А.В., Клюшев Н.В., Нечепуренко Ю.М.* Устойчивость течения жидкости над оребренной поверхностью. М.: ИПМ им. Келдыша, 2016. 123 с.
12. *Nечепуренко Ю.М., Sadkane M.* A low-rank approximation for computing the matrix exponential norm // *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.* 2011. V. 32. № 2. P. 349–363.
13. *Schmid P.J., Henningson D.S.* Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer–Verlag, 2000.
14. *Romanov V.A.* Stability of plane-parallel Couette flow // *Func. Anal. Appl.* 1973. V. 7. P. 137–146.
15. *Butler K.M., Farrell B.F.* Optimal perturbations and streak spacing in wall-bounded turbulent shear flow // *Phys. Fluids A: Fluid Dynamics.* 1993. V. 5. № 3. P. 774–777.
16. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods. Fundamentals in single domains. Berlin: Springer, 2006.
17. *Canuto C., Hussaini M.Y., Quarteroni A., Zang T.A.* Spectral methods. Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics. Berlin: Springer, 2007.
18. *Weideman J.A.C., Reddy S.C.* A MATLAB Differentiation matrix suite // *ACM Transact. Math. Soft.* 2000. V. 26. № 4. P. 465–519.
19. *Нечепуренко Ю.М.* О редукции линейных дифференциально-алгебраических систем управления // *Докл. АН.* 2012. Т. 445. № 1. С. 17–19.
20. *Golub G.H., van Loan C.F.* Matrix computations. London: The John Hopkins Univer. Press, 1991.