
**ОБЫКНОВЕННЫЕ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

УДК 517.929

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

**ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ
В ВИДЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ¹⁾**

© 2021 г. С. А. Абрамов^{1,*}, М. А. Баркату^{2,**}, М. Петковшек^{3,***}

¹ 119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ ФИЦ ИУ РАН, Россия

² Лиможский университет, CNRS, XLIM UMR 7252, MATHIS 123,
Авеню А. Тома, 87060 Лимож седекс, Франция

³ Люблянский университет, Факультет математики и физики, Ядранска, 19, SI-1000 Любляна, Словения

*e-mail: sergeyabramov@mail.ru

**e-mail: moulay.barkatou@unilim.fr

***e-mail: Marko.Petkovsek@fmf.uni-lj.si

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.

Переработанный вариант 19.05.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Рассматриваются линейные разностные операторы, коэффициенты которых представляют собой бесконечные двусторонние последовательности над полем нулевой характеристики. Обнаруживается, что эти операторы лишены ряда свойств, например, для дифференциальных операторов над дифференциальными полями. Дополнительно показывается неразрешимость ряда задач, возникающих в связи с алгоритмическим представлением бесконечных последовательностей. Библ. 10.

Ключевые слова: линейные разностные операторы, бесконечные последовательности в роли коэффициентов, аннулирующие операторы, пространства решений, делимость, общие кратные операторов, неразрешимые алгоритмические проблемы.

DOI: 10.31857/S0044466921100021

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость рассмотрения линейных разностных операторов с коэффициентами в виде последовательностей (или классов эквивалентности последовательностей) возникает, в частности, в связи с универсальными расширениями Пикара–Вессю разностных полей (см. [1], [2]). То, что в качестве расширений разностных полей приходится рассматривать кольца, было отмечено в [3].

В [2, приложение А] уже упоминалось, что некоторые естественные свойства дифференциальных операторов над дифференциальными полями (см. [4]) не сохраняются для разностных операторов над кольцами, в частности, над кольцами последовательностей. Мы расширяем список таких свойств.

Статья построена следующим образом. Раздел 2 содержит предварительные сведения. В разд. 3 рассматривается вопрос, для любых ли m последовательностей $m \geq 0$ существует оператор порядка не выше m с пространством решений, порожденным этими последовательностями. Показано, что существуют такие последовательности, что любой оператор, аннулирующий любую из них, имеет бесконечномерное пространство решений. В том же разделе показано, что пространство решений наименьшего общего кратного операторов L_1, L_2 может быть бесконечномерным при том, что пространства решений исходных операторов L_1 и L_2 конечномерны. В заключительном разд. 4 обсуждается ряд вопросов разрешимости, связанных с алгоритмическим представлением бесконечных последовательностей: проверка обратимости оператора, делимости одного оператора на другой, существования ненулевого левого общего кратного двух данных операторов.

¹⁾Работа выполнена при финансовой поддержке С.А. Абрамова РФФИ (код проекта 19-01-00032-а); М. Петковшек Supported in part by the Ministry of Education, Science and Sport of Slovenia research programme P1-02.

Предварительный вариант этой работы был представлен в [5].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Ниже R обозначает кольцо двусторонних последовательностей с элементами – рациональными числами, сложение и умножение последовательностей определяется поэлементно; σ – автоморфизм на R : $\sigma c = d$ означает, что $d(k) = c(k + 1)$, $k = 0, \pm 1, \dots$

Обозначение $\mathbf{1}$ используется для последовательности, все элементы которой равны 1.

Если m – некоторое целое число, то δ_m (“дельта Кронекера”) будет обозначать последовательность

$$\delta_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мы будем также использовать последовательность $\omega_m \in R$:

$$\omega_m(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv m \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Кольцо $R[\sigma]$ – это кольцо линейных разностных операторов с коэффициентами в R . Порядок $\text{ord } L$ оператора $L \in R[\sigma]$ – это неотрицательное целое, равное порядку (косого) полинома L от σ (о косых полиномах или, иначе, о некоммутативных полиномах Оре, см. в [6], [7]); принимается соглашение, что $\text{ord } 0 = -\infty$. Для $L \in R[\sigma]$ через V_L обозначается линейное пространство над \mathbb{Q} всех $f \in R$, для которых $L(f) = 0$. В этом смысле $V_L = \ker L$.

3. О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ

3.1. Полезная лемма

Лемма 1. Пусть m – положительное целое, $L \in R[\sigma]$. Пусть $\text{ord } L \leq m$ и при этом $L(\omega_m) = 0$. Тогда $\dim V_L = \infty$.

Доказательство. Пусть L имеет вид

$$L = a_m(n)\sigma^m + \dots + a_1(n)\sigma + a_0(n) \in R[\sigma].$$

Если $L(\omega_m) = 0$, то для всех $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^m a_i(n)\omega_m(n+i) = \sum_{i=0}^m a_i(n) \begin{cases} 1, & \text{если } n+i \equiv m \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} = \\ &= \sum_{i=0}^m \begin{cases} a_i(n), & \text{если } n \equiv m-i \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} = a_{i_n}(n), \end{aligned} \tag{1}$$

где i_n – единственное $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ такое, что $n \equiv m - i \pmod{m+1}$. Таким образом, для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $i \in \{0, 1, \dots, m\}$ имеем

$$n \equiv m - i \pmod{m+1} \Rightarrow a_i(n) = 0.$$

Пусть теперь $c(n)$ – произвольная последовательность из R . Пусть $g(n) \in R$ – последовательность, для которой

$$g(n) = \begin{cases} c(n), & \text{если } n \equiv m \pmod{m+1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Множество (параметризованное последовательностью $c(n) \in R$) всех таких $g(n)$ является бесконечномерным подпространством \mathbb{Q} -линейного пространства R . Согласно (1) имеем

$$\sum_{i=0}^m a_i(n)g(n+i) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m \\ n+i \equiv m \pmod{m+1}}} a_i(n)g(n+i) = a_{i_n}(n)g(n+i_n) = 0$$

и, следовательно, равенство $L(g) = 0$ для всех таких g означает, что $\dim \ker L = \infty$.

Пример 1. Пусть $m = 2$. Тогда $\omega_2(3k) = \omega_2(3k + 1) = 0$, $\omega_2(3k + 2) = 1$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Если $L = a_2(n)\sigma^2 + a_1(n)\sigma + a_0(n)$ аннулирует $\omega_2(n)$, то

$$a_0(3k + 2) = a_1(3k + 1) = a_2(3k) = 0.$$

Оператор L аннулирует, например, и любую последовательность $g_s(n)$ такую, что $g_s(3k) = g_s(3k + 1) = 0$, $g_s(3k + 2) = k^s$. Последовательности $g_s(n)$, $s = 0, \pm 1, \dots$, линейно независимы над \mathbb{Q} .

3.2. Аннулирующие операторы

Предложение 1. Для любого положительного целого m существуют такие $f_1, \dots, f_m \in R$, что если для некоторого $L \in R[\sigma]$, $\text{ord } L \leq m$ выполнено

$$L(f_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

то $\dim V_L = \infty$.

Доказательство. Вследствие леммы 1 любые $f_1, \dots, f_m \in R$ с $f_1 = \omega_m$ обладают указанным свойством.

В связи с этим напомним, что в дифференциальном случае можно всегда найти такой оператор L , $\text{ord } L \leq m$, аннулирующий заданные f_1, \dots, f_m , что размерность пространства его решений равна числу линейно независимых элементов среди f_1, \dots, f_m .

Следующий пример иллюстрирует предложение 1 и показывает существование других (но схожих) путей нахождения f_1, \dots, f_m .

Пример 2. Рассмотрим последовательности f_1, f_2 , где

$$\begin{aligned} f_1(4k) = 0, \quad f_1(4k + 1) = f_1(4k + 2) = f_1(4k + 3) = 1, \\ f_2(4k + 1) = 0, \quad f_2(4k) = f_2(4k + 2) = f_2(4k + 3) = 1, \quad k = 0, \pm 1, \dots \end{aligned}$$

Если $L = a\sigma^2 + b\sigma + c$ аннулирует f_1 и f_2 , то

$$\begin{aligned} b(4k) = c(4k) = -a(4k), \\ b(4k + 1) = -a(4k + 1), \quad c(4k + 1) = 0, \\ a(4k + 2) = 0, \quad c(4k + 2) = -b(4k + 2), \\ b(4k + 3) = -c(4k + 3) = a(4k + 3). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $L(y) = 0$ для любой последовательности y такой, что выполняется

$$\begin{aligned} y(4k + 1) = y(2) - y(4k), \\ y(4k + 2) = y(4k + 3) = y(2), \end{aligned}$$

$y(2)$, $y(4k)$ играют роль произвольных постоянных.

Заметим, что лемма 1 может быть переформулирована в более сильной форме.

Лемма 1*. Существуют такие последовательности, что если оператор L (на его порядок не накладывается никаких ограничений) аннулирует хотя бы одну из них, то $\dim V_L = \infty$.

Доказательство. В самом деле, пусть последовательность c такова, что $c(n) = 1$, если $n = k^2$ для некоторого целого k , и $c(n) = 0$ в противном случае. Использование той же самой идеи, что и в доказательстве леммы 1, позволяет установить, что если $L(c) = 0$ и при этом $\text{ord } L = m$, то L аннулирует, например, любую последовательность d , для которой неравенство $d(n) \neq 0$ влечет $n = k^2$, $k > \sqrt{m}$.

(Общее соображение таково: пусть v является последовательностью положительных целых чисел $v(0), v(1), \dots$, для которой $v(k + 1) - v(k) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$: например, $v(k) = k^2$ или $v(k) = 2^k$. Определим последовательность c так: $c(n) = 1$, если $\exists_{k \geq 1} (|n| = v(k))$, и $c(n) = 0$ в противном случае. Каждая последовательность такого рода состоит из единиц и нулей, и при этом расстояние между соседними единицами неограниченно возрастает. Легко заметить, что последовательности вида ω_m этим свойством не обладают.)

Соответственно и предложение 1 может быть усилено отказом от ограничения $\text{ord } L \leq m$.

Пример 3. Пусть r – произвольное неотрицательное целое. Последовательность c_ν из единиц и нулей, определенная с помощью последовательности ν так, как это описано выше, аннулируется, например, любым оператором порядка r вида

$$\sigma^r(a)\sigma^r + b_{r-1}\sigma^{r-1}(a)\sigma^{r-1} + \dots + b_1\sigma(a)\sigma + b_0a,$$

где $a = 1 - c_\nu$ и $b_0, \dots, b_{r-1} \in R$. (Старший коэффициент оператора – ненулевая последовательность.) Такого вида оператор аннулирует любую последовательность вида gc_ν , $g \in R$.

Напомним, что в дифференциальном случае мы всегда можем найти такой оператор первого порядка, который аннулирует данный элемент c исходного дифференциального поля, и пространство решений которого одномерно.

3.3. Наименьшее левое общее кратное

Определение 1. Определим для операторов $L_1, L_2 \in R[\sigma]$ их *наименьшее левое общее кратное* $\text{lclm}(L_1, L_2)$ как множество всех таких операторов $L \in R[\sigma]$, что

- L не есть нулевой оператор,
- L является общим левым кратным для L_1 и L_2 ,
- не существует такого ненулевого оператора M , являющегося общим левым кратным для L_1 и L_2 , для которого $\text{ord } M < \text{ord } L$.

Замечание 1. Для некоторых $L \in R[\sigma]$ имеем $L \notin \text{lclm}(L, L)$. Например, пусть $L = a\sigma + 1$, где $a = \omega_1$. Если $f = \sigma(a)$, то $fa = 0$ и, таким образом, оператор $fL = fa\sigma + f = f$ является левым кратным для L . Так как $\text{ord } f = 0$ является наименьшим возможным порядком ненулевого оператора, то $f \in \text{lclm}(L, L)$, но $L \notin \text{lclm}(L, L)$, так как $\text{ord } L = 1$.

Заметим, что рассматриваемый оператор L обратим в $R[\sigma]$ и $L^{-1} = -a\sigma + 1$ в силу того, что $\sigma(a)a = a\sigma(a) = 0$. Отсюда $1 \in \text{lclm}(L, L)$.

Возможно также, что для двух заданных операторов $L_1, L_2 \in R[\sigma]$ их единственным общим левым кратным служит 0.

Пример 4. Рассмотрим два оператора нулевого порядка: L_1 – это последовательность $c(2k) = 0, c(2k + 1) = 1$, а L_2 – последовательность $d(2k) = 1, d(2k + 1) = 0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Единственным левым общим кратным будет нулевая последовательность. В самом деле, предположим, что $M_1L_1 = M_2L_2$, где i -е слагаемое оператора M_1 имеет вид $a_i\sigma^i$, а i -е слагаемое оператора M_2 , в свою очередь, – вид $b_i\sigma^i$, при этом a_i и b_i суть последовательности. Тогда i -е слагаемое произведения $M_1L_1 = M_1c$ имеет вид $a_i(\sigma^i c)\sigma^i = a_i(n)c(n + i)\sigma^i$, в то же время i -е слагаемое произведения $M_2L_2 = M_2d$ имеет вид $b_i(\sigma^i d)\sigma^i = b_i(n)d(n + i)\sigma^n$. В точности одна из двух величин $c(n + i), d(n + i)$ равна нулю для любых i и n . Если $M_1L_1 = M_2L_2$, то $a_i(n)c(n + i) = b_i(n)d(n + i) = 0$ для всех i и n , отсюда $a_i(\sigma^i c) = b_i(\sigma^i d)$ для всех i . Следовательно, $M_1L_1 = M_2L_2 = 0$.

Предложение 2. *Найдутся такие операторы первого порядка L_1, L_2 , что*

- (i) $\dim V_{L_1} = \dim V_{L_2} = 1$,
- (ii) *существует левое общее кратное L для L_1, L_2 , имеющее порядок 2,*
- (iii) *для любого такого левого общего кратного A для L_1, L_2 , что $\text{ord } A \leq 2$, выполнено $\dim V_A = \infty$.*

Доказательство. (i), (iii). Положим

$$L_1 = \sigma - b(n), \quad L_2 = \sigma - 1, \tag{2}$$

где $b(3k) = 1, b(3k + 1) = b(3k + 2) = -1, k = 0, \pm 1, \dots$ Тогда пространства V_{L_1}, V_{L_2} одномерны: V_{L_1} порождается последовательностью $s(n)$, для которой $s(3k) = s(3k + 1) = -1, s(3k + 2) = 1$, в то же время V_{L_2} порождается последовательностью $t(n)$, для которой $t(n) = 1$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Если $V_{L_1}, V_{L_2} \subseteq V_A$ для некоторого оператора A , то V_A содержит $f(n) = (s(n) + t(n))/2$. Для последовательности $f(n)$ имеем $f(3k) = f(3k + 1) = 0, f(3k + 2) = 1$. Из леммы 1 следует, что если $\text{ord } A \leq 2$, то $\dim V_A = \infty$. Итак, (i), (iii) доказаны.

(ii). Легко проверить, что

$$((1 - b(n))\sigma - 1 + b(n + 1))L_1 = ((1 - b(n))\sigma + b(n)b(n + 1) - b(n))L_2. \quad (3)$$

Очевидно, что левая и правая части равенства (3) являются ненулевыми общими кратными для L_1, L_2 .

Как следствие, операторы $L_1, L_2 \in R[\sigma]$ могут быть такими, что пространства V_{L_1}, V_{L_2} конечномерны, но $\dim V_L = \infty$ для $L \in \text{lclm}(L_1, L_2)$.

Замечание 2. Равенство

$$V_L = V_{L_1} + V_{L_2} \quad (4)$$

в общем случае не выполняется. Можно при этом вспомнить, что в дифференциальном случае, когда L_1, L_2 суть операторы над дифференциальным полем \mathbb{K} , равенство (4) выполнено при рассмотрении решений, принадлежащих расширению Пикара–Вессии поля \mathbb{K} . Это верно также для случая дифференциальных систем (см. [8]). Равенство (4) имеет место и в скалярном разностном случае, когда коэффициенты принадлежат разностному полю, обладающему некоторыми специальными свойствами (см. [9]). Предложение 2 и, равным образом, его следствие о том, что равенство (4) в общем случае не выполняется, сохраняют свою силу, если рассматривать решения как последовательности с элементами, принадлежащими некоторому расширению поля \mathbb{Q} . В самом деле, ведущий и трейлинг коэффициенты операторов (2) не обращаются в нуль и пространства решений операторов L_1 и L_2 одномерны. В то же время пространство решений оператора $\text{lclm}(L_1, L_2)$ содержит обсуждавшееся бесконечномерное пространство.

4. О НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМИЧЕСКИ НЕРАЗРЕШИМЫХ ЗАДАЧАХ

4.1. Следствие одного из классических результатов Тьюринга

Ниже мы доказываем неразрешимость некоторых алгоритмических задач, связанных с операторами, имеющими коэффициенты в R . Доказательства, главным образом, основаны на представленном ниже следствии одного из классических результатов Тьюринга о неразрешимости задачи проверки завершенности выполнения алгоритма (см. [10]):

Пусть M – множество, содержащее, по крайней мере, два элемента, например, 0 и 1. В этой ситуации не существует алгоритма ответа на вопрос, является ли заданная алгоритмически последовательность с элементами, принадлежащими M (односторонняя $c(0), c(1), \dots$ или двусторонняя $\dots, c(-1), c(0), c(1), \dots$), такой, что каждый ее элемент равен данному $v \in M$; то же самое – для случая последовательности, не имеющей ни одного равного v элемента.

4.2. Проверка обратимости и делимости в $R[\sigma]$

Проблема представления бесконечных последовательностей важна для компьютерной алгебры. Общая формула для элементов последовательности не всегда известна и, возможно, просто не существует. Одним из естественных способов представления является алгоритмический способ, когда последовательность задана алгоритмом вычисления элементов по их индексам. Мы называем эти последовательности *вычислимыми*.

Лемма 2. Проверка для произвольной вычислимой последовательности $c \in R$ и неотрицательного целого r истинности утверждения

$$\mathbf{P}(c, r) = \exists_{(k \in \mathbb{Z}, k \geq 0)} \quad \forall_{n \in \mathbb{Z}} \quad (c(n)c(n+r)c(n+2r)\dots c(n+kr) = 0)$$

является неразрешимой алгоритмической задачей.

Доказательство. Определим последовательность a : для $n \geq 0$ положим

$$a(n) = \begin{cases} c(0), & \text{если } n = 0, \\ 0, & \text{если } n > 0 \text{ и } c(n) = 0, \\ a(n-1) & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (5)$$

Для $n < 0$ положим $a(n) = 0$. Вычислимость последовательности c влечет вычислимость последовательности a . Последовательность a такова, что отсутствие нулевых элементов среди

$$c(0), c(1), \dots \quad (6)$$

имеет следствием $\forall_{k \in \mathbb{Z}, n \geq kr-1} (a(n)a(n+r)\dots a(n+kr) \neq 0)$. Если $c(m) = 0, m \geq 0$, то $k \geq \left\lceil \frac{m}{r} \right\rceil$. Мы имеем

$$\forall_{k \geq \left\lceil \frac{m}{r} \right\rceil, n \in \mathbb{Z}} (a(n)a(n+r)\dots a(n+kr) = 0),$$

так как произведение $a(n)a(n+kr)$ является нулевой последовательностью.

Таким образом, $\mathbf{P}(a, r)$ истинно, если и только если имеется хотя бы один нулевой элемент в (6).

Если некоторый алгоритм \mathcal{A} позволял бы проверять истинность \mathbf{P} для произвольной последовательности из R и произвольного неотрицательного целого r , то с помощью этого алгоритма мы могли бы проверять наличие нулевого элемента в данной последовательности вида (6), применив \mathcal{A} к последовательности

$$\tilde{c}(n) = \begin{cases} c(n), & \text{если } n \geq 0, \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Последовательность (6) имеет нулевой элемент, если и только если истинно $\mathbf{P}(\tilde{c}, r)$ (в качестве r может быть взято любое неотрицательное целое). Но алгоритмическая проверка существования нулевых элементов в произвольной вычислимой последовательности невозможна (п. 1). Поэтому \mathcal{A} не может существовать.

Предложение 3. Пусть r – неотрицательное целое. Не существует алгоритма проверки для произвольного $L \in R[\sigma], \text{ord } L = r$, является ли L обратимым в $R[\sigma]$.

Доказательство. Если $r = 0$, то L – это последовательность из R . Эта последовательность обратима, если и только если в ней нет нулевых элементов. Не существует алгоритма проверки этого свойства.

Пусть $r > 0$. Рассмотрим множество операторов вида

$$1 - c(n)\sigma^r, \tag{7}$$

где последовательность $c \in R$ такова, что $c(0) = 1$, и, следовательно, c – ненулевая последовательность. Порядок каждого из L вида (7) равен r . Если обратный L^{-1} для L существует, то существует и такое $k \geq 1$, что L^{-1} имеет вид

$$1 + c(n)\sigma^r + c(n)c(n+r)\sigma^{2r} + \dots + c(n)c(n+r)c(n+2r)\dots c(n+(k-1)r)\sigma^{(k-1)r} \tag{8}$$

при

$$\forall_{n \in \mathbb{Z}} (c(n)c(n+r)c(n+2r)\dots c(n+kr) = 0). \tag{9}$$

Таким образом, L вида (7) обратим, если и только если выполнено (9). Следовательно, если у нас есть алгоритм проверки обратимости, то мы можем воспользоваться им для проверки истинности (9). Но последнее, согласно лемме 2, является неразрешимой алгоритмической задачей.

Замечание 3. Пусть r – неотрицательное целое. Тогда существует обратимый оператор порядка r в $R[\sigma]$. В самом деле, если $r = 0$, то $\mathbf{1} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1}$. Иначе, пусть $c(n) = \delta_0(n)$. Имеем $(\mathbf{1} - c(n)\sigma^r)(\mathbf{1} + c(n)\sigma^r) = \mathbf{1}$.

Предложение 4. Пусть r, s – неотрицательные целые. Не существует алгоритма проверки для произвольных $L_1, L_2 \in R[\sigma], \text{ord } L_1 = r, \text{ord } L_2 = s$, верно ли, что L_1 делится справа на L_2 в $R[\sigma]$.

Доказательство. Если бы упомянутый алгоритм существовал, то мы могли бы использовать его для проверки обратимости данного оператора $L \in R[\sigma]$ порядка s . В самом деле, возьмем любой оператор M порядка r , например, положим $M = \sigma^r$. Очевидно, что L обратим, если и только если M и $M + 1$ оба делятся на L . Таким образом, если мы можем проверять делимость, то мы можем проверять и обратимость. Но, согласно предложению 3, последняя задача алгоритмически неразрешима.

4.3. О проверке существования ненулевого левого общего кратного

Обсудим задачу проверки существования ненулевого левого общего кратного для данных $L_1, L_2 \in R$.

Отметим, что отсутствие общего алгоритма проверки существования ненулевого левого общего кратного может быть доказано просто рассмотрением случая операторов нулевого порядка, т.е. случая последовательностей.

Предложение 5. *Не существует алгоритма проверки существования ненулевого левого общего кратного для данных последовательностей a, b .*

Доказательство. Во-первых, докажем, что не существует алгоритма проверки истинности утверждения

$$\forall_n (a(n)b(n) = 0) \quad (10)$$

для данных вычислимых последовательностей a, b . В самом деле, если бы мы имели такой алгоритм, то он позволил бы нам алгоритмически проверять, является ли данная последовательность a тождественно нулевой. (Такая проверка невозможна.) Мы можем взять $b = \mathbf{1}$, тогда (10) истинно, если и только если a тождественно нулевая.

Мы можем теперь доказать, что задача проверки существования ненулевого левого общего кратного неразрешима алгоритмически уже в случае операторов нулевого порядка, т.е. когда операторы L_1, L_2 суть некоторые последовательности a и b . Видно, что a и b имеют ненулевое общее кратное, если и только если не выполняется (10). Фактически, доказательство отсутствия ненулевого левого общего кратного при выполнении (10) аналогично доказательству из примера 4. Если для некоторого n произведение $a(n)b(n)$ не равно нулю, то последовательность ab является ненулевым левым общим кратным.

Отсюда следует, что алгоритм проверки существования ненулевого левого общего кратного для произвольных данных операторов L_1, L_2 невозможен. Мы докажем более сильное утверждение.

Предложение 6. *Пусть r, s – неотрицательные целые. Тогда не существует алгоритма для проверки существования ненулевого левого общего кратного для произвольных данных операторов $L_1, L_2 \in R[\sigma]$, $\text{ord } L_1 = r, \text{ord } L_2 = s$.*

Доказательство основывается на следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть a, b – ненулевые последовательности и r, s – неотрицательные целые, $r \geq s$. Тогда $a\sigma^r, b\sigma^s$ обладают ненулевым общим кратным если и только если (\Leftrightarrow) найдется такое целое m , что*

$$a(m) \neq 0, \quad b(m+r-s) \neq 0. \quad (11)$$

Доказательство леммы 3. \Rightarrow : Пусть $Ua\sigma^r = Wb\sigma^s$, где левая и правая части являются ненулевыми операторами. Пусть $u = \text{ord } U, w = \text{ord } W$. Можно считать, что

$$u+r = w+s \quad (12)$$

(в противном случае некоторые из старших слагаемых операторов U, W могли бы быть удалены из операторов). В этом предположении пусть $c\sigma^u$ и $d\sigma^w$ служат старшими слагаемыми операторов U и W . Ненулевые последовательности $c(n)a(n+u)$ и $d(n)b(n+w)$ одинаковы. Отсюда получаем, что равенство

$$c(n-u)a(n) = d(n-u)b(n+w-u)$$

выполняется для всех n . В соответствии с (12), последнее равенство может быть записано как

$$c(n-u)a(n) = d(n-u)b(n+r-s).$$

Поскольку левая и правая части последнего равенства суть ненулевые последовательности, существует такое целое m , что

$$c(m-u)a(m) = d(m-u)b(m+s-t) \neq 0.$$

Отсюда $a(m) \neq 0, b(m+s-t) \neq 0$.

\Leftarrow : Если m существует, то положим

$$U = \frac{1}{a(m)} \delta_m(n), \quad W = \frac{1}{b(m+r-s)} \delta_m(n) \sigma^{r-s}.$$

Получаем

$$Ua\sigma^r = Wb\sigma^s = \delta_m(n)\sigma^r.$$

Доказательство предложения 6. Прежде всего, докажем следующее. Пусть t — неотрицательное целое. Невозможен алгоритм \mathcal{A}_t проверки для произвольных $a, b \in R$ существования такого $m \in \mathbb{Z}$, что $a(m)b(m+t) \neq 0$. Покажем, что если бы такой алгоритм \mathcal{A}_t существовал, то мы могли бы с его помощью проверять, содержит ли произвольная вычислимая последовательность

$$c = c(0), c(1), \dots \quad (13)$$

хотя бы один ненулевой элемент. Но последняя алгоритмическая проблема неразрешима (см. п. 4.1), что будет означать невозможность \mathcal{A}_t .

Пусть последовательность c такая же, как в (13). Определим двусторонние последовательности a и b :

$$a(n) = \begin{cases} c(n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad b(n) = \begin{cases} c(n-t), & n \geq t, \\ 0, & n < t. \end{cases}$$

Тогда

$$b(n+t) = \begin{cases} c(n), & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad a(n)b(n+t) = \begin{cases} c(n)^2, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Как следствие, двусторонняя последовательность $a(n)b(n+t)$ содержит ненулевой элемент, если и только если односторонняя последовательность c^2 содержит ненулевой элемент. В свою очередь, последнее справедливо, если и только если односторонняя последовательность c содержит ненулевой элемент.

Ненулевые последовательности a, b вычислимы. Видно, что $m \in \mathbb{Z}$ такое, что $a(m)b(m+t) \neq 0$ существует, если и только если $c(m-2) \neq 0$. Таким образом, если бы алгоритм \mathcal{A}_t существовал, то для любой последовательности c можно было бы проверить алгоритмически существование ненулевого элемента в c . Но эта проблема алгоритмически неразрешима, как это следует из утверждения п. 4.1. Отсюда следует, что алгоритм \mathcal{A}_t не может существовать для каждого неотрицательного t . По лемме 3 это влечет справедливость предложения 4.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разностные уравнения являются тем фундаментом, на котором строятся современные численные методы. Представленные в статье результаты говорят о том, что разностные уравнения с коэффициентами в виде последовательностей являются сложными объектами, требующими весьма осторожного обращения с ними.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *van der Put M., Singer M.F.* Galois Theory of Difference Equations // LNM, Heidelberg V. 1666. Berlin: Springer, 1997.
2. *Hendriks P., Singer M.* Solving difference equation in finite terms // J. Symbolic Comput. 1999. V. 27. № 3. P. 239–259.
3. *Franke C.H.* Picard-Vessiot theory of linear homogeneous difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 108. P. 491–515.
4. *van der Put M., Singer M.F.* Galois Theory of Linear Differential Equations // Grundlehren der mathematischen Wissenschaften V. 328. Berlin: Springer, 2003.
5. *Abramov S., Barkatou M., Petkovšek M.* On infinite sequences and difference operators // Материалы 4-й международной конференции “Компьютерная алгебра”. М: ООО МАКС Пресс, 19–22, 2021.
6. *Ore O.* Theory of non-commutative polynomials // Ann. of Math. 1933. V. 34. P. 480–508.
7. *Bronstein M., Petkovšek M.* An introduction to pseudo-linear algebra // Theor. Comput. Sci. 1996. V. 157. P. 3–33.
8. *Abramov S., Barkatou M., Petkovšek M.* Matrices of Scalar Differential Operators: Divisibility and Spaces of Solutions // Comput. Math. and Math. Phys. 2020. V. 60. № 1. P. 109–118.
9. *van Hoeij M.* Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations // J. Pure Appl. Algebra. 1999. V. 139. P. 109–131.
10. *Turing A.* On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem // Proc. of the London Math. Soc. Ser. 2. 1936. V. 42. P. 230–265.