

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

## НЕЛОКАЛЬНЫЙ ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ В СВОБОДНОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ<sup>1)</sup>

© 2021 г. А. М. Гайфуллин<sup>1,\*</sup>, В. В. Жвик<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> 140180 Жуковский, М.о., ул. Жуковского, 1, ЦАГИ, Россия

\*e-mail: gaifullin@tsagi.ru

\*\*e-mail: VladZhvick@yandex.ru

Поступила в редакцию 12.02.2021 г.

Переработанный вариант 12.02.2021 г.

Принята к публикации 09.06.2021 г.

Рассматривается свободная осесимметричная незакрученная затопленная струя вязкой несжимаемой жидкости. При больших числах Рейнольдса определена неизвестная константа в асимптотическом решении Ландау–Румера–Гольдштика–Яворского уравнений Навье–Стокса, описывающем дальнее поле струи. Аналогичная константа определена в решении Лойцянского, которое получено в приближении пограничного слоя. Константы выражаются через распределение скорости в источнике струи с помощью нелокального закона сохранения. Библ. 30. Фиг. 2. Табл. 1.

**Ключевые слова:** закон сохранения, затопленная струя, асимптотика, инвариант.

**DOI:** 10.31857/S0044466921100057

### ВВЕДЕНИЕ

Автомодельная осесимметричная затопленная струя вязкой несжимаемой жидкости впервые описана Г. Шлихтингом [1] с помощью точного решения уравнений пограничного слоя, и позже Л.Д. Ландау [2] и Х.Б. Сквайром [3] с помощью точного решения уравнений Навье–Стокса. Данные решения выражают поле скоростей, порожденное постоянной силой, сосредоточенной в фиксированной точке жидкости, или, иначе говоря, точечным источником импульса. Расход такого источника равен нулю. Ю.Б. Румер [4] заметил, что решение Ландау является лишь первым приближением, пригодным для описания движения на больших расстояниях от источника струи конечного размера, и предпринял попытку построить второе приближение с заданным ненулевым расходом. Разыскивалось решение в виде разложения по целым обратным степеням расстояния до источника, и для определения второго члена разложения получено линейное неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение. Для этого уравнения получены однородное решение с неизвестным коэффициентом и неоднородное решение. Л.Г. Лойцянский построил [5] второе приближение для поля скоростей в незакрученной струе в приближении пограничного слоя в виде суммы решения Шлихтинга и малого на больших расстояниях возмущения с неизвестным коэффициентом. Отмечено [5], что данное решение является пределом решений Ландау и Румера при переходе к большим числам Рейнольдса. В действительности, построенный Лойцянский второй член разложения есть предел только однородного решения Румера. Если для однородного решения Румера вычислить расход через произвольную сферу, окружающую источник, то он окажется нулевым, следовательно, решение Лойцянского не содержит информацию о расходе источника струи. Между тем, в монографиях [6], [7] неизвестный коэффициент в решении Лойцянского определяется через расход жидкости в отверстии, хотя в работе [5] отмечена некорректность такого определения этой константы. Неоднородное решение Румера подверглось критике М.А. Гольдштика и Н.И. Яворского [8], доказавших, что решение в виде разложения по целым обратным степеням расстояния до источника не может одновременно

<sup>1)</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 19-01-00163).

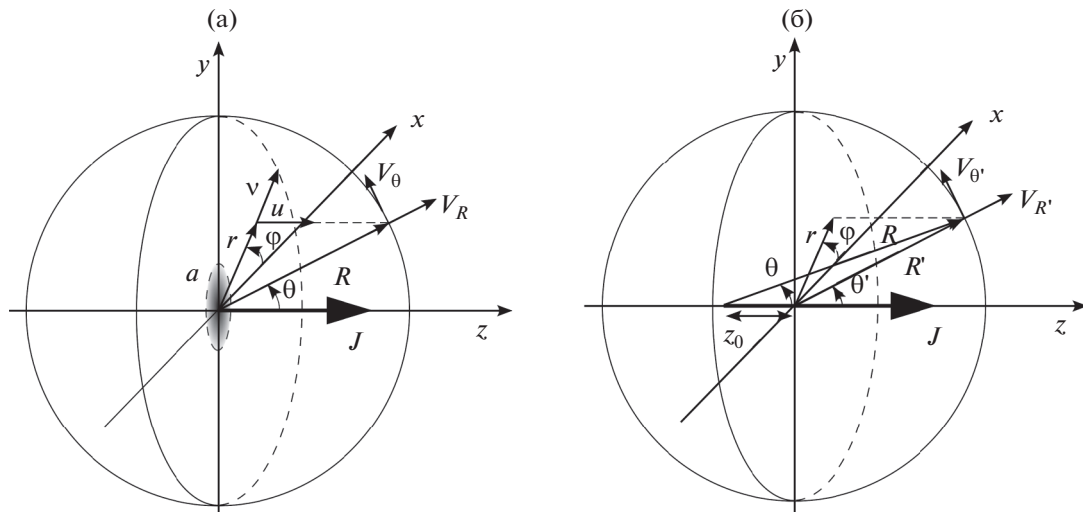
иметь конечный ненулевой расход и быть регулярным при отличном от нуля числе Рейнольдса. Показано [8], что если ввести в разложение слагаемое, пропорциональное логарифму расстояния, до источника, то можно построить регулярное решение с заданным расходом. При этом член разложения, отвечающий за расход, является решением обыкновенного дифференциального уравнения, которое отличается от уравнения [4] только неоднородной частью. Таким образом, однородное решение Румера с неизвестным коэффициентом присутствует и в решении Гольдштика–Яворского. Также установлено [8], что решение Лойцянского получается из решения Гольдштика–Яворского в пределе пограничного слоя, причем члены, зависящие от расхода источника, пропадают при предельном переходе. Кроме того, доказано, что следующие координатные приближения решения уравнений пограничного слоя являются некорректными, т.е. не следуют из решения уравнений Навье–Стокса при больших числах Рейнольдса.

Проблеме определения коэффициента при однородном решении Румера в асимптотике струи посвящены работы [4], [8]–[11]. Данная проблема получила название парадокса скрытых инвариантов [9], [10], поскольку сложилось мнение, что за эту константу может отвечать некоторый неизвестный закон сохранения. Предпринята попытка [8]–[10] построить инвариант струи, базируясь на сохранении потока боковой компоненты момента импульса через полусферу с плоским дном. Аналогичный подход использовался [12], [13] для построения инварианта закрученной струи. Данный подход неэффективен, поскольку для вычисления таких инвариантов в дальнейшем поле струи требуется знать поле течения во всей области, а не только на больших расстояниях от источника. Полученные “инварианты” (в отличие от интегралов расхода и импульса) не дают однозначной связи дальнего поля струи с характеристиками источника. Выяснен [4], [11] физический смысл однородного решения Румера. Оказывается, данное решение является вторым членом разложения решения Ландау в ряд по обратным степеням расстояния до начала координат, которое смещено относительно источника импульса в направлении импульса. При этом коэффициент при решении Румера выражается через величину смещения. В общем случае неавтономной струи всегда можно выбрать начало координат таким образом, чтобы данный коэффициент был равен нулю [4]. Предлагается [11] связать этот коэффициент с расходом, эжектируемой струей в начальном поперечном сечении. Данный результат получен из анализа решения Ландау, но не обоснован в общем случае.

Среди перечисленных решений представляется наиболее продуктивной идея Гольдштика о существовании скрытого закона сохранения. Под законом сохранения принято понимать дивергентное соотношение, которое равно нулю на решениях исследуемой системы уравнений. Методы вычисления законов сохранения обсуждаются в ряде монографий (см. [14]–[19]). Для систем уравнений, следующих из вариационного принципа, законы сохранения эффективно вычисляются с помощью теоремы Э. Нётер, если известна группа симметрий вариационного функционала [14], [15]. Однако неизвестно, можно ли построить вариационный функционал для уравнений Навье–Стокса. Достаточно трудоемкий метод прямого вычисления законов сохранения успешно применен в [16], [20], [21] к уравнениям динамики совершенного газа. В монографиях [17]–[19] описан алгоритм вычисления всех законов сохранения, применимый для широкого класса уравнений математической физики. Данный алгоритм позволяет получить набор интегрирующих множителей, которые приводят рассматриваемую систему к дивергентной форме.

Выше шла речь о локальных законах сохранения, т.е. о таких дивергентных выражениях, которые включают только независимые и зависимые переменные, входящие в рассматриваемые уравнения, а также производные любого порядка от зависимых переменных по независимым. В то же время запас законов сохранения может быть расширен путем интегриродифференциальной замены зависимых переменных в уравнениях. Полученные таким способом законы сохранения называются нелокальными. Методы отыскания соответствующих замен переменных изложены в [18], [19]. Примеры построения нелокальных законов сохранения для различных моделей математической физики приведены в [19], [22].

Локальные законы сохранения уравнений Навье–Стокса исчерпываются известными законами сохранения массы, импульса и момента импульса [23]. О нелокальных законах сохранения этих уравнений ничего не известно. В теории пограничного слоя хорошо известен инвариант плоской пристенной струи [24], [25], который следует из нелокального закона сохранения, зависящего от функции тока. Данный инвариант не имеет общезначимого смысла, поскольку его размерность соответствует произведению потока импульса на расход. Похожий закон сохранения вычислен [26] для уравнений пограничного слоя, описывающих осесимметричную задачу. Определен [27] неизвестный коэффициент в решении Лойцянского при помощи нелокального



Фиг. 1. (а) – Сферическая и цилиндрическая системы координат; (б) – смещение источника импульса.

закона сохранения [26]. Вопрос о существовании аналогичного закона сохранения в трехмерной пристенной струе является открытым [28].

В настоящей работе решение Гольдштика–Яворского для дальнего поля струи получено в элементарных функциях при больших числах Рейнольдса, и в этом решении определена константа при однородном решении Румера.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать стационарную осесимметричную незакрученную струю вязкой несжимаемой жидкости, которая вытекает из кругового отверстия радиуса  $a$  в пространство, затопленное той же жидкостью. Пусть  $U$  – максимальная скорость в отверстии. Определим безразмерные переменные:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}^*}{a}, \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{V}^*}{U}, \quad p = \frac{p^* - p_\infty^*}{\rho U^2}, \quad \text{Re} = \frac{Ua}{\nu},$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор точки поля течения с координатами  $(R, \theta)$ ,  $(z, r)$  соответственно в сферической и цилиндрической системах координат с началом в центре отверстия (фиг. 1а);  $\mathbf{V} = (V_R, V_\theta) = (u, v)$  – вектор скорости и его компоненты в сферической и цилиндрической системах координат (фиг. 1а);  $\rho$  – постоянная плотность жидкости;  $p$  – давление;  $p_\infty^*$  – давление в невозмущенной области;  $\text{Re}$  – число Рейнольдса;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости. Звездочкой отмечены размерные переменные. Струя распространяется вдоль оси  $z$ .

Функции  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ ,  $p(\mathbf{r})$  удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (\nabla \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \text{Re}^{-1} \Delta \mathbf{V}. \quad (1)$$

Граничные условия определяются распределением скорости  $u(0, r)$  в отверстии и затуханием всех компонент скорости на большом расстоянии от отверстия. На оси симметрии  $z$  выполняются условия  $v = 0$ ,  $\partial u / \partial r = 0$ .

При больших числах Рейнольдса струю можно рассматривать в приближении пограничного слоя:

$$\frac{\partial(ur)}{\partial z} + \frac{\partial(vr)}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \text{Re}^{-1} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Хотя струйное течение зависит от распределения скорости  $u(0, r)$  в отверстии, вдали от отверстия  $z \gg 1$  многие детали начального профиля скорости “забываются”, и течение зависит от некоторых интегральных характеристик источника струи. Как правило, для дальнего поля струи удается построить аналитическое решение, в которое входят неизвестные константы. Цель работы заключается в выяснении связи неизвестных констант в дальней асимптотике струи с интегральными характеристиками ее источника.

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Уравнение (2) позволяет ввести функцию тока  $\psi$ :

$$d\psi = urdr - vrdz = V_R R^2 \sin \theta d\theta - V_\theta R \sin \theta dR. \tag{4}$$

Далее предполагается, что нулевая линия тока, на которой  $\psi = 0$ , совпадает с полуосью  $z > 0$ .

Точное решение [2], [3] уравнений (1) описывает автомодельную струю, порожденную точечным источником импульса:

$$\psi^{(1)}(R, s) = \text{Re}^{-1} R \frac{2(1-s^2)}{A-s}, \tag{5}$$

где  $s = \cos \theta$ ; константа  $A$  связана с потоком осевого импульса  $J$  через произвольную сферу, окружающую источник, соотношением [29]:

$$J = 16\pi \text{Re}^{-2} A \left( 1 + \frac{4}{3(A^2-1)} - \frac{A}{2} \ln \left( \frac{A+1}{A-1} \right) \right). \tag{6}$$

Объемный расход жидкости  $Q^{(1)} = 2\pi\psi^{(1)}(R, -1)$  через произвольную сферу, окружающую источник, равен нулю. Причиной является нулевой размер источника. Действительно, поток импульса и расход являются величинами порядка  $J \sim \rho U^2 a^2$ ,  $Q \sim Ua^2$ . Если  $a \rightarrow 0$  при  $J = \text{const}$ , то  $Q \rightarrow 0$ .

В случае источника конечного размера решение (5) описывает дальнее поле струи, где  $R \gg 1$ . В следующих координатных приближениях появляется решение [4]  $c_0\psi^{(2)}(s)$ , где  $c_0$  – неизвестная константа,

$$\psi^{(2)}(s) = \text{Re}^{-1} (1-s^2) \frac{1-As}{A(A-s)^2}. \tag{7}$$

Физический смысл решения (7) разъясняется в работах [4], [11]. Перепишем решение (5) в сферических координатах  $(R', s')$ , соответствующих смещению начала координат вдоль оси  $z$  в точку  $z = z_0$  (см. фиг. 1б):

$$\psi^{(1)}(R, s) = \text{Re}^{-1} \frac{2R'^2(1-s'^2)}{A\sqrt{2z_0(R's' + z_0) + R'^2 - z_0^2 - R's' - z_0}},$$

где  $R_s = R's' + z_0$ ,  $R\sqrt{1-s^2} = R'\sqrt{1-s'^2}$ . Разложим полученное выражение в ряд Тейлора по степеням  $z_0/R'$  до линейного члена

$$\psi^{(1)}(R, s) = \psi^{(1)}(R', s') + 2Az_0\psi^{(2)}(s') + O\left(\left(\frac{z_0}{R'}\right)^2\right). \tag{8}$$

Таким образом,  $c_0 = 2Az_0$ , т.е. в случае точечного источника константа  $c_0$  определяется смещением  $z_0$  источника относительно начала координат. В случае источника конечного размера величина  $z_0$  неизвестна, и константа  $c_0$  должна определяться из других соображений. Заметим, что решение (7) имеет нулевой расход:  $Q^{(2)} = 2\pi c_0\psi^{(2)}(-1) = 0$ .

Рассмотрим теперь решения (5) и (7) в приближении пограничного слоя. Из (6) следует, что при  $\text{Re}^{-1} \rightarrow 0$  имеем

$$A = 1 + \frac{2}{\alpha^2} \text{Re}^{-2} + o(\text{Re}^{-2}), \quad \alpha = \sqrt{\frac{3J}{16\pi}}. \tag{9}$$

Подставим (9) в формулы (5), (7), выполним переход к цилиндрическим координатам  $(z, r)$ , где  $z = R \cos \theta$ ,  $r = R \sin \theta$ , затем выделим главные члены в разложениях полученных выражений по степеням  $\text{Re}^{-1} \rightarrow 0$  при фиксированных переменных  $z$  и  $\eta = \text{Re} \cdot r/z$ :

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= \Psi^{(1)}(z, \eta) + o(\text{Re}^{-1}), \\ \Psi^{(1)} &= \text{Re}^{-1} z \frac{\alpha^2 \eta^2}{1 + \alpha^2 \eta^2/4}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} c_0 \psi^{(2)} &= \beta \Psi^{(2)}(\eta) + o(\text{Re}^{-1}), \\ \Psi^{(2)} &= -\frac{\alpha^2 \eta^2}{4} \frac{1 - \alpha^2 \eta^2/4}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\beta = 2c_0 \text{Re}^{-1}. \quad (12)$$

Решения (10) и (11) получены соответственно в [1] и [5] с помощью уравнений пограничного слоя. Дальняя асимптотика струи построена [5] в виде:

$$\Psi(z, r) = \Psi^{(1)}(z, \eta) + \beta \Psi^{(2)}(\eta) + o(1), \quad (13)$$

$$u = u^{(1)} + \beta u^{(2)} + o(z^{-2}), \quad v = v^{(1)} + \beta v^{(2)} + o(z^{-2}), \quad (14)$$

где

$$u^{(1)} = \frac{2\alpha^2}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^2} \frac{\text{Re}}{z}, \quad v^{(1)} = \frac{\alpha^2 \eta (1 - \alpha^2 \eta^2/4)}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^2} \frac{1}{z}, \quad (15)$$

$$u^{(2)} = -\frac{1}{2} \alpha^2 \frac{1 - 3\alpha^2 \eta^2/4}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^3} \frac{\text{Re}^2}{z^2}, \quad v^{(2)} = -\frac{1}{2} \alpha^2 \eta \frac{1 - 3\alpha^2 \eta^2/4}{(1 + \alpha^2 \eta^2/4)^3} \frac{\text{Re}}{z^2}. \quad (16)$$

В монографиях [6], [7] константа  $\beta$  в решении (13) выражается через расход жидкости в отверстии

$$Q = 2\pi \int_0^1 u(0, r) r dr = 2\pi \Psi(0, +\infty) = 2\pi \beta. \quad (17)$$

Соотношение (17) базируется на предположении, что разложение (13) справедливо вплоть до отверстия  $z = 0$ , что в общем случае неверно [5].

Решение уравнений Навье–Стокса (1) при  $R \rightarrow +\infty$  с ненулевым расходом построено [8] в виде

$$\psi(R, s) = \psi^{(1)}(R, s) + B \psi^{(2)}(s) \ln R + \psi^{(3)}(s) + o(1), \quad (18)$$

где функции  $\psi^{(1)}$  и  $\psi^{(2)}$  описываются формулами (5) и (7),  $B$  – неизвестная константа, а  $\psi^{(3)}$  – неизвестная функция.

Подстановка (18) в уравнения (1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению на функцию  $\psi^{(3)}$ :

$$((1 - s^2)(A - s)^2 \psi^{(3)''})' + 6(A^2 - 1) \psi^{(3)} = (A - s)^2 f(s), \quad (19)$$

где

$$f(s) = C + B \left( 6 - \frac{6A^2 - 2}{A(A - s)} + \frac{3(A^2 - 1)}{(A - s)^2} - \frac{8A(A^2 - 1)}{(A - s)^3} + \frac{6(A^2 - 1)^2}{(A - s)^4} \right).$$

Зададим конечный расход условием  $\psi^{(3)}(-1) = Q/(2\pi)$ . Линейное неоднородное дифференциальное уравнение (19) относительно функции  $\psi^{(3)}$ , дополненное граничными условиями аналитичности решения в точках  $s = \pm 1$ , является самосопряженной краевой задачей. По теореме Фредгольма об альтернативе данная задача разрешима, если правая часть (19) ортогональна решению (7) однородной краевой задачи.

Заданный расход и условие ортогональности образуют систему двух линейных уравнений на константы  $B$  и  $C$  [8]:

$$\begin{aligned} & \left(9A^2 - 5 - 4A(A^2 - 1) \ln \frac{A+1}{A-1}\right) B + \left(A^2 + \frac{1}{3}\right) C = -\frac{3}{2\pi} (A^2 - 1) Q, \\ & \left(-44A^2 + \frac{196}{3} - \frac{8}{A^2} + \frac{(A^2 - 1)(22A^2 - 18)}{A} \ln \frac{A+1}{A-1}\right) B + \left(-4A^2 + \frac{20}{3} + 2 \frac{(A^2 - 1)^2}{A} \ln \frac{A+1}{A-1}\right) C = 0. \end{aligned}$$

Сформулированная краевая задача имеет бесконечно много решений в зависимости от  $c_0$ :

$$\psi^{(3)}(s) = c_0 \psi^{(2)}(s) + \varphi(s), \tag{20}$$

где  $\varphi(s)$  — частное решение неоднородной краевой задачи, найденное в квадратурах [8].

Построим координатное разложение решения (20) по степеням  $(s - 1)$  при  $s \rightarrow 1$  в виде

$$\psi^{(3)}(s) = K_1(s - 1) + K_2(s - 1)^2 + O((s - 1)^3). \tag{21}$$

При произвольном значении коэффициента  $K_1$  остальные члены ряда (21) определяются однозначно. Например,

$$K_2 = \frac{(6K_1 - B - C)A^3 + 2(B + C)A^2 - (11B + C + 6K_1)A + 2B}{4A(A - 1)^2}.$$

Задание коэффициента  $K_1$  эквивалентно заданию константы  $c_0$ .

Анализ полученной в [8] явной формулы для  $\varphi(s)$  затруднен ее чрезвычайно сложным видом. Представляется разумным исследовать асимптотику этого решения в практически важном случае больших чисел Рейнольдса. Тогда получим

$$B = \frac{9Q}{4\pi\alpha^2} \text{Re}^{-2}, \quad C = -\frac{45Q}{4\pi\alpha^2} \text{Re}^{-2}. \tag{22}$$

В выбранных безразмерных переменных  $Q = O(1)$ , поэтому в области внешнего течения  $1 - s = O(1)$  функция тока  $\varphi_o(s)$  является величиной порядка  $O(1)$  и удовлетворяет уравнению:

$$((1 - s^2)(1 - s)^2 \varphi_o'')' = 0.$$

Регулярное при  $s = -1$  решение этого уравнения имеет вид:

$$\varphi_o(s) = -\frac{Q}{4\pi} (s - 1). \tag{23}$$

Рассмотрим теперь внутреннюю область  $\eta = O(1)$ . Функция тока в этой области  $\varphi_i(\eta)$  подчиняется уравнению:

$$\begin{aligned} & -\eta^2(\alpha^2\eta^2 + 4)^4 \varphi_i'''' - 3\eta(\alpha^2\eta^2 - 4/3)(\alpha^2\eta^2 + 4)^3 \varphi_i''' + \\ & + 3(\alpha^4\eta^4 - 88\alpha^2\eta^2/3 - 16/3)(\alpha^2\eta^2 + 4)^2 \varphi_i'' + 256B\alpha^4\eta^3(\alpha^2\eta^2 - 2) = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Решение уравнения (24), удовлетворяющее условию  $\varphi_i(0) = 0$  и срачивающееся с внешним решением (23) при  $\eta \rightarrow +\infty$ , имеет вид:

$$\varphi_i(\eta) = 2c_0 \text{Re}^{-1} \Psi_2(\eta) + \text{Re}^{-2} \frac{Q}{\pi\alpha^2} \left( \frac{\alpha^2\eta^2}{8} + 3 \ln(1 + \alpha^2\eta^2/4) - \frac{\alpha^2\eta^2(7\alpha^2\eta^2 + 26)}{(\alpha^2\eta^2 + 4)^2} \right). \tag{25}$$

Найдем связь коэффициента  $K_1$  в ряде (21) с константой  $c_0$  в решении (25), приравняв главные члены разложения этих выражений при  $\eta \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \psi^{(3)}(\eta) &= -\frac{K_1 \text{Re}^{-2}}{2} \eta^2 + o(\eta^2), \\ \varphi_i(\eta) &= -\left( \frac{1}{2} c_0 \alpha^2 \text{Re}^{-1} + \frac{3Q \text{Re}^{-2}}{4\pi} \right) \eta^2 + o(\eta^2), \\ K_1 &= c_0 \alpha^2 \text{Re} + \frac{3Q}{2\pi}. \end{aligned}$$

Асимптотические формулы (23), (25) проверены сравнением с численным решением задачи Коши для уравнения (19) с условием (21).

### 3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Уравнение (2) выражает закон сохранения массы. Проинтегрируем данное уравнение по  $r$ :

$$\frac{dQ}{dz} = -2\pi \lim_{r \rightarrow +\infty} (vr), \quad Q(z) = 2\pi \int_0^{+\infty} ur dr. \quad (26)$$

Расход  $Q(z)$  сохраняется, если  $v = o(r^{-1})$  при  $r \rightarrow +\infty$ . Это требование нарушается для струи (10), (15), поэтому расход через поперечное сечение струи не сохраняется:  $Q(z) = 8\pi \operatorname{Re}^{-1} z$ .

Умножим уравнение (3) на  $r$  и сложим с уравнением (2), умноженным на  $u$ ,

$$\frac{\partial ru^2}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left( ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = 0. \quad (27)$$

Интегрируя уравнение (27) по  $r$ , получаем закон изменения потока осевой компоненты импульса через поперечное сечение струи:

$$\frac{dJ}{dz} = -2\pi \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad J(z) = 2\pi \int_0^{+\infty} u^2 r dr. \quad (28)$$

Поток импульса сохраняется, если  $u = O(r^{-1})$ ,  $v = O(r^{-1})$  при  $r \rightarrow +\infty$ , что выполняется для струи (10), (15).

Умножим уравнение (27) на величину  $\psi - \operatorname{Re}^{-1} z$  и приведем полученное выражение к дивергентному виду:

$$\frac{\partial}{\partial z} (ru^2(\psi - \operatorname{Re}^{-1} z)) + \frac{\partial}{\partial r} \left( (\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) \left( ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}^{-1} (ur)^2 \right) = 0.$$

Интегрируя данное уравнение по  $r$ , получаем закон изменения еще одной величины:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dz} = - \lim_{r \rightarrow +\infty} \left( (\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) \left( ruv - \operatorname{Re}^{-1} r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Re}^{-1} (ur)^2 \right), \\ E = \int_0^{+\infty} u^2 (\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) r dr. \end{aligned} \quad (29)$$

Интеграл (29) сохраняется, если  $u = o(r^{-1})$ ,  $v = O(r^{-1})$  при  $r \rightarrow +\infty$ . На решении (10), (15) инвариант (29) равен нулю, что позволяет использовать его для определения констант в следующих координатных приближениях.

Приведем выражение интеграла (29) в размерных переменных:

$$E^* = \int_0^{+\infty} u^{*2} (\psi^* - v z^*) r^* dr^*.$$

### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНСТАНТ $\beta$ И $c_0$

Определим константу  $\beta$  в решении (13) с помощью инварианта (29). Имеем

$$\begin{aligned} E &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} u^2 (\psi - \operatorname{Re}^{-1} z) \eta d\eta = \\ &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} (u^{(1)} + \beta u^{(2)} + o(z^{-2}))^2 (\Psi^{(1)} + \beta \Psi^{(2)} + o(1) - \operatorname{Re}^{-1} z) \eta d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} (u^{(1)2} + 2\beta u^{(1)} u^{(2)} + o(z^{-3})) (\Psi^{(1)} - \operatorname{Re}^{-1} z + \beta \Psi^{(2)} + o(1)) \eta d\eta = \\
 &= \operatorname{Re}^{-2} z^2 \int_0^{+\infty} (\beta u^{(1)2} \Psi^{(2)} + 2\beta u^{(1)} u^{(2)} (\Psi^{(1)} - \operatorname{Re}^{-1} z) + o(z^{-2})) \eta d\eta.
 \end{aligned}$$

Используя (10), (11), (12), (15), (16), получаем

$$E = \frac{2}{3} \beta \alpha^2, \quad \beta = \frac{3E}{2\alpha^2}, \quad c_0 = \frac{3E}{4\alpha^2} \operatorname{Re}. \quad (30)$$

При этом инвариант  $E$  вычисляется через профиль скорости в отверстии с помощью формулы (29), в которой следует положить  $z = 0$ .

Полученные результаты без труда обобщаются на случай турбулентной струи, поскольку усредненное по времени поле скорости в турбулентной струе в рамках модели постоянной турбулентной вязкости описывается теми же уравнениями [5], [7], что и ламинарная струя.

### 5. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Аппроксимируем уравнения (2), (3) полностью неявной конечно-разностной схемой второго порядка точности по обеим координатам:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \left( \frac{3u_k^{n+1} - 4u_k^n + u_k^{n-1}}{2\Delta z} + \frac{3u_{k-1}^{n+1} - 4u_{k-1}^n + u_{k-1}^{n-1}}{2\Delta z} \right) + \frac{2}{r_k + r_{k-1}} \frac{v_k^{n+1} r_k - v_{k-1}^{n+1} r_{k-1}}{\Delta r} = 0, \\
 &u_k^{n+1} \frac{3u_k^{n+1} - 4u_k^n + u_k^{n-1}}{2\Delta z} + v_k^{n+1} \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta r} - \operatorname{Re}^{-1} \left( \frac{u_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + u_{k-1}^{n+1}}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_k} \frac{u_{k+1}^{n+1} - u_{k-1}^{n+1}}{2\Delta r} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

где  $z^n = n\Delta z$ ,  $r_k = k\Delta r$ ,  $0 \leq n \leq n_{\max}$ ,  $1 \leq k \leq k_{\max}$ .

Аппроксимация уравнения (3) в узлах на оси струи при  $k = 0$  имеет вид:

$$u_0^{n+1} \frac{3u_0^{n+1} - 4u_0^n + u_0^{n-1}}{2\Delta z} - 2 \operatorname{Re}^{-1} \frac{u_1^{n+1} - 2u_0^{n+1} + u_{-1}^{n+1}}{\Delta r^2} = 0.$$

Численное решение приведенных разностных уравнений при граничных условиях  $u_1 = u_{-1}$ ,  $v_0 = 0$ ,  $u_{k_{\max}+1} = 0$  строится маршевым методом [30]. Начальный профиль скорости задается в узлах при  $n = -1$ ,  $n = 0$ . Использовались следующие варианты задания начального профиля скорости при  $r \leq 1$ : параболический профиль  $u(0, r) = 1 - r^2$  и линейный профиль  $u(0, r) = 1 - r$ . При  $r > 1$  выполняется  $u(0, r) = 0$ . Радиальная скорость в начальном сечении равна нулю. Результаты получены при  $\operatorname{Re} = 100$ ,  $\Delta z = \Delta r = 0.01$ ,  $r_{\max} = 300$ .

Верификация численного метода проводилась для параболического начального профиля скорости. Проведено сравнение профиля осевой скорости в сечении  $z = 300$ , полученного в расчете при  $(\Delta z, \Delta r) = (0.01, 0.01)$ , с профилями, полученными при  $(0.01, 0.02)$ ,  $(0.01, 0.04)$ ,  $(0.02, 0.01)$ ,  $(0.04, 0.01)$ . Отличие при  $r \leq 200$  не превосходило значений 0.006, 0.01, 0.01, 0.03% соответственно. Следует ожидать, что погрешность определения продольной скорости при дискретизации  $(0.01, 0.01)$  не больше 0.01%.

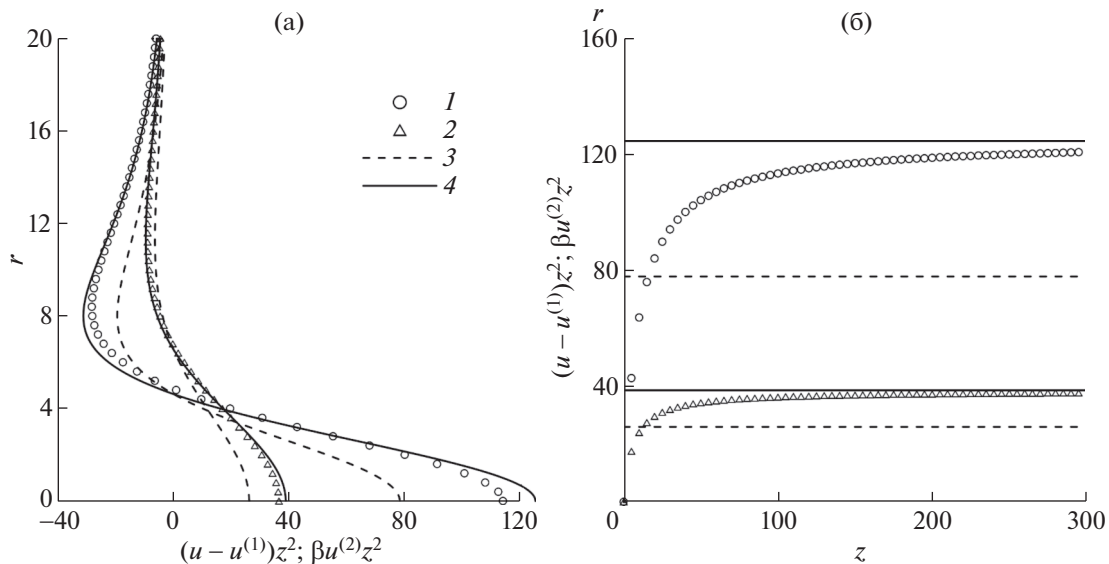
На каждом шаге по  $z$  проверялось сохранение интегралов (28) и (29). Для используемых начальных профилей скорости отклонение интегралов от начального значения не превосходит 2% вплоть до сечения  $z = 300$ .

В табл. 1 для используемых начальных профилей скорости приведены значения инвариантов  $J$ , (28),  $E$ , (29), а также значения константы  $\beta$ , определенной двумя способами: традиционным (17) и новым (30), основанным на интеграле (29).

**Таблица 1.** Зависимость параметров струи от начального профиля скорости

$u(0, r)$	$J$ , (28)	$E$ , (29)	$\beta$ , (17)	$\beta$ , (30)
$1 - r^2$	$\pi/3$	1/60	1/4	2/5
$1 - r$	$\pi/6$	13/2520	1/6	26/105





**Фиг. 2.** Сравнение отклонений численного и асимптотического (14) решений от решения (15) при  $z = 100$  (а),  $r = 0$  (б): 1 – численное решение для параболического начального профиля скорости; 2 – численное решение для линейного начального профиля скорости; 3 – решение (14), (17); 4 – решение (14), (30).

На фиг. 2 приведено сравнение численного и асимптотического (14) решений для профиля осевой скорости в сечении  $z = 100$  и для скорости на оси струи. Из всех решений вычтено решение (15). Легко видеть, что решение (14), (30) гораздо ближе к численному решению, чем (14), (17).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В свободных осесимметричных затопленных струях в приближении пограничного слоя сохраняется интеграл, аналогичный инварианту плоской пристенной струи. С помощью этого интеграла определяется неизвестная константа в дальней асимптотике незакрученной струи. Полученный результат легко обобщается на турбулентные струи. Предложенный метод определения константы является решением парадокса скрытых инвариантов, сформулированного М.А. Гольдштикком, при больших числах Рейнольдса. Остаются открытыми проблемы определения аналогичной константы в закрученных и неосесимметричных струях, и в струях при произвольном числе Рейнольдса.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schlichting H.* Laminare Strahlausbreitung // *Z. Angew. Math. Mech.* 1933. Bd. 13. H. 4. S. 260–263.
2. *Ландау Л.Д.* Об одном точном решении уравнений Навье–Стокса // *Докл. АН СССР.* 1944. Т. 43. № 7. С. 299–301.
3. *Squire H.B.* Some viscous fluid flow problems I: Jet emerging from a hole in a plane wall // *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.* 1952. V. 43. № 344. P. 942–945.
4. *Румер Ю.Б.* Задача о затопленной струе // *Прикл. матем. и механ.* 1952. Т. 16. № 2. С. 255–256.
5. *Лойцянский Л.Г.* Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // *Прикл. матем. и механ.* 1953. Т. 17. № 1. С. 3–16.
6. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматлит, 1962. 479 с.
7. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.
8. *Гольдштик М.А., Яворский Н.И.* О затопленных струях // *Прикл. матем. и механ.* 1986. Т. 50. № 4. С. 573–583.
9. *Goldshnik M.A.* Viscous-flow paradoxes // *Annual Review of Fluid Mechanics.* 1990. V. 22. № 1. P. 441–472.
10. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1989. 336 с.

11. *Яворский Н.И.* О скрытом интеграле сохранения в теории затопленных струй // XII Всеросс. съезд по фундаментальным проблемам теор. и прикл. механ. Аннотации докладов. 19–24 августа 2019 г. Уфа, 2019. С. 92.
12. *Гольдштик М.А.* О закрученных струях // Известия АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1979. № 1. С. 26–35.
13. *Жвик В.В.* Инварианты и асимптотики осесимметричных закрученных затопленных струй // Прикл. механ. и техн. физ. 2020. Т. 61. № 2. С. 92–108.
14. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1978. 400 с.
15. *Ибрагимов Н.Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Физматлит, 1983. 280 с.
16. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
17. *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ. М.: Мир, 1989. 639 с.
18. *Бочаров А.В., Вербовецкий А.М., Виноградов А.М., Дужин С.В., Красильщик И.С., Самохин А.В., Торхов Ю.Н., Хорькова Н.Г., Четвериков В.Н.* Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Под ред. А.М. Виноградова, И.С. Красильщика. М.: Изд-во “Факториал Пресс”, 2005. 380 с.
19. *Krasil'shchik J., Verbovetsky A., Vitolo R.* The Symbolic Computation of Integrability Structures for Partial Differential Equations. Springer, 2018. 263 p.
20. *Терентьев Е.Д., Шмыглевский Ю.Д.* Полная система дивергентных уравнений динамики совершенного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1975. Т. 15. № 6. С. 1535–1544.
21. *Терентьев Е.Д., Шмыглевский Ю.Д.* Полная система дивергентных уравнений электромагнитной динамики совершенного газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т. 16. № 3. С. 725–737.
22. *Krasil'shchik I.* Nonlocal Conservation Laws of PDEs Possessing Differential Coverings // Symmetry. 2020. V. 12. 1760.
23. *Gusyatnikova V.N., Yumaguzhin V.A.* Symmetries and Conservation Laws of Navier–Stokes Equations // Acta Applicandae Mathematicae. 1989. V. 15. P. 65–81.
24. *Акатнов Н.И.* Распространение плоской ламинарной струи вязкой жидкости вдоль твердой стенки // Труды Ленинградского политехнического института. 1953. № 5. С. 24–31.
25. *Glauert M.V.* The wall jet // J. Fluid Mechanics. 1956. V. 1. P. 625–643.
26. *Naz R.* Conservation laws for laminar axisymmetric jet flows with weak swirl // Applicable Analysis: An International Journal. 2012. V. 91. № 5. P. 1045–1052.
27. *Гайфуллин А.М., Жвик В.В.* Связь дальней асимптотики струи с профилем скорости в отверстии // Докл. АН. Физика, технические науки. 2020. Т. 495. С. 46–49.
28. *Krechetnikov R., Lipatov I.* Hidden invariances in problems of two-dimensional and three-dimensional wall jets for Newtonian and non-Newtonian fluids // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2002. V. 62. № 6. P. 1837–1855.
29. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учебное пособие. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
30. *Hornbeck R.W.* Numerical Marching Techniques for Fluid Flows with Heat Transfer. Washington: D.C. NASA, 1973. V. 297. 349 p.