ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 10, с. 1672–1683

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 519.634

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

РАСЧЕТ ОСАЖДЕНИЯ СТРУИ КАПЕЛЬНОЙ ВЛАГИ МОМЕНТНЫМ МЕТОДОМ

В. Н. Котеров[1,*], Р. И. Романенко[2,]**

[1] 119333 Москва, Вавилова, 44, корп. 2, ФИЦ ИУ РАН, Россия

[2] 141701 Долгопрудный, М.о., Институтский пер., 9, МФТИ(ГУ), Россия

*e-mail: vkoterov@yandex.ru

**e-mail: romanenko.ri@phystech.edu

Поступила в редакцию 03.02.2021 г.
Переработанный вариант 07.03.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

На примере задачи расчета осаждения шлейфа мелкодисперсной капельной влаги, образованного компактным источником в потоке воздуха, проводится верификация моментного метода приближенного решения уравнения переноса и диффузии полидисперсной среды. Формулируется способ замыкания бесконечной цепочки моментных уравнений. Результаты расчетов уравнения переноса и диффузии сравниваются с расчетами, выполненными по двухмоментному и трехмоментному приближениям. Библ. 15. Фиг. 8. Табл. 1.

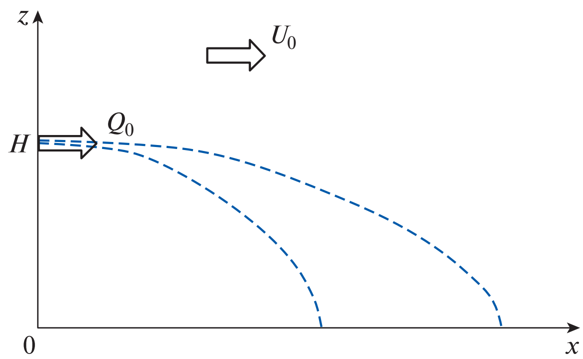
Ключевые слова: полидисперсная среда, уравнение переноса и диффузии, капельная влага, метод моментов.

DOI: 10.31857/S0044466921100082

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи расчета переноса воздушным потоком капельной влаги уже давно рассматриваются, например, при математическом моделировании зарождения и формирования осадков в облачных структурах. Подобные задачи возникают также при попытках описания распространения аэрозолей, распыляемых наземным или воздушным источниками. Еще одно интересное явление, к которому имеет отношение настоящая работа, – это возникновение и интенсивный перенос капельной влаги в нижних бьефах крупных гидроэлектростанций при работе их водосбросных сооружений. Математическая модель (см. [1]–[6]), описывающая данное явление, включает, в частности, блок расчета распространения капельной влаги в потоке воздуха. Перенос капельной влаги достаточно аккуратно описывается уравнением переноса и диффузии, которому удовлетворяет функция распределения капель по их размерам. При этом, однако, необходимо рассматривать четырехмерное пространство (три пространственные координаты, плюс переменная, определяющая радиусы капель), что на практике требует длительных расчетов с использованием высокопроизводительных вычислительных комплексов. Для сокращения расчетного времени в модели (см. [1]–[6]) была использована приближенная методика, основанная на применении метода моментов, в двухмоментном и трехмоментном приближении.

Настоящая работа посвящена верификации моментного метода расчета уравнения переноса и диффузии капельной влаги путем сравнения результатов расчетов моментных уравнений с “точным” расчетом уравнения переноса и диффузии. При этом рассматривается одна из простейших задач в двумерной пространственной постановке, а именно, расчет осаждения двумерного (плоского) шлейфа мелкодисперсной капельной влаги, образованного компактным источником в потоке воздуха.



Фиг. 1. Схема плоского капельного шлейфа, образованного неподвижным источником влаги в потоке воздуха.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим плоский шлейф осаждающейся капельной влаги, образованный компактным неподвижным источником, находящимся на высоте H над подстилающей поверхностью в однородном потоке воздуха, имеющем скорость U_0 (фиг. 1).

Будем полагать, что количество жидкой фазы, содержащейся в единице объема среды невелико, а влияние процессов испарения/конденсации, сопровождающихся поглощением/выделением скрытой теплоты испарения, пренебрежимо мало. В этом случае можно считать, что функция распределения $f(a)$ капель по размерам (радиусам a) удовлетворяет следующему уравнению переноса и диффузии:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial U_0 f}{\partial x} + \frac{\partial w_s f}{\partial z} + \frac{\partial \dot{a} f}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial x} A_x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} A_z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad q = \int_0^\infty f(a) da. \tag{1}$$

Здесь и далее q — масса воды в единице объема (так называемая водность среды), w_s — скорость осаждения капель в гравитационном поле, $\dot{a}$ — скорость изменения радиуса капель, A_x и A_z — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии, принимаемые далее постоянными.

Задача рассматривается в области $x \geq 0$, $z \geq 0$, $a \geq 0$. Наличие источника капельной влаги, образующего водно-воздушный шлейф, учитывается следующим краевым условием:

$$f = f_0 b(a/a_m)\delta(z/H - 1) \quad \text{при} \quad x = 0, \quad \int_0^\infty b(a')da' = 1, \quad \int_0^\infty \delta(z' - 1)dz' = 1. \tag{2}$$

Здесь $b(a/a_m)$ — нормированное на единицу распределение источника капельной влаги по радиусам капель (a_m — мода распределения), $\delta(z/H - 1)$ — нормированная на единицу достаточно узкая финитная функция, описывающая распределение функции f в начальном сечении шлейфа (H — высота источника над подстилающей поверхностью), f_0 — нормировочный множитель.

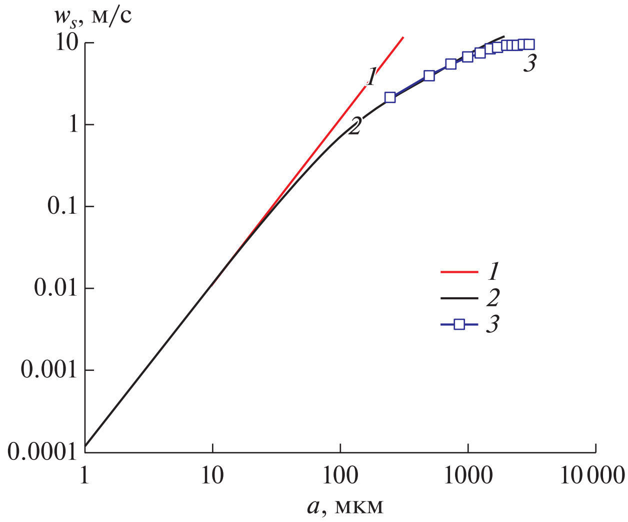
Так как погонный расход жидкости источника капельной влаги Q_0 (фиг. 1) определяется выражением

$$Q_0 = U_0 \int_0^\infty q(0,z)dz, \quad q(0,z) = \int_0^\infty f(a,0,z)da, \quad \text{то} \quad f_0 = Q_0/(U_0 a_m H).$$

На подстилающей поверхности ($z = 0$) выставляется условие $\partial f/\partial z = 0$, и расчетная величина осадков h, выпадающих на подстилающую поверхность, вычисляется по формуле

$$h = \frac{1}{\rho_w} \int_0^\infty w_s f(a) da.$$

Здесь и далее ρ_w — плотность воды.



Фиг. 2. Скорость осаждения капель воды в воздухе: *1* – формула Стокса (3), *2* – формула (4), *3* – данные [9].

На открытом участке границы, через который может происходить диффузия капельной влаги (при $x \to \infty$), выставляется модельное "мягкое" условие $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$. Аналогичное условие $\partial^2 f/\partial z^2 = 0$ выставляется и при $z \to \infty$.

Наконец, при $a = 0$ можно считать, что "поток капель" $\dot{a}f(a) = 0$, а при $a \to \infty$ величина $f \to 0$. В рассматриваемой задаче, впрочем, будет считаться, что изменение размеров капель происходит только за счет так называемого процесса гравитационной коагуляции. В этом случае "скорость потока капель в пространстве их радиусов" $\dot{a} \geq 0$, и условие $f \to 0$ при $a \to \infty$ можно не учитывать.

Для окончательной формулировки задачи необходимо указать зависимость скорости осаждения капель w_s от их радиуса a, а также выражение для скорости изменения размеров капель $\dot{a}$.

2.1. *Скорость осаждения капель в гравитационном поле*

Эта величина для капель (или твердых частиц) достаточно малого радиуса может быть вычислена по формуле Стокса (см., например, [7]):

$$w_s = w_{St}(a) \equiv ka^2, \quad k = \frac{2}{9}\frac{g}{\nu_a}\left(\frac{\rho_w}{\rho_a} - 1\right), \tag{3}$$

где g – ускорение свободного падения, ν_a – кинематическая вязкость газа, ρ_w и ρ_a – плотности жидкости и газа соответственно. Для капель воды в воздухе параметр k в формуле (3) составляет величину порядка 10^8 1/(м·с).

Формула (3) справедлива лишь для капель или твердых частиц достаточно малого размера, когда скорость их осаждения такова, что число Рейнольдса $\mathrm{Re}(a) = 2aw_s(a)/\nu_a < 1$ (см. [7]). При $\mathrm{Re}(a) \geq 1$ используются различные полуэмпирические формулы, основанные на формуле Стокса (3), но с поправками, зависящими от числа Рейнольдса Re. Например, согласно [8],

$$w_s(a) = \frac{w_{St}(a)}{1 + 0.15\,\mathrm{Re}(a)^{0.687}}. \tag{4}$$

Отметим также, что очень крупные капли вначале испытывают значительную деформацию, а затем могут начинать дробиться. В результате максимальный радиус капель не превышает 2.5–3 мм, а их скорость осаждения 9–10 м/с (см. [9]).

На фиг. 2 представлена зависимость скорости осаждения w_s капли воды в воздухе от радиуса капли a. Видно, что формула Стокса удовлетворительно работает лишь для капель радиуса $a \leq 50$–100 мкм, а формула (3) для $a \leq 1000$–1500 мкм.

В настоящей работе, в отличие от [1]–[6], будет рассматриваться только мелкодисперсная капельная влага, осаждаемая в режиме Стокса.

2.2. Скорость изменения размеров капель

Изменение размеров капель в процессе их переноса потоком воздуха происходит, в основном, за счет процессов конденсации/испарения и процесса коагуляции, в частности, гравитационной коагуляции – укрупнения капель в процессе их движения за счет “поглощения” более мелких капель. Крупные капли с $a \geq 10^3$ мкм, скорость движения которых относительно воздуха достаточно высока, могут также дробиться на более мелкие. Известно, что механизм изменения размеров капель за счет конденсации/испарения существенен для капель достаточно малого радиуса ($a \leq 50$ мкм, см., например, [10]). Для капель с размерами 50 мкм < a < 10^3 мкм, которые будут рассматриваться далее, основную роль должна играть гравитационная коагуляция. Точное выражение для скорости изменения радиусов капель за счет этого процесса достаточно сложное (см., например, [10], [11]). Однако известны приближенные формулы, применяемые, например, при моделировании переноса капельной влаги в облачных структурах. В частности, в метеорологии известна следующая теоретическая формула для изменения массы M капли в результате процесса гравитационной коагуляции (см. [12]):

$$dM/dt = \pi a^2 w_s(a)\rho_w q\tilde{E}, \quad \tilde{E} = \mathrm{const},$$

где $\tilde{E}$ – безразмерная величина, которую можно назвать средней вероятностью/коэффициентом захвата/коагуляции крупной каплей более мелких капель. Так как $M = (4/3)\pi\rho_w a^3$, то отсюда немедленно следует: $\dot{a} = \tilde{K}w_s(a)q$, $\tilde{K} = \tilde{E}/(4\rho_w)$. Если скорость осаждения капель рассчитывается по формуле Стокса, то

$$\dot{a} = Ka^2q, \quad K = k\tilde{K} = k\tilde{E}/(4\rho_w).$$

По порядку величины (значение $\tilde{E}$ принято равным 0.4) в рассматриваемых случаях (капли воды в воздухе) $K \approx 10^4$ м^2/(кг·с).

1.3. Формулировка задачи в безразмерной форме

Приведем уравнение (1) и краевое условие (2) к безразмерной форме, для чего представим переменные в следующем виде (штрихи помечают безразмерные переменные):

$$x = H\frac{U_0}{ka_m^2}x', \quad z = Hz', \quad t = T_0t', \quad a = a_ma',$$

$$f = f_0f', \quad q = f_0a_mq', \quad \dot{a} = Ka_m^3f_0\dot{a}', \quad h = \frac{1}{\rho_w}ka_m^3f_0h',$$

где a_m – мода распределения источника капельной влаги, $T_0 = H/(ka_m^2)$ – характерное время процесса, $\dot{a}'$ и h' – безразмерная скорость изменения размеров капель и безразмерная скорость выпадения капельной влаги на подстилающую поверхность. Подставляя данные выражения в (1) и (2), получаем (штрихи у безразмерных переменных далее везде опущены):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} - a^2\frac{\partial f}{\partial z} + \varepsilon_{\dot{a}}\frac{\partial \dot{a}f}{\partial a} = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \quad \dot{a} = a^2q, \quad q = \int_0^\infty f(a)da, \tag{5}$$

$$f = b(a)\delta(z-1) \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{6}$$

где $\varepsilon_{\dot{a}}$, ε_{A_x}, ε_{A_z} – параметры подобия, определяющие влияние гравитационной коагуляции, горизонтальной и вертикальной диффузии, соответственно, на процесс осаждения шлейфа. Они следующим образом связаны с определяющими параметрами задачи:

$$\varepsilon_{\dot{a}} = \frac{KQ_0}{ka_mU_0}, \quad \varepsilon_{A_x} = \frac{A_x}{HU_0}\frac{w_s(a_m)}{U_0}, \quad \varepsilon_{A_z} = \frac{A_z}{HU_0}\frac{U_0}{w_s(a_m)}, \quad w_s(a_m) = ka_m^2.$$

Так как обычно $w_s(a_m)/U_0 \ll 1$, то $\varepsilon_{A_x} \ll \varepsilon_{A_z}$, т.е. процессом продольной диффузии часто можно пренебрегать по сравнению с вертикальной диффузией.

В расчетах будем принимать, что функция δ, задающая пространственное распределение функции f в начальном сечении $x = 0$ шлейфа, имеет вид гауссовой функции

$$\delta(z-1) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{z-1}{\Delta}\right)^2\right],$$

где Δ – характерная безразмерная полуширина шлейфа в его начальном сечении.

Безразмерная скорость выпадения жидкости на подстилающую поверхность вычисляется так:

$$h = \int_0^\infty a^2 f(a)da \quad \text{при} \quad z = 0.$$

3. МОМЕНТНЫЙ МЕТОД

Введем моменты функции распределения капель по размерам (n – порядок момента):

$$f_n = \int_0^\infty a^n f(a)da, \quad n = 0,1,\ldots\,.$$

Отметим, что нулевой и первый моменты функции распределения связаны с водностью q и со средним размером капель $\overline{a}$ следующим образом:

$$f_0 = q, \quad f_1 = q\overline{a}, \quad \overline{a} = \int_0^\infty af(a)da \Big/ \int_0^\infty f(a)da.$$

Второй момент f_2 совместно с двумя первыми определяет дисперсию D функции распределения и стандартное отклонение σ размеров капель от среднего значения:

$$D = \int_0^\infty (a-\overline{a})^2 f(a)da = f_2 - f_1^2/f_0, \quad \sigma = \sqrt{D}.$$

Помножим уравнение (5) на a^n и проинтегрируем по всем возможным размерам капель a. Тогда можно получить следующие моментные уравнения:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} - \frac{\partial f_{n+2}}{\partial z} - n\varepsilon_{\grave{a}} f_0 f_{n+1} = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2}, \quad n = 0,1,\ldots\,. \tag{7}$$

Цепочка моментных уравнений (7), обрываемая на каком-нибудь значении $n = N$, оказывается не замкнутой, так как в эти уравнения входят моменты f_{N+1} и f_{N+2} , порядок которых выше N. Однако на основе (7) могут быть построены приближенные модели процесса переноса капельной влаги, позволяющие, в частности, рассчитывать распределения водности среды и интенсивность осадков, выпадающих на подстилающую поверхность.

Оборвем цепочку уравнений (7) на некотором значении $n = N$ (N будет назваться номером приближения), и запишем ее в следующем виде:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f_n}{\partial t} + \frac{\partial f_n}{\partial x} - \frac{\partial f_{n+2}}{\partial z} - n\varepsilon_{\grave{a}} f_0 f_{n+1} = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_n}{\partial z^2}, \quad n = 0,1,\ldots,N-2, \\
\frac{\partial f_{N-1}}{\partial t} + \frac{\partial f_{N-1}}{\partial x} - \frac{\partial \eta_{N-1}\overline{a}^2 f_{N-1}}{\partial z} - (N-1)\varepsilon_{\grave{a}} f_0 f_N = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_{N-1}}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_{N-1}}{\partial z^2}, \\
\frac{\partial f_N}{\partial t} + \frac{\partial f_N}{\partial x} - \frac{\partial \eta_N\overline{a}^2 f_N}{\partial z} - N\varepsilon_{\grave{a}}\zeta_N f_1 f_N = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_N}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_N}{\partial z^2}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\eta_n = \frac{f_{n+2}}{\overline{a}^2 f_n} = \frac{f_{n+2}f_0^2}{f_n f_1^2} = \frac{\int_0^\infty a^{n+2} fda \left(\int_0^\infty fda\right)^2}{\int_0^\infty a^n fda \left(\int_0^\infty afda\right)^2}, \quad \zeta_n = \frac{f_0 f_{n+1}}{f_1 f_n} = \frac{\int_0^\infty fda \int_0^\infty a^{n+1} fda}{\int_0^\infty afda \int_0^\infty a^n fda}. \tag{9}$$

Заметим, что, согласно (9), $\zeta_1 = \eta_0$. Отметим также, что если в дробно-рациональных функционалах (9) полагать $f = f_0\delta(a - a_0)$ (где δ – дельта-функция Дирака, а $a_0 = \text{const}$), то все $\eta_n = 1$ и $\zeta_n = 1$.

Систему уравнений (8) можно замкнуть, указав приближенную зависимость функционалов η_{N-1}, η_N и ζ_N от моментов $f_0, \ldots, f_N$. Для решения этой задачи постулируем какую-нибудь физически оправданную аналитическую зависимость функции распределения $f(a)$ от радиуса капель a и от $(N+1)$-го дополнительного параметра. Сама эта функциональная зависимость должна оставаться неизменной в рассматриваемом процессе, но параметры в ней, конечно, могут меняться с течением времени.

Удобно постулировать следующую параметрическую зависимость:

$$f = \frac{f_0}{a_m}F(\xi; g_0,\ldots,g_{N-2}), \quad \xi = \frac{a}{a_m}, \quad \int_0^\infty F(\xi; g_0,\ldots,g_{N-2})d\xi = 1, \tag{10}$$

где $f_0 = q$ – водность среды, а F – так называемая функция распределения, "нормированная на единицу". В качестве нормировочной величины a_m удобно выбрать моду функции распределения. Величины f_0, a_m, $g_0, \ldots, g_{N-2}$ являются теми дополнительными параметрами, о которых шла речь в предыдущем абзаце.

Вычисляя моменты, из (10) имеем

$$f_n = f_0 a_m^n \alpha_n(g_0,\ldots,g_{N-2}), \quad \alpha_n(g_0,\ldots,g_{N-2}) = \int_0^\infty \xi^n F(\xi; g_0,\ldots,g_{N-2})d\xi, \quad n = 1,2,\ldots,N. \tag{11}$$

Из (9) и (11), учитывая, что $\alpha_0 = 1$, получаем

$$\eta_n = \frac{\alpha_{n+2}(g_0,\ldots,g_{N-2})}{\alpha_n(g_0,\ldots,g_{N-2})\,\alpha_1^2(g_0,\ldots,g_{N-2})}, \quad \zeta_n = \frac{\alpha_{n+1}(g_0,\ldots,g_{N-2})}{\alpha_1(g_0,\ldots,g_{N-2})\,\alpha_n(g_0,\ldots,g_{N-2})}. \tag{12}$$

Соотношения (11) можно свести к следующей системе $(N-1)$-го уравнения для $(N-1)$-го параметра $g_0, \ldots, g_{N-2}$:

$$\frac{f_n f_0^{n-1}}{f_1^n} = \frac{\alpha_n(g_0,\ldots,g_{N-2})}{\alpha_1^n(g_0,\ldots,g_{N-2})}, \quad n = 2,3,\ldots,N. \tag{13}$$

Разрешив эту систему уравнений и воспользовавшись (12), получим окончательно искомые зависимости параметров η_n и ζ_n от моментов f_n в виде

$$\eta_n = \eta_n\left(\frac{f_2 f_0}{f_1^2},\ldots,\frac{f_N f_0^{N-1}}{f_1^N}\right), \quad \zeta_n = \zeta_n\left(\frac{f_2 f_0}{f_1^2},\ldots,\frac{f_N f_0^{N-1}}{f_1^N}\right). \tag{14}$$

Рассмотрим далее два низших приближения: приближение двух моментов ($N = 1$) и приближение трех моментов ($N = 2$).

Система уравнений (8) в приближении двух моментов ($N = 1$) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial \eta_0 \bar{a}^2 f_0}{\partial z} = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2},\\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1 \bar{a}^2 f_1}{\partial z} - \varepsilon_{\dot a}\eta_0 f_1^2 = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \quad \bar{a} = f_1/f_0.\end{gathered} \tag{15}$$

В приближении трех моментов ($N = 2$)

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_0}{\partial z^2},\\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1 \bar{a}^2 f_1}{\partial z} - \varepsilon_{\dot a} f_0 f_2 = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2},\\ \frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_2 \bar{a}^2 f_2}{\partial z} - 2\varepsilon_{\dot a}\zeta_2 f_1 f_2 = \varepsilon_{A_x}\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \varepsilon_{A_z}\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \quad \bar{a} = f_1/f_0.\end{gathered} \tag{16}$$

Для замыкания систем (15) и (16) воспользуемся приближенным аналитическим выражением для распределения капель жидкой фазы в двухфазной среде. Известны различные формулы, аппроксимирующие экспериментальные функции распределения. В частности, типовые распре-

Таблица 1. Зависимость величин α_1, α_2, η_0, η_1 от параметров функции распределения (17) капель по радиусам

(s, p)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 8)
$\alpha_1(s, p)$	1.12837917	1.08540188	1.06384608	1.03166095
$\alpha_2(s, p)$	1.5	1.33333333	1.25	1.125
$\eta_0(s, p)$	1.17809725	1.13176848	1.10446616	1.05700864
$\eta_1(s, p)$	1.57079633	1.41471060	1.32535940	1.17445404

деления капель в облаках и туманах довольно хорошо аппроксимируются следующей колоколообразной функцией (см., например, [13]):

$$F(\xi; s, p) = \frac{1}{C}\xi^p \exp\left(-\frac{p}{s}\xi^s\right), \quad C = \frac{1}{s}\left(\frac{s}{p}\right)^{(p+1)/s} \Gamma\left(\frac{p+1}{s}\right), \tag{17}$$

где p и s – эмпирические параметры, а $\Gamma(x) = \int_0^\infty \eta^{x-1}e^{-\eta}d\eta$ – полная гамма-функция.

Моменты α_n от "нормированной на единицу" функции распределения (17) имеют следующий вид:

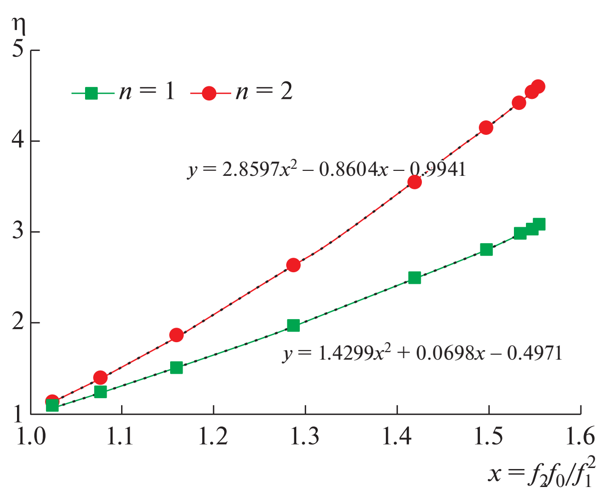
$$\alpha_n(s, p) = \int_0^\infty \xi^n F(\xi; s, p)d\xi = \left(\frac{s}{p}\right)^{n/s} \Gamma\left(\frac{n+p+1}{s}\right)/\Gamma\left(\frac{p+1}{s}\right),$$

и дробно-рациональные функционалы (12) легко вычисляются:

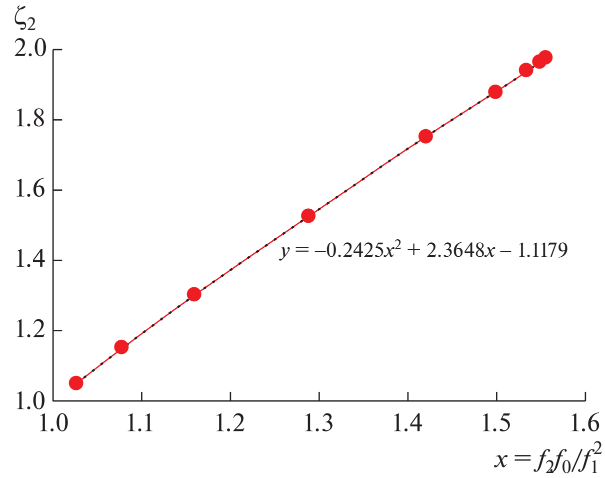
$$\eta_n(s, p) = \frac{\alpha_{n+2}(s, p)}{\alpha_n(s, p)\alpha_1^2(s, p)}, \quad \zeta_n(s, p) = \frac{\alpha_{n+1}(s, p)}{\alpha_1(s, p)\alpha_n(s, p)}. \tag{18}$$

3.1. Приближение двух моментов

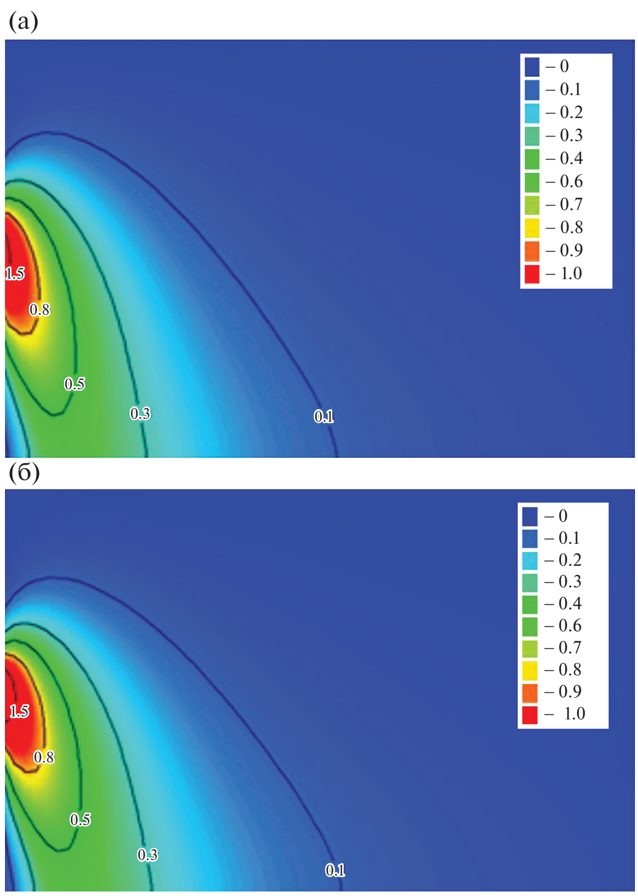
В двухмоментном приближении ($N = 1$) пространственно-временные распределения водности среды $q = f_0$ и среднего радиуса капель $\bar{a} = f_1/f_0$ описываются двумя уравнениями (15). При этом параметры s и p в (17) должны быть фиксированными, а дробно-рациональные функционалы $\eta_0 = \alpha_2/\alpha_1^2$ и $\eta_1 = \alpha_3/\alpha_1^3$ – постоянными (табл. 1). Величины η_0 и η_1 имеют порядок единицы. Их зависимость от s и p достаточно слабая.



Фиг. 3. Зависимости η_1 и η_2 от первых трех моментов при $s = 2$. Штриховые кривые – квадратичные аппроксимации.



Фиг. 4. Зависимость ζ_2 от первых трех моментов при $s = 2$. Штриховая кривая – квадратичная аппроксимация.



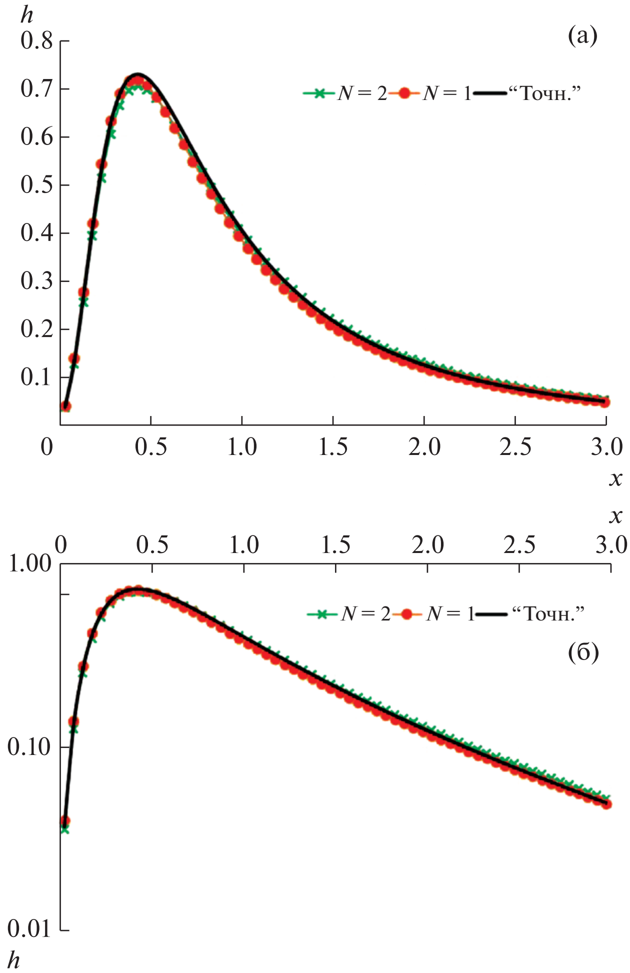
Фиг. 5. Распределение водности в стационарном шлейфе капельной влаги при $\varepsilon_{\dot{a}} = 1$: (а) – "точное" решение; (б) – двухмоментное приближение.

Скорость выпадения жидкости на подстилающую поверхность в приближении двух моментов вычисляется так:

$$h = \eta_0 \bar{a}^2 f_0(t, x, 0).$$

3.2. Приближение трех моментов

В приближении трех моментов ($N = 2$) будем считать, что параметр s в (17) фиксирован, а параметр p, определяющий дисперсию функции распределения, может изменяться. Тогда, соглас-



Фиг. 6. Стационарные осадки на подстилающую поверхность в обычном (а) и логарифмическом (б) масштабе: "точное" решение ("Точн."), двухмоментное приближение ($N = 1$), трехмоментное приближение ($N = 2$). Параметр $\varepsilon_{\dot{a}} = 0$.

но (13), (14), входящие в (16) дробно-рациональные функционалы η_1, η_2 и ζ_2 будут зависеть только от следующей комбинации трех моментов: $x = f_2 f_0 / f_1^2$. При этом данная величина может быть связана с параметром p функции распределения (17) уравнением (см. (13))

$$\frac{f_2 f_0}{f_1^2} = \frac{\alpha_2(s,p)}{\alpha_1^2(s,p)}.$$

Обратив эту зависимость (напомним, что s – фиксировано) и использовав результат в (18), получим искомые выражения дробно-рациональных функционалов от первых трех моментов функции распределения в виде

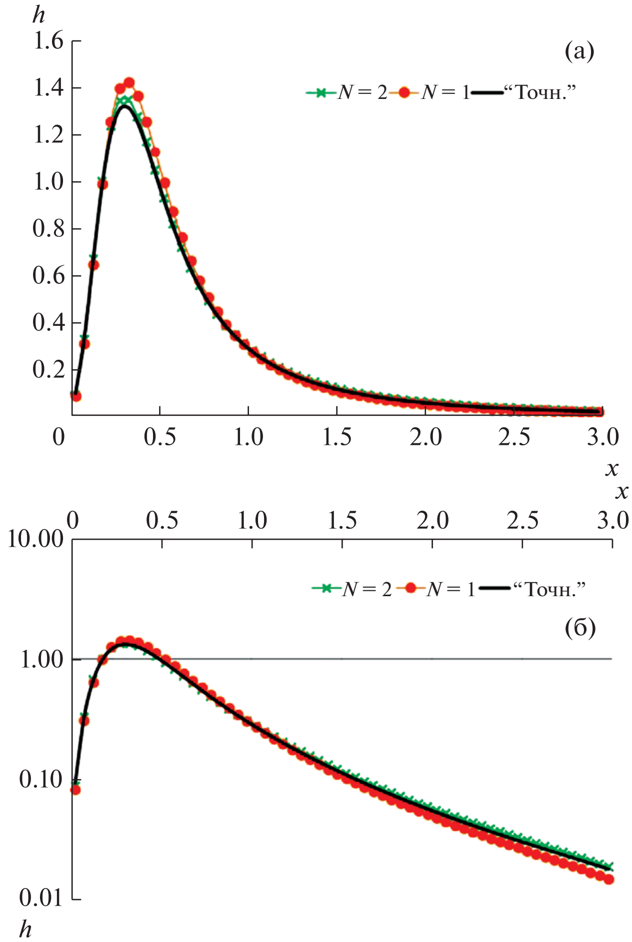
$$\eta_1 = \eta_1(s,\ f_2 f_0/f_1^2), \quad \eta_2 = \eta_2(s,\ f_2 f_0/f_1^2), \quad \zeta_2 = \zeta_2(s,\ f_2 f_0/f_1^2). \tag{18}$$

На фиг. 3 и 4 приведены рассчитанные с помощью электронных таблиц Exel графики функций (18) для случая $s = 2$. Там же представлены квадратичные зависимости, хорошо аппроксимирующие данные кривые.

Скорость выпадения жидкости на подстилающую поверхность в приближении трех моментов определяется вторым моментом функции распределения:

$$h = f_2(t, x, 0).$$

При постановке краевой задачи для моментных уравнений в сечении $x = 0$ должны быть заданы пространственные распределения всех моментов, входящих в рассматриваемое приближения моментного метода. Далее в конкретных расчетах примем, что в начальном сечении $x = 0$



Фиг. 7. То же, что на фиг. 6, но при $\varepsilon_{\dot{a}} = 1$.

функция распределения f капель по размерам имеет вид (6), причем $b(a) = F(a; s, p)$ (см. (17)). Тогда в сечении $x = 0$

$$f_n(z) = \left(\int_0^\infty a^n b(a) da\right) \delta(z-1) = \alpha_n(s,p)\delta(z-1), \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

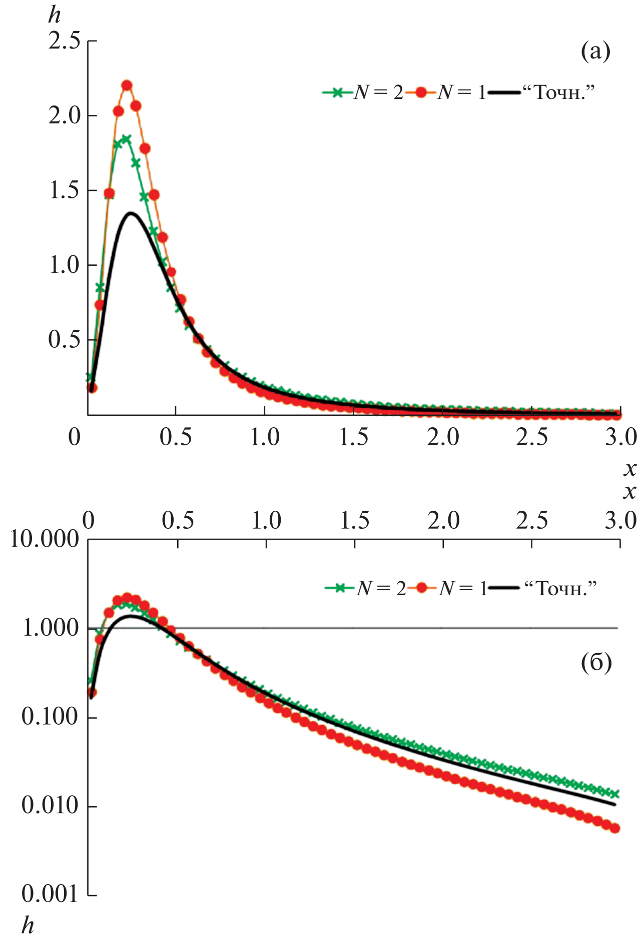
4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ. ВЫВОДЫ

Для численного интегрирования уравнения переноса и диффузии в настоящей работе используется вычислительная методика, предложенная в [14] и применявшаяся, например, в работе [15]. Достоинства этой методики состоят не в экономичности и высокой скорости счета (что до некоторой степени компенсируется все возрастающей производительностью современных ЭВМ), а в простоте реализации и высокой универсальности.

На фиг. 5–7 приведены результаты расчетов описанной выше задачи как в "точной" постановке (1), так и с использованием двухмоментного приближения (15) и трехмоментного приближения (16). Расчеты проведены при разных значениях параметра гравитационной коагуляции $\varepsilon_{\dot{a}}$. Во всех расчетах $\varepsilon_{Ax} = 0$, $\varepsilon_{Az} = 0.3$.

Расчетное распределение водности в стационарном шлейфе капельной влаги при $\varepsilon_{\dot{a}} = 1$ представлено на фиг. 5.

Сравнение "точного" решения с расчетами по двухмоментному и трехмоментному приближению для трех различных значений $\varepsilon_{\dot{a}}$ приведено на фиг. 6–8.



Фиг. 8. То же, что на фиг. 6, но при $\varepsilon_{\dot{a}} = 2$.

Видно, что моментный метод в целом дает неплохие не только качественные, но и количественные результаты. Во всяком случае, при $\varepsilon_{\dot{a}} \leq 1$ даже низшее, двухмоментное приближение вполне приемлемо. Видно также, что использование трехмоментного приближения заметно уменьшает разницу между точным и приближенным решением при $\varepsilon_{\dot{a}} > 1$ (особенно вдали от источника капельной влаги).

В заключение отметим, что согласно данным, приведенным в пп. 2.1 и 2.2, параметр коагуляции $\varepsilon_{\dot{a}} = 1$ при значениях $a_m = 100$ мкм, $Q_0 = 10$ кг/(м с), и $U_0 = 10$ м/с.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Котеров В.Н., Архипов Б.В., Беликов В.В., Солбаков В.В., Федосов В.Е.* Численное моделирование образования и переноса капельной влаги в нижнем бьефе гидроузла при работе водосборов трамплинного типа // Гидротехническое строительство. 2007. Вып. 7. С. 17–27.

2. *Котеров В.Н., Архипов Б.В., Беликов В.В., Солбаков В.В.* Образование и перенос капельной влаги в нижнем бьефе гидроузла // Матем. моделирование. 2008. Т. 20. № 5. С. 78–92.

3. *Котеров В.Н., Беликов В.В.* Исследование и моделирование тепловой конвекции воздуха и переноса локальных осадков при работе эксплуатационного водосброса Саяно-Шушенской ГЭС в зимний период // Гидротехническое строительство. 2012. № 3. С. 62–70.

4. *Беликов В.В., Котеров В.Н.* Численное моделирование переноса капельной влаги, генерируемой работой водосброса № 1 Богучанской ГЭС в период наполнения водохранилища зимой 2012 г. // Гидротехническое строительство. 2014. № 5. С. 16–26.

5. *Беликов В.В., Котеров В.Н.* Прогноз влияния водно-ледяного облака за водосбросами № 1 и № 2 Богучанской ГЭС на сооружения гидроузла в условиях аварийной эксплуатации в зимний период // Гидротехническое строительство. 2015. № 6. С. 40–51.
6. *Беликов В.В., Котеров В.Н.* Проблемы брызгового обледенения и образования техногенных осадков в нижних бьефах высоконапорных гидроузлов. Теория и практика математического моделирования природных и техногенных процессов. М.: Янус-К, 2016. 152 с.
7. *Дж. Бэтчелор.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
8. *Winterwerp J.C.* A simple model for turbulence induced flocculation of cohesive sediment // J. Hydraulic Res. 1997. V. 36. № 3. P. 309–326.
9. ГОСТ Р 53613-2009 (МЭК 60721-2-2:1988) Воздействие природных внешних условий на технические изделия. Общая характеристика. Осадки и ветер.
10. *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 366 с.
11. *Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Самарская Е.А., Тишкин В.Ф.* Методы математического моделирования окружающей среды. М.: Наука, 2000. 254 с.
12. *Халтинер Дж., Мартин Ф.* Динамическая и физическая метеорология. М.: Изд-во Иностр. лит., 1960. 435 с.
13. *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 366 с.
14. *Котеров В.Н., Кочерова А.С., Кривцов В.М.* Об одной методике расчета течений несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 550–558.
15. *Зубов В.И., Инякин В.А., Котеров В.Н., Кривцов В.М.* Численное моделирование пространственных турбулентных течений газа в сложных сопловых устройствах // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т. 45. № 10. С. 1871–1886.