ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 10, с. 1656–1671

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.97

Светлой памяти Юрия Дмитриевича Шмыглевского посвящается

ЮРИЙ ДМИТРИЕВИЧ ШМЫГЛЕВСКИЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ[1)]

© 2021 г. А. Н. Крайко[1,2,*]

[1] *111116 Москва, ул. Авиамоторная, 2, ЦИАМ, Россия*

[2] *141700 Долгопрудный, М. о., Институтский пр-т, 9, МФТИ, Россия*

**e-mail: akraiko@ciam.ru*

Поступила в редакцию 15.01.2021 г.
Переработанный вариант 20.02.2021 г.
Принята к публикации 09.06.2021 г.

В середине XX века задачи построения сверхзвуковых частей реактивных сопел, реализующих максимум тяги, стали актуальными и важными в связи с развитием ракетной техники. Демонстрируется выдающийся вклад Ю.Д. Шмыглевского в решение таких вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. Библ. 40. Фиг. 4.

Ключевые слова: вариационные задачи газовой динамики, сопла максимальной тяги, характеристики сверхзвуковых течений невязкого (“идеального”) газа, переход к контрольному контуру, множители Лагранжа, решения К. Гудерлея и Е. Хантша, решения Ю.Д. Шмыглевского.

DOI: 10.31857/S0044466921100094

1. ВВЕДЕНИЕ

В конце 50-х годов XX века внимание автора, тогда еще студента, привлекли первые работы Ю.Д. Шмыглевского, посвященные вариационным задачам сверхзвуковой газовой динамики. Многое, если не все, представлялось в них непонятным, загадочным и непостижимым. С годами автор, благодаря возникшему контакту с Юрием Дмитриевичем, приобщился к искусству решения более сложных вариационных задач газовой динамики. Несмотря на это он, как и тогда, не может избавиться от чувств удивления, а подчас и восхищения, которые вызывают в нем новые решения, подходы и пути, появляющиеся и открываемые в данной весьма специфической области газовой динамики и оптимального управления.

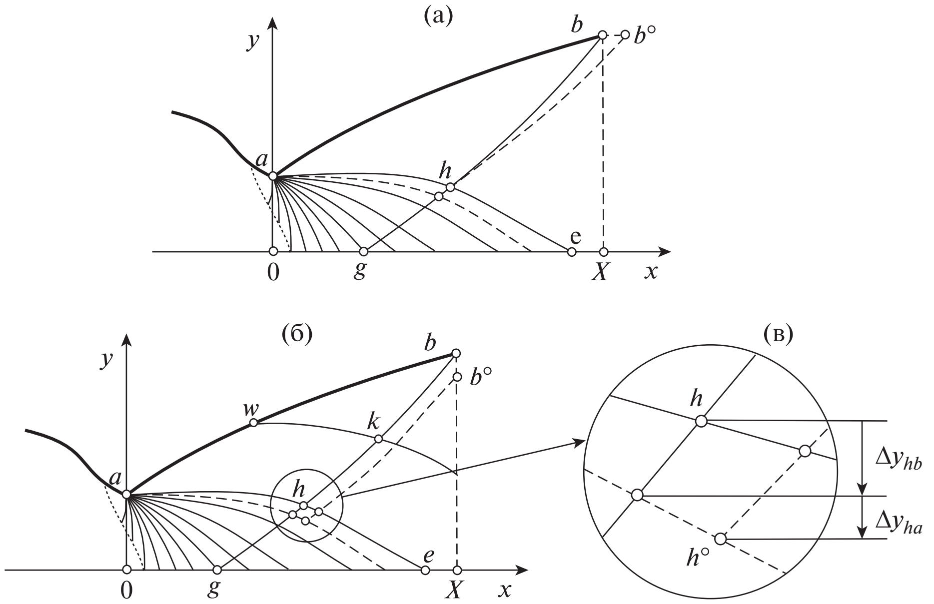
Чтобы увидеть красоту вариационных задач газовой динамики, связанные с ними проблемы и роль Ю.Д. Шмыглевского в их разрешении, вспомним, какие вариационные задачи сверхзвуковой газовой динамики в связи с запросами ракетной техники решались к концу 50-х—началу 60-х годов XX века.

2. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ, КОНТРОЛЬНЫЙ КОНТУР И РЕШЕНИЕ К. ГУДЕРЛЕЯ И Е. ХАНТША

Пожалуй, самой важной из возникших в те далекие годы вариационных задач газовой динамики стала задача профилирования оптимальной сверхзвуковой части осесимметричного реактивного сопла. Первыми к этой вариационной задаче обратились К. Гудерлей и Е. Хантш [1], две постановки которых поясняет фиг. 1а. На ней в плоскости xy декартовых или цилиндрических координат (xyz или $xy\phi$) нарисован контур ab сверхзвуковой части сопла, который при заданных: контуре сужающейся части, длине $x_b = X$, нулевой z- или ϕ-компоненте $w = 0$ вектора скорости и однородных удельной энтропии $s \equiv s_0$ и полной энтальпии $H \equiv H_0$ реализует максимум интеграла сил давления

$$\chi = \int_a^b y^{\nu-1}(p - p^+)dy. \tag{2.1}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 19-01-00671 и 20-01-00100).



Фиг. 1. К постановке задач о построении оптимальной сверхзвуковой части сопла: (а) контрольный контур (“КК”) [1], (б) и (в) КК [5], [9].

Здесь $\nu = 1$ и 2 в плоском и осесимметричном случаях, p – давление на обтекаемом контуре, а p^+ – заданное “внешнее” давление (например, $p^+ = 0$ при полете ракеты в пустоте). В одной из постановок вариационной задачи [1] ордината концевой точки профилируемого сопла также задавалась ($y_b = Y$), в другой – должна находиться в процессе решения.

Наряду с контуром сопла на фиг. 1а нарисованы C^--характеристики пучка волн разрежения, возникающего при обтекании излома контура в точке a, пунктирная звуковая линия ($M = 1$) и C^+-характеристика ghb. Авторы [1] ограничились случаем прямой звуковой линии – отрезка оси y: $0 \le y \le y_a$ с параллельным оси x звуковым потоком. Тип уравнений обсуждаемых ниже течений невязкого и нетеплопроводного (“идеального”) газа зависит от числа Маха $M = V/a$ – отношения $V = |\mathbf{V}|$, где $\mathbf{V}$ – вектор “меридиональной” скорости потока (без z- или ϕ-компоненты w) к скорости звука a. Малые вариации контура ab, в частности, его наклона справа от точки a, не изменяют до-, транс- и сверхзвуковое течения слева от замыкающей C^--характеристики ahe пучка волн разрежения, а с ними – расход газа G и поток x-компоненты количества движения в минимальном сечении сопла. Поэтому контур сверхзвуковой части сопла, оптимальный по интегралу сил давления χ, будет оптимальным и по тяге сопла, и по его удельной (отнесенной к G) тяге.

Сложность решаемых “в точной постановке” вариационных задач газовой динамики обусловлена тем, что входящее в формулу (2.1) давление в любой точке w контура ab зависит от формы всего контура сопла левее точки w. “Точная постановка” означает, что эту зависимость определяет решение уравнений течения в частных производных по x и y слева от приходящей в точку w C^+-характеристики с “условием непротекания” – равенством нулю нормальной к обтекаемым контурам компоненты скорости $\mathbf{V}$ и ее y-компоненты v на оси x. К счастью, при решении в точной постановке первых вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики ситуация существенно упростилась благодаря переходу к “характеристическому контрольному контуру”. Первым такой переход в 1950 г. применил А.А. Никольский в одной из закрытых работ. А.А. Никольский воспользовался им при построении в линейном приближении оптимальных по волновому сопротивлению головных и кормовых частей обтекаемых сверхзвуковым потоком тел вращения с протоком. В приближении нелинеаризованных уравнений безвихревого течения К. Гудерлей и Е. Хантш [1] применили переход к характеристическому контрольному контуру независимо (открытая публикация [2] работы А.А. Никольского относится к 1957 г.).

Для возможности перехода к контрольному контуру необходимо, чтобы оптимизируемый функционал χ – интеграл по контуру ab в (2.1), можно было выразить через интегралы по отрезкам ag и gb. Один интеграл вычисляется по отрезку ag C^--характеристики пучка волн разрежения с фокусом в точке a, второй – по C^+-характеристике gb. Описанный переход, возможный в силу интегрального закона сохранения x-компоненты количества движения, приводит к такому выражению для оптимизируемого функционала

$$\chi = \int_a^g y^{\nu-1}[p - p^+ + \rho u(u - x'v)]dy + \int_g^b y^{\nu-1}[p - p^+ + \rho u(u - x'v)]dy,$$
$$x' \equiv \frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg}(\theta \pm \mu), \quad \sin\mu = \frac{1}{\mathrm{M}}, \quad \mathrm{M} = \frac{V}{a}, \quad u = V\cos\theta, \quad v = V\sin\theta. \tag{2.2}$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак отвечает C^+(C^-)-характеристикам, ρ – плотность газа (известная функция p и $s \equiv s_0$), u есть x-компонента вектора $\mathbf{V}$, θ – угол $\mathbf{V}$ с осью x и μ – угол Маха. В дополнение к χ через интегралы по тем же отрезкам характеристик и с теми же формулами для x' выражаются заданная абсцисса точки b и условие равенства расходов газа, протекающих через отрезки характеристик ag и gb,

$$L_1 \equiv \int_a^g \operatorname{ctg}(\theta - \mu)dy + \int_g^b \operatorname{ctg}(\theta + \mu)dy - X = 0,$$
$$L_2 \equiv \int_a^g y^{\nu-1}\rho(u - x'v)dy + \int_g^b y^{\nu-1}\rho(u - x'v)dy = 0. \tag{2.3}$$

Пока переход от одного отрезка ab к двум ag и gb, вроде бы, лишь усложнил задачу, добавив второе равенство (2.3), которое, как и первое, должно учитываться в качестве изопериметрического условия. Однако не это главное. Искомому оптимальному контуру отвечает отрезок hb оптимальной C^+-характеристики, распределение параметров на котором удовлетворяет “условию совместности”. Это условие для “незакрученных” ($w = 0$) и “однородных” по $s \equiv s_0$ и $H \equiv H_0$ течений можно записать в форме [3]

$$\theta' - \frac{\operatorname{ctg}\mu}{V}V' + \frac{(\nu - 1)\sin\theta\sin\mu}{y\sin(\theta + \mu)} = 0$$

с полными производными θ' и V' по y вдоль отрезка hb. Здесь и ранее все термодинамические переменные, скорость звука a и угол Маха μ – функции V в силу равенства: $h + V^2/2 = H_0$, в котором удельная энтальпия h – известная функция p и $s \equiv s_0$. Поэтому условие совместности можно записать иначе

$$L \equiv \beta' + \frac{(\nu - 1)\sin\theta\sin\mu}{y\sin(\theta + \mu)} = 0, \quad \beta = \theta - \Phi, \quad \Phi = \Phi(V) = \int_{V_*}^{V > V_*} \frac{\operatorname{ctg}\mu(V^\circ)}{V^\circ}dV^\circ \tag{2.4}$$

с постоянной во всем потоке критической скоростью V_*.

В итоге описанный переход привел к замене вариационных задач с уравнениями с частными производными на задачи с одним обыкновенным дифференциальным уравнением (2.4) и изопериметрическими условиями (2.3). Даже в наше время это – серьезнейшее упрощение. Как решать подобные задачи, было известно и 70 лет назад. Решение начиналось с получения необходимых условий двустороннего экстремума – “уравнений Эйлера” вариационного исчисления. Для этого составлялся вспомогательный “функционал Лагранжа”

$$I = \chi + \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \int_h^b \lambda L dy \tag{2.5}$$

с χ, L_1, L_2 и L из (2.2)–(2.4). В (2.5) λ_1, λ_2 и $\lambda = \lambda(y)$ – постоянные и переменный множители Лагранжа, подлежащие определению.

Если, как в [1], фиксировать начальную точку g C^+-характеристики контрольного контура, то допустимые варьирования контура ab приведут к показанным штрихами на фиг. 1а смещению отрезка hb C^+-характеристики и появлению небольшого горизонтального участка $b^\circ b$, к возмущению параметров потока на hb и к изменению координат точки h из-за возможного малого уменьшения или увеличения излома контура в точке a, а при свободной ординате точки b при второй постановке вариационной задачи – к изменению и этой координаты. При таких (“допустимых") варьированиях, естественно, выполняются условия (2.3) и уравнение (2.4). Поэтому приращения χ и вспомогательного функционала совпадают: $\Delta\chi = \Delta I$. В результате, проделав необходимые выкладки, придем к выражению

$$\Delta\chi = \int_h^b \left[(\lambda' - A)\left(\frac{\operatorname{ctg}\mu}{V}\delta V - \delta\theta \right) + y^{\nu-1} B\delta V \right] dy + \lambda_b(\delta\theta - \operatorname{ctg}\mu\delta V/V)_b + \\ + y_b^{\nu-1} C_b(x_{b^\circ} - X) + y_b^{\nu-1} F_b \Delta y_b \tag{2.6}$$

с "вариациями" δV и $\delta\theta$ – разностями V и θ при фиксированном y на отрезках $h^\circ b^\circ$ и hb и с Δy_b – разностью y концевых точек b этих отрезков только при второй постановке вариационной задачи. Коэффициенты A, ... – линейные функции λ_1, λ_2 и λ – равны

$$A = y^{\nu-1} \frac{\rho V[V\cos\mu + \lambda_2\cos(\theta+\mu)]\sin\mu + \Lambda_1 - \Lambda(\nu-1)\sin^2\mu}{\sin^2(\theta+\mu)},$$

$$B = \frac{1}{\sin^2(\theta+\mu)} \left\{ [(V\mu_V - \operatorname{ctg}\mu)\sin\theta\cos\theta - 2\cos^2\mu]\rho V - \Lambda_1 \frac{\operatorname{ctg}\mu + V\mu_V}{V} + \right. \\ \left. + \lambda_2\rho \frac{V\mu_V\sin\theta\sin\mu - \sin(\theta+2\mu)\cos\mu}{\sin\mu} + \Lambda\frac{\nu-1}{V}(\cos\mu\sin\mu + V\mu_V\sin^2\theta) \right\},$$

$$C = \rho V(V\cos\theta + \lambda_2)\sin\theta - \Lambda_1, \quad F = p - p^+ + \frac{\rho a(V\cos\theta + \lambda_2)}{\sin(\theta+\mu)} + \Lambda_1\operatorname{ctg}(\theta+\mu),$$

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_1}{y^{\nu-1}}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{y^\nu}, \quad \mu_V = \frac{d\mu}{dV}.$$

Выражение (2.6) справедливо для обтекаемых без образования ударных волн в треугольнике ahb и искомого (оптимального) контура, и неоптимальных контуров ab, удовлетворяющих условиям (2.3) и уравнению (2.4) на отрезке C^+-характеристики hb.

Выше и при дальнейшем изложении автор, придерживаясь главных установок цитируемых работ, во-первых, использует единообразные, принятые им в [3] обозначения, и, во-вторых, иногда добавляет отсутствующие в этих работах, но и не противоречащие им соображения из [3], [4], в частности, связанные с вводимой ниже "компенсирующей" точкой.

В выражение (2.6) входят пока еще неопределенные множители Лагранжа. Множитель λ определим дифференциальным уравнением и условием

$$\lambda' = A(y, \theta, V, \Lambda_1, \lambda_2, \Lambda), \quad \lambda_b = 0, \tag{2.7}$$

а множитель $\lambda_1 = y^{\nu-1}\Lambda_1$ или λ_2 – условием

$$C_b \equiv C(\theta_b, V_b, \Lambda_1, \lambda_2) = 0. \tag{2.8}$$

С учетом (2.7) и (2.8) выражение для приращения χ принимает вид

$$\Delta\chi = \int_h^b y^{\nu-1} B\delta\theta dy + y_b^{\nu-1} F_b \Delta y_b, \quad F_b = F(\theta_b, V_b, p^+, \Lambda_1, \lambda_2). \tag{2.9}$$

Выражение (2.9) пока еще не позволяет получить необходимое условие, определяющее оптимальное ("экстремальное") распределение параметров на отрезке hb с заданными $x_b = X$ и $y_b = Y$ в первой задаче, и в дополнение найти оптимальную координату y_b – во второй. Это нельзя сделать по двум причинам. Во-первых, входящие в B и F_b множители Лагранжа все еще не определены. Во-вторых, нужно реализовать независимое знакоопределенное варьирование V в ε-окрестности любой точки hb при $\delta V \equiv 0$ вне такой ε-окрестности.

Обе проблемы решает введение на hb "компенсирующей" точки c, в которой за счет выбора все еще неопределенных множителей Λ_1 и λ_2 обращается в нуль коэффициент B: $B_c = 0$. Это всегда можно сделать, поскольку B – линейная функция Λ_1 и λ_2. Теперь при знакоопределенном варьировании V в окрестности любой отличной от c точки отрезка hb для удовлетворения первого условия (2.3) варьируется V в ε-окрестности точки c. Поскольку $B_c = 0$, то правая часть выражения (2.8) будет такой же, как при знакоопределенной вариации δV только в ε-окрестности рассматриваемой точки при $\delta V \equiv 0$ вне ее. Следовательно, если $V(y)$ оптимально, то равенство

$$B(\theta, V, \mu_V, \Lambda_1, \lambda_2, \Lambda) = 0 \tag{2.10}$$

должно выполняться во всех точках отрезка hb.

При второй постановке вариационной задачи оптимальную величину координаты y_b определит условие

$$F_b = F(\theta_b, V_b, p^+, \Lambda_1, \lambda_2) = 0, \tag{2.11}$$

которое вместе с условием (2.8) и записанным в точке b равенством (2.10) с $\Lambda_b = 0$ связывает параметры потока и внешнее давление p^+ в точке b оптимального сопла. Эта связь, одинаковая в плоском и осесимметричном случаях, получается, если множители Λ_1 и λ_2, найденные из (2.8) и (2.10), подставить в (2.11). Искомая связь через входящую в B производную μ_V, на первый взгляд, должна зависеть от уравнений состояния газа. Это, однако, не так, т.е. μ_V в нее не входит. Впервые полученная в [1] для произвольного “двухпараметрического” газа, все термодинамические параметры которого – функции двух из них, например, p и s или p и ρ, она свелась к равенству

$$(p - p^+ - \rho V^2 \sin\theta\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\mu)_b = 0, \tag{2.12}$$

которое в отечественных публикациях, включая [3], [4], названо “условием Буземана”. Почему так, объясняют цитата и последующая демонстрация сказанного в [1]: “Смысл этого соотношения можно понять при помощи рассуждения, принадлежащего Буземану. Именно, можно варьировать направление малого последнего элемента контура сопла, не изменяя при этом распределение давления по остальной его части, лежащей выше по потоку. Поэтому последний элемент должен принять направление, для которого тяга самого этого элемента будет максимальной”.

Затем сначала авторы [1] строят оптимальные плоские сопла. Для них ($\nu = 1$), во-первых, уравнение (2.4) сводится к $\beta' = 0$, и, во-вторых, в условии оптимальности (2.10) нет переменного множителя Лагранжа λ и равного ему Λ, а $\Lambda_1 = \lambda_1$. В результате на hb имеем

$$\theta - \Phi(V) = \beta_h, \quad B(\theta, V, \mu_V(V), \lambda_1, \lambda_2) = 0.$$

Отсюда следует, что θ, V и прочие параметры газа на отрезке hb постоянны, а сам он прямой. Поэтому при однородном по H и s течении контур любого плоского оптимального сопла получается укорочением некоторого сопла с равномерным потоком на выходе. Следовательно, при заданной сужающейся части контуры плоских оптимальных сопел образуют однопараметрическое семейство, каждая кривая которого определена углом наклона в точке a. В [1] приведено также несколько оптимальных контуров осесимметричных сопел, при построении которых было проще решать “обратную задачу”. В ней вместо x_b и y_b задавались угол излома контура в точке a и положение точки h на C^--характеристике ae. Однако в [1] и обратная задача остается сложной. Ведь в условие оптимальности (2.10) входит множитель λ, определяемый интегрированием уравнения (2.7) с условием $\lambda_b = 0$ в точке b.

3. КОНТРОЛЬНЫЙ КОНТУР И РЕШЕНИЯ Ю.Д. ШМЫГЛЕВСКОГО

Важнейшим этапом в решении вариационных задач газовой динамики стали статьи Ю.Д. Шмыглевского [5], [6], опубликованные в 1957 г. Их автор также воспользовался переходом к характеристическому контрольному контуру, но слегка отличному от контура фиг. 1а. Отличие поясняют фиг. 1б и 1в. На них проварьированный (штриховой) отрезок $h^\circ b^\circ$ приходит в точку b° с фиксированной абсциссой ($x_{b^\circ} = X$), однако точка h может смещаться и по C^+-, и по C^--характеристике. Кроме того, наряду с безвихревыми (однородными по H и s) течениями в [5], [6] допускались H и s, которые могли зависеть от функции тока ψ, вводимой дифференциальным равенством

$$d\psi = y^{\nu-1}\rho(udy - vdx) = y^{\nu-1}\rho V(\cos\theta dy - \sin\theta dx).$$

Поэтому в формулах для χ и X интегралы по y заменили интегралы по ψ, а вместо одного дифференциального уравнения на отрезке hb C^+-характеристики стало два:

$$\chi = \int_a^h \left[V\cos\theta - p\frac{\sin(\theta-\mu)}{\rho V\sin\mu}\right]d\psi + \int_h^b \left[V\cos\theta + p\frac{\sin(\theta+\mu)}{\rho V\sin\mu}\right]d\psi - p^+\frac{y_b^\nu - y_a^\nu}{\nu},$$
$$L_1 \equiv \int_h^a \frac{\cos(\theta-\mu)}{y^{\nu-1}\rho V\sin\mu}d\psi + \int_h^b \frac{\cos(\theta+\mu)}{y^{\nu-1}\rho V\sin\mu}d\psi - X = 0, \tag{3.1}$$

$$L_2 \equiv y' - \frac{\sin(\theta+\mu)}{y^{\nu-1}\rho V\sin\mu} = 0, \quad L \equiv \theta' - \frac{\operatorname{ctg}\mu}{V}V' + \frac{\nu-1}{y^\nu\rho V}\sin\theta = 0. \tag{3.2}$$

Здесь и далее, если не оговорено особо, “штрих” означает производную по ψ вдоль hb, а второе уравнение (3.2) по-прежнему справедливо только для течений, однородных по H и s.

Далее, как и выше, составлялся вспомогательный функционал I. Справедливое на hb дифференциальное уравнение $L_2 = 0$ вводилось в него интегралом по hb с переменным множителем $\lambda_2(\psi)$, вместо постоянного, вводившего равенство расходов газа через отрезки ag и gb контрольного контура. Теперь равенство расходов газа через отрезки ah и hb выполняется благодаря переходу от y к ψ при том, что переменная y, ставшая зависимой, при $\nu = 2$ входит в L_1 и в условие совместности.

Если, как в [5], [6], фиксировать абсциссу x_b, то допустимые варьирования контура ab, включающие уменьшение или увеличение угла излома в точке a, приведут к возмущению параметров потока на отрезке hb и к показанным штрихами на фиг. 1б и 1в замене замыкающей C^--характеристики пучка волн разрежения и смещению отрезка hb C^+-характеристики с появлением небольшого вертикального участка bb° и к перемещениям точки h по характеристикам обоих семейств, а не одного, как в [1]. При таких (“допустимых”) варьированиях выполняются условие (3.1) и уравнения (3.2). Поэтому приращения χ и функционала Лагранжа совпадают: $\Delta\chi = \Delta I$. В результате, проделав необходимые выкладки, придем к выражению

$$\Delta\chi = \int_h^b \left\{(\lambda' - A)\left(\frac{\operatorname{ctg}\mu}{V}\delta V - \delta\theta\right) + [\lambda_2' - (\nu-1)E]\delta y + B\delta V\right\}d\psi +$$
$$+ G_h\Delta\psi_{ha} + \lambda_b(\delta\theta - \operatorname{ctg}\mu\,\delta V/V)_b + (\lambda_2 - p^+y^{\nu-1})_b\delta y_b \tag{3.3}$$

с “вариациями” $\delta\theta$, ... — разностями θ, ... при фиксированном ψ на отрезках $h^\circ b^\circ$ и hb, с $\Delta\psi_{ha}$ — разностью ψ точек h° и h вдоль C^--характеристики ha, как Δy_{ha} на фиг. 1в, и с δy_b только при второй постановке вариационной задачи. Коэффициенты A, ... — линейные функции λ_1, λ_2 и λ — равны

$$A = V\sin\theta - \frac{\lambda_1\sin(\theta+\mu) - (\lambda_2 - y^{\nu-1}p)\cos(\theta+\mu)}{y^{\nu-1}\rho V\sin\mu} - \lambda\frac{\nu-1}{y^\nu\rho V}\cos\theta,$$

$$B = \left[2\sin\theta + \frac{\lambda_1\cos(\theta+2\mu) + (\lambda_2 - y^{\nu-1}p)\sin(\theta+2\mu)}{y^{\nu-1}\rho V^2\sin^2\mu}\right]\operatorname{ctg}\mu -$$
$$- \frac{\lambda_1\cos\theta + (\lambda_2 - y^{\nu-1}p)\sin\theta}{y^{\nu-1}\rho V\sin^2\mu}\mu_V - \lambda\frac{\nu-1}{y^\nu\rho V^2}\operatorname{ctg}^2\mu\sin\theta,$$

$$E = \frac{y[\lambda_1\cos(\theta+\mu) + \lambda_2\sin(\theta+\mu)] - \nu\lambda\sin\theta\sin\mu}{y^{\nu+1}\rho V\sin\mu},$$

$$G = 2\frac{\lambda_1\cos\theta + (\lambda_2 - y^{\nu-1}p)\sin\theta}{y^{\nu-1}\rho V}\operatorname{ctg}\mu + \lambda\left[\beta' - \left(\frac{d\beta}{d\psi}\right)^-\right].$$

Индекс “минус” в последнем слагаемом формулы для коэффициента G означает, что производная $d\beta/d\psi = d\theta/d\psi - (V^{-1}\operatorname{ctg}\mu)dV/d\psi$ вычисляется вдоль C^--характеристики.

В выражение (3.3) входят пока еще неопределенные множители Лагранжа. Два из них λ и λ_2 определим дифференциальными уравнениями и условиями

$$\lambda' = A(y,\theta,V,\lambda_1,\lambda_2,\lambda), \quad \lambda_b = 0, \tag{3.4}$$

$$\lambda_2' = (\nu - 1)E(y,\theta,V,\lambda_1,\lambda_2,\lambda), \quad G_h = 0. \tag{3.5}$$

В результате выражение для $\Delta\chi$ принимает вид

$$\Delta\chi = \int_h^b B\delta V d\psi + (\lambda_2 - p^+ y^{\nu-1})_b \delta y_b. \tag{3.6}$$

Затем, как и выше, на hb вводилась "компенсирующая" точка c. В ней за счет выбора множителя λ_1 удовлетворялось условие $B_c = 0$. После этого при знакоопределенном варьировании V в окрестности любой отличной от c точки отрезка hb для удовлетворения условия (3.1) варьировалась скорость V в ε-окрестности точки c. Поскольку $B_c = 0$, то правая часть выражения (3.6) будет такой же, как при знакоопределенной δV только в ε-окрестности рассматриваемой точки при $\delta V \equiv 0$ вне ее. Следовательно, если $V(\psi)$ оптимально, то равенство

$$B(y,\theta,V,\mu_V,\lambda_1,\lambda_2,\lambda) = 0 \tag{3.7}$$

должно выполняться во всех точках отрезка hb.

В плоском случае решение полученных уравнений существенно упрощается и приводит к тем же результатам, что в [1]. Действительно, при $\nu = 1$ функция B не содержит y и λ, а уравнение (3.5) имеет вид $\lambda_2' = 0$. Отсюда $\lambda_2 = \lambda_{2h}$. Поэтому в необходимое условие экстремума (3.7) кроме V и θ входят одни константы, с учетом постоянства $\theta - \Phi(V) = \beta_h$ параметры газа на hb постоянны, и плоские оптимальные контуры получаются укорочением контуров сопел, реализующих равномерный поток.

В осесимметричном случае "обратная задача" с решением на hb уравнений C^+-характеристики и двух задач (3.4) и (3.5) сложнее "обратной задачи", решавшейся в [1]. Однако главное достижение Ю.Д. Шмыглевского состояло в доказательстве того, что $\lambda = 0$ на всей "экстремальной" характеристике hb. По сравнению с [1] это неизмеримо упростило решение.

Прежде чем вспомнить, как сам Юрий Дмитриевич описывал историю столь важного доказательства, перепишем уравнение (3.4) с правой частью, преобразованной с привлечением условия (3.7),

$$\lambda' = \frac{\lambda_1 \cos\theta + (\lambda_2 - y^{\nu-1}p)\sin\theta}{y^{\nu-1}\rho V \sin 2\mu}(V\mu_V - \operatorname{ctg}\mu) + (\nu - 1)\frac{\sin(\theta-\mu) - \cos\theta\sin\mu}{2y^{\nu}\rho V\sin\mu}\lambda.$$

Такая запись поможет понять ту увлекательную и поучительную историю.

Просматривая результаты расчетов, Ю.Д. Шмыглевский обратил внимание на малость λ и на то, что этот множитель уменьшался по мере более точного удовлетворения всех условий задачи и с повышением точности вычислений. "Такое не может быть случайностью. Вдруг, $\lambda = 0$, но почему?" — задавал себе вопросы ученый и вскоре понял, что это на самом деле так, и вот почему. В силу гиперболичности уравнений сверхзвуковых течений идеального газа любой концевой участок wb оптимального контура ab на фиг. 1б должен быть оптимален сам по себе, т.е. при неизменном участке aw и сдвиге участка hk C^+-характеристики hb в невозмущенном потоке. Можно показать, что при этом в выражении (3.3) для $\Delta\chi$ нужно h заменить на k, а условие $G_h = 0$ в (3.5) заменить на $G_k = 0$, т.е. $G = 0$ на всем отрезке hb. Вспомнив выражение для G, найдем, что на hb

$$\frac{\lambda_1 \cos\theta + (\lambda_2 - y^{\nu-1}p)\sin\theta}{y^{\nu-1}\rho V \sin 2\mu} = \frac{\lambda}{4\cos^2\mu}\left[\left(\frac{d\beta}{d\psi}\right)^{-} - \beta'\right]. \tag{3.8}$$

В силу этого предыдущее уравнение примет вид

$$\lambda' = \frac{V\mu_V - \operatorname{ctg}\mu}{4\cos^2\mu}\left[\left(\frac{d\beta}{d\psi}\right)^{-} - \beta'\right]\lambda + (\nu - 1)\frac{\sin(\theta-\mu) - \cos\theta\sin\mu}{2y^{\nu}\rho V\sin\mu}\lambda.$$

Итак, λ определяется линейным однородным уравнением и условием $\lambda_b = 0$. Значит, $\lambda = 0$ на hb, а из равенства (3.8) следует, что

$$\lambda_2 - y^{\nu-1}p = -\lambda_1 \operatorname{ctg}\theta \tag{3.9}$$

также на всем отрезке hb.

Подстановка в условие оптимальности (3.7) $\lambda = 0$ и λ_2 из (3.9) приводит к равенству

$$y^{\nu-1}\rho V^2 \sin^2\theta \operatorname{tg}\mu = \lambda_1 \tag{3.10}$$

с константой λ_1, определяемой по значению левой части в точке h. Вместе с уравнениями (3.2) и уравнением для x' на C^+-характеристике условие оптимальности (3.10) полностью определяет экстремальную характеристику hb. В условие оптимальности в точке b

$$(\lambda_2 - p^+ y^{\nu-1})_b = 0, \tag{3.11}$$

которое получается из (3.6) при постановке задачи со свободной ординатой концевой точки оптимального контура, входит переменный множитель λ_2. Выше его определение предполагало интегрирование уравнения (3.5). Теперь же λ_2 на hb дается формулой:

$$\lambda_2 = y^{\nu-1}(p - \rho V^2 \sin\theta\cos\theta \operatorname{tg}\mu), \tag{3.12}$$

т.е. следствием равенств (3.9) и (3.10). При этом исключение множителей λ_1 и λ_2 с помощью формул (3.10) и (3.12) из уравнения (3.5) сводит его к условию совместности (3.2), а подстановка множителя λ_{2b}, определенного формулой (3.12), в равенство (3.11) приводит к условию Буземана (2.12).

Как отмечалось в начале раздела, Юрий Дмитриевич рассматривал более общие неоднородные течения, в которых

$$2h(p,s) + V^2 = 2H(\psi), \quad s = S(\psi), \tag{3.13}$$

с заданными функциями $H(\psi)$ и $S(\psi)$. Для них также $\lambda = 0$, и потому справедливы полученные ранее уравнение (3.5), равенства (3.9)–(3.12) и условие Буземана (2.12). При $\nu = 1$ уравнение (3.5) имеет вид $\lambda_2' = 0$, что дает $\lambda_2 = \lambda_{2h}$, и в силу (3.10) и (3.12) в плоском случае на экстремальном отрезке hb имеем два интеграла и их следствие:

$$\rho V^2 \sin^2\theta \operatorname{tg}\mu = \lambda_1, \quad p - \rho V^2 \sin\theta\cos\theta \operatorname{tg}\mu = \lambda_{2h}, \quad p - \lambda_1 \operatorname{ctg}\theta = \lambda_{2h}.$$

Продифференцировав последнее, придем к условию совместности в форме, справедливой для неоднородных течений [3]

$$d\theta + \frac{c \operatorname{tg}\mu}{\rho V^2} dp = 0.$$

В [5], [6] вариационная задача для неоднородных течений была решена и с независимой переменной y. При этом переменный множитель Лагранжа $\lambda_2(y)$ вводил выполняющееся на hb дифференциальное уравнение

$$\frac{d\psi}{dy} - \frac{y^{\nu-1}\rho V \sin\mu}{\sin(\theta+\mu)} = 0.$$

Далее, как и при независимой переменной ψ, множитель, вводящий условие совместности, оказывался на hb равным нулю. С учетом этого условие оптимальности сводилось к равенству (3.10), а вместо формулы (3.12) с $\lambda_2(\psi)$ получалась формула

$$\lambda_2(y) = \frac{V\cos(\theta-\mu)}{\cos\mu}.$$

Множитель $\lambda_2(y)$ удовлетворял дифференциальному уравнению, которое в силу данной формулы и равенства (3.10) сводится к условию совместности для C^+-характеристик. В результате и эта формула, нужная лишь для вывода уже известного условия Буземана, и дифференциальное уравнение для $\lambda_2(y)$ к построению экстремального hb не привлекаются, и о них можно было бы забыть. Однако для однородного течения $d\lambda_2/dy = 0$, и получается интеграл

$$\frac{V\cos(\theta-\mu)}{\cos\mu} = \lambda_{2h} \tag{3.14}$$

с константой, определяемой значением левой части в точке h.

Итак, в осесимметричном однородном течении на экстремальном отрезке hb выполняются две конечные связи между параметрами газа, что, однако, не переопределяет задачу построения hb, ибо любая из этих связей – следствие второй и условия совместности. В обратной задаче при известных отрезке ah замыкающей C^--характеристики пучка волн разрежения с фокусом в точке a и экстремальном отрезке hb C^+-характеристики оптимальный контур сопла ab находится из решения методом характеристик задачи Гурса как линия тока, проходящая через точку a.

Кроме рассмотренных выше “внутренних” задач, в [5], [6] решены “внешние” задачи построения оптимальных сверхзвуковых частей сопел с центральным телом и оптимальных по волновому сопротивлению кормовых частей тел с протоком. В них на экстремальном отрезке hb не C^+-, а C^--характеристики, как и выше, справедливо условие оптимальности (3.10) при замене формулы (3.12) и условий (2.12) и (3.14) на следующие:

$$\lambda_2 = y^{\nu-1}(p + \rho V^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\mu), \tag{3.15}$$

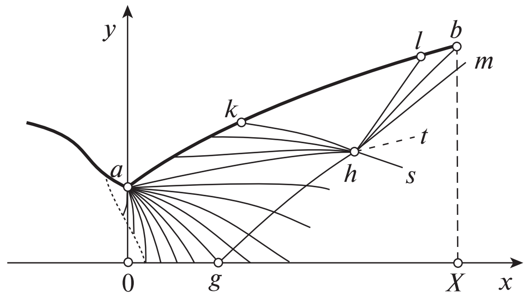
$$(p - p^+ + \rho V^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{tg}\,\mu)_b = 0, \quad \frac{V\cos(\theta+\mu)}{\cos\mu} = \lambda_{2h}. \tag{3.16}$$

Именно с “внешней” вариационной задачи начинался в [5], [6] поиск оптимального решения. Искался контур ab кормовой части обтекаемого сверхзвуковым потоком тела, реализующий минимум сопротивления или определяемого формулой (2.1) отрицательного интеграла сил давления. При отсутствии излома в точке a точка h отрезка hb контрольного контура лежит на выходящей из a C^+-характеристике набегающего потока, и задача построения оптимального контура ab в общем случае решения не имеет. Как и для внутренней задачи без излома, для решения не хватает произволов. Не встречавшийся с подобным в классическом вариационном исчислении Юрий Дмитриевич обратился к Д.Е. Охоцимскому, у которого такие ситуации возникали в теории движения ракет [7]. Тот посоветовал поискать в газовой динамике течения наибыстрейшего разгона, привлечение которых должно было решить проблему. Увенчавшийся успехом поиск [8] привел к излому с центрированной волной разрежения, обладавшей требуемым свойством. Сейчас и без этого ясно, что излом неизбежен потому, что контур слева от точки a задан, а справа – ищется при отсутствии условия гладкой стыковки в постановке задачи. Думаю, именно так рассуждали введшие излом без комментариев авторы [1]. Конечно, так проще, но, с другой стороны, не столь загадочно и увлекательно, как было на незабываемой защите кандидатской диссертации Юрия Дмитриевича в мае 1957 г.

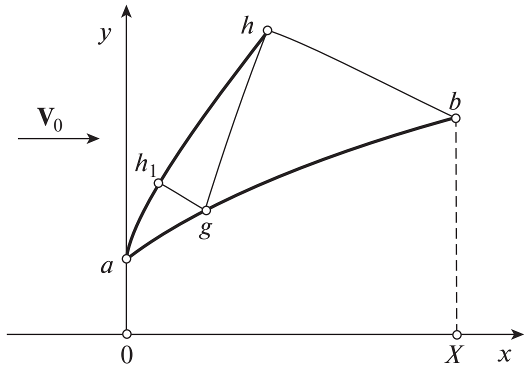
Как уже отмечалось выше, при построении оптимальных сопел легче решать обратную задачу, состоящую в определении экстремального отрезка hb-характеристики, координат точки b и давления p^+ для произвольной точки h пучка волн разрежения. Однако в 1961 г. Л.Е. Стернин – сотрудник гениального конструктора жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) В.П. Глушко – установил, что в осесимметричном случае построение отрезка hb с непрерывными параметрами на нем возможно не всегда [9] (уже много лет США покупают ЖРД НПО “Энергомаш им. акад. В.П. Глушко”). В волне разрежения есть линия, такая, что на экстремальных характеристиках, выходящих из точек h слева от нее, полные производные по y вдоль hb всюду конечны, а справа, в некоторой точке hb, становятся бесконечными. Построение непрерывного течения во втором случае невозможно. В связи с этим Юрий Дмитриевич [10], [11] провел анализ необходимых условий экстремума χ, нашел условие максимума и показал, что при $\nu = 2$ области максимума χ и непрерывности полученных ранее решений (названных “непрерывными”) совпадают.

В дополнение к непрерывным решениям в [10], [11] построены “разрывные безударные” решения, отличающиеся от первых фокусировкой C^--характеристик в точке h. Схема такого течения приведена на фиг. 2. На ней ahk и lhm – пучки волн сжатия и разрежения, hs – скачок уплотнения и ht – тангенциальный разрыв. “Безударными” эти решения названы потому, что идущий из точки h косой скачок располагается вне области определенности ahb контура ab.

Параллельно с соплами и кормовыми частями Ю.Д. Шмыглевский тогда же занялся построением оптимальных профилей и тел вращения, обтекаемых с образованием присоединенных го-



Фиг. 2. Схема течения при реализации “разрывного безударного” решения Ю.Д. Шмыглевского [10], [11].



Фиг. 3. Схема обтекания оптимального контура тела с протоком.

ловных скачков [12]–[14]. В этих задачах (фиг. 3, gh – C^+-характеристика) контрольный контур образуют отрезки скачка ah и C^--характеристики hb. Угол наклона скачка σ к оси x и функцию $S(\psi)$ при $H = H_0$ в (3.13) определяет начальный участок ag искомого контура, а экстремальную характеристику hb – его концевой участок gb. Поэтому функция $S(\psi)$ при варьировании параметров потока на hb считается заданной, экстремальный отрезок hb по-прежнему определяет равенство (3.10), а вариации $\delta\sigma$ на ah не зависят от вариаций параметров на hb. Оптимальный угол $\sigma(\psi)$ на ah определяет условие, которое получается приравниванием нулю коэффициента W при $\delta\sigma$ в $\Delta\chi$. Подставив в равенство $W_h = 0$ множители λ_1 и λ_2 из (3.10) и (3.15), придем к уравнению, связывающему параметры потока и угол σ в точке h головного скачка. Для фиксированного равномерного сверхзвукового набегающего потока оно выполняется при конечном числе значений σ – корней этого уравнения. Один корень: $\sigma_0 = \mu_0$ отвечает обтеканию прямолинейного контура ab, параллельного скорости набегающего потока $\mathbf{V}_0$ и “скачку нулевой интенсивности” (C^+-характеристике). “Нетривиальные” корни зависят от свойств газа. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями число таких корней в зависимости от величины скорости, отнесенной к критической, изменяется от нуля до трех.

В плоском случае каждому нетривиальному корню отвечает обтекание некоторого клина с постоянными параметрами в $abha$. Отвечающие нетривиальным корням оптимальные клинья первым обнаружил в самом начале своей научной деятельности Г.Г. Чёрный в его первой, тогда закрытой печатной работе [15] (см. также [16]). Сокращенный вариант этой замечательной работы увидел свет девятью годами позже в монографии [17]. Изучая сверхзвуковое обтекание тел, близких к клину, Г.Г. Чёрный нашел первое точное решение задачи о построении головной части минимального волнового сопротивления. Такой плоской головной частью оказался клин, но не всегда, как следовало из линейной теории, а только при равенстве нулю коэффициента отражения возмущений давления, приносимых к скачку от образующей клина по C^+-характеристикам. Развитый Г.Г. Чёрным для доказательства этого результата оригинальный прием “варьирования в характеристических полосках” и в наше время используется при решении вариационных задач газовой динамики.

Оптимальные клинья, обнаруженные Г.Г. Чёрным, – единственный пример опережения Ю.Д. Шмыглевского в те годы не в смысле обобщения его результатов, например, на газы, отличные от совершенного, а в принципиальных вопросах построения оптимальных аэродинамических форм. Автор гордится тем, что и Горимир Горимирович, и Юрий Дмитриевич – его учителя.

В осесимметричном случае те же нетривиальные корни определяют параметры сверхзвукового потока за криволинейным скачком в точке h. От нее при $x_h = 0$, $y_h = 1$ и $\psi_h = \rho_0 V_0/2$ численным интегрированием по ψ уравнений

$$x' = -\frac{\cos(\theta - \mu)}{y\rho V \sin\mu}, \quad y' = -\frac{\sin(\theta - \mu)}{y\rho V \sin\mu}, \quad \theta' - \frac{\operatorname{ctg}\mu}{\rho V^2} p' + \frac{\sin\theta}{y^2 \rho V} = 0$$

для $\psi < \psi_h$ с привлечением равенств (3.10) и $W = 0$, отвечающих $\nu = 2$, уравнений состояния газа и условий на косом скачке строятся экстремальные скачок и C^--характеристика. Согласно выполненным анализу и расчетам, с приближением к оси симметрии угол наклона скачка растет и при конечных ψ и y достигает величины, при которой поток за скачком становится звуковым. Для найденных экстремальных отрезков ah и hb скачка и C^--характеристики течение в $abha$ строится после этого методом характеристик. Любую линию тока построенного течения можно принять за оптимальную образующую головной части тела вращения с протоком. Для всех таких тел вращения коэффициент отражения равен нулю только в единственной точке h экстремального скачка.

Как мог заметить читатель, все рассказанное выше не предполагало конкретного вида уравнений состояния газа. Требовалось только, чтобы его термодинамические свойства, включая скорость звука a, были известными функциями двух из них, например, давления p и удельной энтропии s. Вне зависимости от вида этих функций для рассматриваемых течений имели место формулы: $(\partial p/\partial V)_\psi = -\rho V$ и $(\partial\rho/\partial p)_\psi = a^{-2}$. Благодаря им в выражениях для $\Delta\chi$ появлялась единственная зависящая от вида уравнений состояния величина $\mu_V = d\mu/dV$ или $(\partial\mu/\partial V)_\psi$ для неоднородных течений, но и она не вошла ни в условия Буземана для внутренней и внешней задач, ни в условия оптимальности (3.10), (3.14) и (3.16).

В отличие от вышеизложенного Юрий Дмитриевич в цитированных работах с самого начала включал в рассмотрение уравнения состояния совершенного газа с постоянными теплоемкостями и их отношением (“показателем адиабаты”) γ. К тому же, не всегда было ясно, какие конкретные выражения потребуются в дальнейшем. Поэтому нередко выписанные заранее сложные зависимости p, ρ и a от V или от μ для совершенного газа проходили через весь анализ, усложняя и его, и конечные результаты. В то же время именно это подвигло автора, следуя за Учителем, оформлявшим тогда докторскую диссертацию и ее сокращенный вариант [11], обобщить его результаты на произвольный двухпараметрический газ. Следствия затраченных усилий – брошюра [18] и приобретенный автором бесценный опыт решения вариационных задач сверхзвуковой газовой динамики. Еще раньше подход [5], [6] к построению оптимальных сопел под руководством Юрия Дмитриевича перенес на двухпараметрический газ уже упоминавшийся ранее Л.Е. Стернин [19].

В 1958 г. Г.В.Р. Рао [20] в задаче построения для однородного потока совершенного газа оптимального контура сверхзвуковой части сопла получил необходимые условия экстремума в форме (3.10) и (3.14), не предполагая, что hb – отрезок C^+-характеристики и не привлекая условия совместности. У него оптимизируемая тяга и фиксированные длина и расход выражались через интегралы по кривой ghb – C^+-характеристике только в пучке волн разрежения. Угол наклона $\varphi = \varphi(y)$ отрезка hb к оси x искался вместе с u и v. Полученное при этом выражение для $\Delta\chi$ включало интеграл по искомому отрезку hb с точкой h на замыкающей C^--характеристике ahe пучка волн разрежения и с $(A\delta u + B\delta v + C\delta\varphi)$ в этом интеграле. Приравняв незаконно нулю коэффициенты при трех вариациях, Г.В.Р. Рао нашел, что $\varphi = \theta + \mu$, т.е. hb – отрезок C^+-характеристики, и на нем выполняются равенства (3.10) и (3.14).

В [20] газ был совершенным, и условия оптимальности в форме (3.10) и (3.14) – следствия того, что δp и $\delta\rho$ находились не дифференцированием $p(V)$ и $\rho(V)$, а по формулам $dp/dV = -\rho V$ и $d\rho/dp = a^{-2}$, верным для однородных течений любых двухпараметрических газов. В [21] Г.В.Р. Рао, применив тот же подход [20] к соплу с центральным телом, получил условия оптимальности в форме (3.10) и (3.16) для экстремального отрезка C^--характеристики.

В 1959 г. к построению “методом Рао” оптимальной сверхзвуковой части сопла при неоднородном течении обратился К. Гудерлей [22], рассмотревший газ, у которого p и ρ представимы произведением функций h и s. Там же К. Гудерлей, понимая, что подход Рао нуждается в обосновании, попытался сделать это, однако, как видно из дальнейшего, без должного успеха. Прежде всего, непонятно, что делает вариации δu, δv и $\delta\varphi$ независимыми, а без этого приравнивание нулю коэффициентов A, B и C при них в интеграле по hb незаконно. К вопросу о законности обсуждаемого подхода обратились и Ю.Д. Шмыглевский с недавно закончившим МФТИ его молодым сотрудником В.М. Борисовым. В их заметке [23] было показано, что причины удач Рао обусловлены особенностями рассмотренных задач и уравнений течения и в этом отношении случайны.

Заметка [23] еще была в печати, когда стало известно о конференции по оптимальным аэродинамическим формам, организуемой фирмой “Боинг”. О событиях, развернувшихся в связи с этой конференцией, речь пойдет в следующем разделе.

4. КОНФЕРЕНЦИЯ В СИЭТЛЕ И СОБЫТИЯ ВОКРУГ НЕЕ

Осенью 1962 г. стало известно, что фирма “Боинг” наметила провести в своей штаб-квартире в Сиэтле, шт. Вашингтон, конференцию по оптимальным аэродинамическим формам. Г.Г. Чёрный, приглашенный на нее от Советского Союза, через автора передал Ю.Д. Шмыглевскому материалы конференции с тем, чтобы тот поспешил принять в ней участие. Оба учителя автора знали и уважали друг друга, и первый мог не сомневаться в том, что второй достойно представит нашу науку.

Юрий Дмитриевич написал о желании принять участие в конференции ее организатору – Анжело Миеле, сообщив тому о направлении своих исследований. Реакция А. Миеле, лишь недавно занявшегося оптимальными аэродинамическими формами в рамках локальных законов сопротивления, была вполне доброжелательной. В его приглашении было пожелание, чтобы новый доклад не пересекался тематически с заявленным и уже принятым докладом Г.В.Р. Рао, приложенный текст которого практически повторял статью [20].

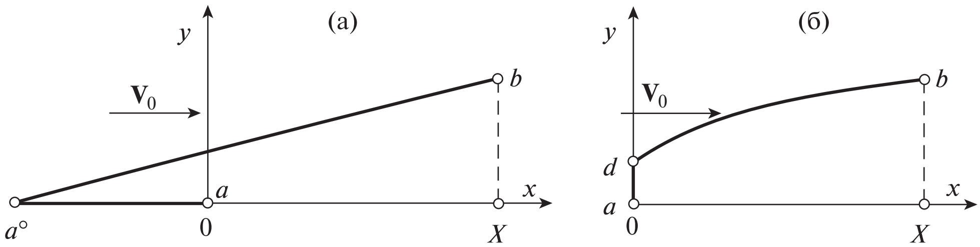
Учтя пожелание А. Миеле, Юрий Дмитриевич направил тому доклад о построении оптимальных кормовых частей плоских и осесимметричных тел и обтекаемых с присоединенными скачками головных частей профилей и тел вращения с протоком. Однако введение доклада включало также обзор работ по соплам, из которого были очевидны передовые позиции советских ученых и лично Ю.Д. Шмыглевского. Кроме того, А. Миеле были посланы переводы основных статей Юрия Дмитриевича, а также находящейся в печати и вышедшей в свет в начале 1963 г. заметки [23] с критическим анализом подхода Рао. После этого началось нечто необъяснимое.

А. Миеле, не будучи, согласно сказанному выше, специалистом в вариационных задачах, решаемых в приближении уравнений течения идеального газа (“в точной постановке”), вдруг начал высказывать сомнения в правильности результатов Ю.Д. Шмыглевского. “Сомнения” вращались вокруг двух вопросов: доказательства того, что условие $G = 0$ выполняется на всем отрезке hb, и двух конечных, эквивалентных равенствам (3.10) и (3.16) условий на отрезке hb для оптимальных кормовых частей тел вращения, обтекаемых однородным по H и s потоком совершенного газа. Напомню, что именно эти условия, записанные в более простой форме (3.10) и (3.16), получал и Рао. Все усилия объяснить А. Миеле эти “точки преткновения” были напрасны.

Последнее письмо А. Миеле, полученное за две недели до начала конференции, заканчивалось предложением: “Через неделю я буду в Париже. Давайте встретимся, чтобы снять вопросы, мешающие принятию Вашего доклада”. Запомнился ответ Юрия Дмитриевича: “У меня к Вам единственная просьба. Если Вы поймете, что были неправы, не сообщайте мне об этом”. Когда же “понявший, что был неправ”, попытался связаться с Юрием Дмитриевичем, тот был непреклонен. Чтобы отстоять честь Учителя, с А. Миеле пришлось “воевать” ученику, но это было позднее, а тогда завязалась другая увлекательная история с участием ученика и его Учителей. Забыв на время об А. Миеле, напомним ее.

Один из докладов Г.Г. Чёрного и его аспиранта А.Л. Гонора на предстоящей конференции касался головных частей тел вращения, оптимальных в рамках формулы Ньютона–Буземана для давления на теле. При заданных длине и радиусе основания они не могли построить оптимальный контур, начинающийся на оси симметрии. Как и в точной постановке [14], получались только тела с протоком. То же положение имело место и с более простой формулой Ньютона. В связи с этим А.Л. Гонор, повстречав в ЦИАМ автора, сказал: “Подумай, вдруг чего-нибудь сообразишь”.

Приехав в ВЦ, автор взял в библиотеке “Основы вариационного исчисления” М.А. Лаврентьева и Л.А. Люстерника, вспомнил то, чему его учили в МФТИ, проделал для формулы Ньютона



Фиг. 4. К построению оптимальной головной части тела вращения в приближении формулы Ньютона: (а) “мысленный эксперимент”, (б) оптимальный контур.

необходимые выкладки и, не построив требуемый контур и ничего не сообразив, пошел домой, чтобы утром проснуться с готовым решением. В то утро ему представился или приснился такой мысленный эксперимент. Ранее, как само собой разумеющееся, полагалось, что из точки a образующая ab идет сразу вправо. А если не так? Составим ее из двух участков (фиг. 4а): идущего влево отрезка aa° оси x и наклонного участка $a^\circ b$. Для такой образующей в рамках формулы Ньютона, согласно которой на ab: $p = p_0 + \rho_0 V_0^2 \sin^2\theta$, и без вариационного исчисления коэффициент волнового сопротивления $c_x \to 0$ при $x_{a^\circ} \to -\infty$. Но, тут же спохватился “экспериментатор”, мы ведь задавали длину головной части, и потому нельзя вылезать за ось y! Значит, оптимальный контур может содержать передний торец ad (фиг. 4б), появляющийся из-за ограничения длины головной части как участок краевого экстремума с допустимыми вариациями $\delta x \ge 0$ и $\delta x' \ge 0$ – из-за условия применимости формулы Ньютона.

Следствия утреннего “эксперимента” были получены в тот же день. В частности, было найдено условие стыковки в точке d торца ad и выпуклого участка двустороннего экстремума db: $x'_{d+} = 1$. Рассказ же обо всем этом Юрию Дмитриевичу вызвал бурю восторга: “Александр Николаевич, немедленно пишите статью” – его совет. Что было потом, любознательный читатель узнает, прочтя недавние воспоминания автора [24], [25], а мы вернемся к “войне” с А. Миеле.

По результатам конференции в Сиэтле в 1965 г. под редакцией А. Миеле вышла книга [26], к переводу которой на русский язык под редакцией А.Л. Гонора привлекли и автора данной статьи. Одной из доставшихся ему глав была глава Г.В.Р. Рао [27], в корне отличающаяся от его доклада, присланного Ю.Д. Шмыглевскому в 1962 г. Ссылаясь на статью К. Гудерлея [22], который якобы обосновал первоначальный подход [20], Рао заменил его на подход Юрия Дмитриевича [5], [6] с рядом неверно излагаемых деталей, отмеченных переводчиком в русском издании [26].

В связи с переводом книги [26] в Москву летом 1966 г. прилетел А. Миеле, встретившийся с А.Н. Крайко. Дав необходимые разъяснения, А.Н. Крайко отправил А. Миеле их письменный вариант. Вот фрагмент ответа А. Миеле: “Дорогой Доктор Крайко, мои сотрудники предприняли проверку Ваших материалов в соответствии с тем, что Вы предложили. Эта проверка, теперь завершенная, показала, что Вы абсолютно правы. Поэтому я был бы признателен, если бы Вы передали эту информацию доктору Шмыглевскому с извинениями за все неудобства, которые я ему причинил. Поскольку Вы с доктором Гонором переводите книгу “Теория оптимальных аэродинамических форм” и планируется добавление нескольких глав, я хотел бы предложить Вам пригласить доктора Шмыглевского, чтобы он написал свою собственную главу. С моей точки зрения, это был бы лучший способ закончить спор к всеобщему удовлетворению”. На письмо близкого содержания Ю.Д. Шмыглевскому ответа, естественно, не последовало. Этим, однако, история отношений с А. Миеле тогда не закончилась.

К русскому переводу [26] было добавлено “Приложение” [28] из двух частей. В первой “Вариационные задачи гиперзвуковой аэродинамики с использованием приближенных законов сопротивления”, написанной А.Л. Гонором, в основном дан обзор исследований, выполненных после конференции в Сиэтле. Во второй, большей по объему, “Вариационные задачи сверхзвуковой аэродинамики с использованием точных уравнений течения газа”, написанной А.Н. Крайко, при обсуждении практически всех результатов этого направления демонстрировался приоритет советских ученых. Узнав об этом “Приложении”, А. Миеле сообщил А.Л. Гонору о готовности опубликовать его в журнале “Journal of Optimization Theory and Applications”, главным редактором которого он тогда стал. Загоревшегося А.Л. Гонора охладил его соавтор: “Такого не будет”. Как и ожидалось, английский перевод “Приложения” света не увидел.

5. НЕМНОГО О ДАЛЬНЕЙШИХ РЕЗУЛЬТАТАХ ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

Длительное сотрудничество автора с Ю.Д. Шмыглевским ознаменовалось совместной публикацией [29] Учителя, ученика и И.Н. Наумовой. Авторы обратили внимание на то, что при заданной длине оптимальные тела могут иметь и передний (как у головной части фиг. 4б), и задний торец. В задаче о сверхзвуковой части сопла это объединило две постановки в одну. В ней заданы максимально допустимые осевой и радиальный размеры (X и Y), а искомый контур в общем случае состоит из обтекаемого сверхзвуковым потоком участка ab и торца $x = X$. На возможный торец $y_b \leq y \leq Y$ действует постоянное давление p^+, и он присутствует, если определенная условием Буземана (2.12) ордината $y_b < Y$. Торец является участком краевого экстремума, если при выполнении условия Буземана $\sin^2 \theta_b > 0$. Если найденный угол $\theta_b = 0$, то это значит, что заданная длина X превышает длину сопла, реализующего равномерный осевой поток, и с учетом трения должна быть уменьшена.

Последняя проблема, которую автору довелось решать в то время, связана с развитием "общего метода множителей Лагранжа (ОММЛ)". Его практически одновременно предложили применять к решению не допускающих перехода к контрольному контуру вариационных задач газовой динамики К. Гудерлей с Дж. Армитейджем [30] и Т.К. Сиразетдинов [31]. Все, кто тогда рядом с Юрием Дмитриевичем имели отношение к вариационным задачам, сочли, что этот метод весьма перспективен для построения оптимальных конфигураций в нерешенных и в почему-то нерешаемых задачах. Одной из таких задач была задача построения плоских и осесимметричных тел минимального сопротивления, обтекаемых с присоединенным головным скачком. В силу результатов обоих Учителей автора решения этой задачи были найдены лишь при равном нулю коэффициенте отражения возмущений давления от головного скачка в точке h (фиг. 3). Предположив, что при ненулевых коэффициентах отражения оптимальный контур может иметь выпуклый излом вблизи точки g, Юрий Дмитриевич предложил заняться этой задачей в рамках ОММЛ своему новому молодому сотруднику – выпускнику МФТИ А.В. Шипилину. Со временем А.В. Шипилин построит требуемые решения [32], [33], но тогда он сразу столкнулся с проблемой: невозможностью решить сопряженную задачу для множителей Лагранжа $\lambda_{1-3}(x, y)$, определяемых в ОММЛ линейными уравнениями с частными производными. Эти уравнения имеют те же, что уравнения течения, характеристики, т.е. $C^{\pm}$-характеристики и линии тока. Сопряженность задачи обусловлена заданием начальных условий для них на C^--характеристике hb, а не в набегающем потоке, как для параметров газа.

А.В. Шипилин искал выход из возникшей ситуации подбором величины излома в точке g. Автор же, убежденный, что сопряженная задача должна иметь решение для любых контуров ab, пришел к разрывам множителей при непрерывных параметрах потока. На принципиальную важность этого результата для решения вариационных задач указал Ю.Д. Шмыглевский в сборнике своих трудов [34] (ссылки изменены): "Крайко [35] в рамках метода множителей Лагранжа ввел разрывы множителей и тем придал ему общность". Как и положено для линейных уравнений с частными производными от двух независимых переменных, линиями разрыва $\lambda_{1-3}(x, y)$ могут быть не только скачки уплотнения и тангенциальные разрывы, на которых рвутся параметры газа, но и характеристики всех семейств, на которых параметры газа непрерывны. Для задачи А.В. Шипилина вторая возможность была принципиальна, поскольку в ней при отличном от нуля коэффициенте отражения в точке h линия разрыва множителей – ломаная из отрезков (фиг. 3) hg, gh_1 и т.д. C^+- и C^--характеристик. Другие источники их разрыва – обтекаемые с образованием пучков волн разрежения внутренние изломы контура. Здесь "разрывна" характеристика, приходящая в излом по потоку. Усиление и ослабление разрывов множителей вдоль характеристик описываются конечными формулами, а их отражение от головных скачков, твердых стенок и оси симметрии подобно отражению в акустическом приближении малых скачков параметров потока. Следует отметить, что в решенной ОММЛ задаче построения оптимальной сверхзвуковой части сопла с заданной площадью обтекаемой газом поверхности [30] и в [31] разрывов множителей не было.

Неизменно теплые отношения автора с одним из двух своих Учителей – Ю.Д. Шмыглевским – никогда не прерывались. Об этом свидетельствуют, в частности, слова признательности в вышедших из печати с тех пор монографиях и сборниках [3], [4], [16], [36]. С Юрием Дмитриевичем обсуждались все новые результаты автора и его учеников по оптимальным аэродинамическим формам. Некоторое представление о части из них дают приведенные выше монографии, Часть 4 сборника [16] с Введением [37] в нее и обзор [28]. Из задач, решенных с тех пор автором и его учениками, приведу лишь две. В первой [38] в точной постановке построены оптимальные головные части тел вращения, о чем в 1960–1964 гг. мечтали Учитель и его ученик. За решение этой задачи автор в 2004 г. был награжден “Медалью и премией им. академика Л.И. Седова”. Вручал их Горимир Горимирович в присутствии Юрия Дмитриевича. Вторая задача [39], решенная совсем недавно, посвящена построению оптимальной кормовой части при кусочно-равномерном набегающем потоке с тангенциальным разрывом. Параметры набегающего потока таковы, что строившие ее прямым методом ожидали получить контур с вогнутым изломом, обтекаемым с косым скачком. Каково же было их удивление, когда прямой метод с “генетическим алгоритмом” и “кривыми Бернштейна-Безье” вместо решений с таким изломом и косым скачком построил решения с центрированными волнами сжатия и разрежения, фокусирующимися на контактном разрыве. Будучи аналогом “разрывного безударного решения” [10], [11], построенного Юрием Дмитриевичем 58 лет назад, найденные решения допускают переход к контрольному контуру, приводящему к точным условиям оптимальности. Жаль, что Юрий Дмитриевич не дожил до этого.

Наконец, письмо в редакцию [40] напоминает о том, что все авторы этого письма в 1979 г. получили Государственную премию СССР за “работу в области аппаратостроения” (если “раскрыть”, то за оптимальное профилирование ракетных сопел).

Закончу дарственной надписью ученику от Учителя на сборнике его работ Юрия Дмитриевича [34]: “Дорогому Александру Николаевичу в память обо всем связывающем нас неповторимо прекрасном. Ю. Шмыглевский. 11.01.1999”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guderley K.G., Hantsch E.* Beste Formen für achsensemmetrische Überschallschubdüsen // Zeitschrift für Flugwisstnschaften. 1955. Bd. 3. H. 9. S. 305–313. *Гудерлей К., Хантш Э.* Наилучшие формы сверхзвуковых осесимметричных реактивных сопел // Сб. Механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. № 4 (38). С. 53–69.
2. *Никольский А.А.* О телах вращения с протоком, обладающих наименьшим волновым сопротивлением в сверхзвуковом потоке / Сб. теоретических работ по аэродинамике. М.: Оборонгиз, 1957. С. 56–63.
3. *Крайко А.Н.* Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС ПРЕСС, 2010. 440 с.
4. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 448 с.
5. *Шмыглевский Ю.Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений // Прикл. матем. и механ. 1957. Т. 21. Вып. 2. С. 195–206.
6. *Шмыглевский Ю.Д.* Вариационная задача газодинамики осесимметричных сверхзвуковых течений // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. № 3. С. 520–522.
7. *Охоцимский Д.Е.* К теории движения ракет // Прикл. матем. и механ. 1946. Т. 10. Вып. 2. С. 251–272.
8. *Шмыглевский Ю.Д.* О некоторых свойствах осесимметричных сверхзвуковых течений газа // Докл. АН СССР. 1958. Т. 122. № 5. С. 782–784.
9. *Стернин Л.Е.* О границе области существования безударных оптимальных сопел // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139. № 2. С. 335–336.
10. *Шмыглевский Ю.Д.* Вариационные задачи сверхзвуковых тел вращения и сопел // Прикл.матем. и механ. 1962. Т. 26. Вып. 1. С. 110–125.
11. *Шмыглевский Ю.Д.* Некоторые вариационные задачи газовой динамики // Тр. ВЦ АН СССР. 1963. 142 с.
12. *Шмыглевский Ю.Д.* О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление // Прикл. матем. и механ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 269–273.
13. *Шмыглевский Ю.Д.* Поправка к статье Ю.Д. Шмыглевского “О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление” // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. Вып. 2. С. 392.
14. *Шмыглевский Ю.Д.* Об одном классе тел вращения с минимальным волновым сопротивлением // Прикл. матем. и механ. 1960. Т. 24. Вып. 5. С. 923–926.
15. *Черный Г.Г.* Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // Тр. ЦИАМ им. П.И. Баранова. 1950. № 197. 11 с. *Черный Г.Г.* Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // [16]. С. 443–462.
16. Газовая динамика. Избранное. Издание второе исправленное. В 2-х т. Т. 1 / Под ред. А.Н. Крайко. М.: Физматлит, 2005. 720 с.
17. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
18. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами // Тр. ВЦ АН СССР. 1963. 84 с.
19. *Стернин Л.Е.* К расчету осесимметричного реактивного сопла наименьшего веса // Изв. АН СССР. Механ. и машиностр. 1959. № 1. С. 41–45.

20. *Rao G.V.R.* Exhaust nozzle contour for optimum thrust // Jet Propulsion. 1958. V. 28. № 6. P. 377–382.
21. *Rao G.V.R.* Spike nozzle contour for optimum thrust // Planet. and Space Sci. 1961. № 4. P. 92–101.
22. *Guderley K.G.* On Rao’s method for the computation of exhaust nozzles // Zeitschrift für Flugwisstnschaften. 1959. Bd. 7. H. 12. S. 345–350.
23. *Борисов В.М., Шмыглевский Ю.Д.* К постановке вариационных задач газовой динамики // Прикл. матем. и механ. 1963. Т. 27. Вып. 1. С. 183–185.
24. *Крайко А.Н.* Задача Ньютона о головной части минимального сопротивления с разъяснениями А.Н. Крылова и продолжение истории решения в XX и в начале XXI века // Гидродинамика больших скоростей и кораблестроение / Сб. тр. Международной летней научной школы-конференции, посвященной 155-летию со дня рождения акад. А.Н. Крылова. Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. ун-та, 2018. 268 с. С. 47–56.
25. *Крайко А.Н.* Задача Ньютона о построении оптимальной головной части обтекаемого тела. История решения // Прикл. матем. и механ. 2019. Т. 83. Вып. 5–6. С. 734–748.
26. Theory of optimum aerodynamic shapes / Ed. by A. Miele. N.Y.-London: Academic press, 1965. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
27. *Рао Г.В.Р.* Построение оптимальных ракетных сопел методом сведения к вариационной задаче одного переменного // Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. С. 161–171.
28. *Гонор А.Л., Крайко А.Н.* Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 455–492.
29. *Крайко А.Н., Наумова И.Н., Шмыглевский Ю.Д.* К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28. Вып. 1. С. 178–182.
30. *Guderley K.G., Armitage J.V.* General method for the determination of best supersonic rocket nozzles // Paper presented at the Symposium on extremal problems in aerodynamics, Boeing Scientific Research Laboratories, Flight Science Laboratory, Seattle, Washington, December 3–4, 1962 . *Гудерлей К., Армитейдж Дж.* Общий метод определения оптимальных ракетных сопел // Сб. Механика. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. № 6 (82). С. 85–101.
31. *Сиразетдинов Т.К.* Оптимальные задачи газодинамики // Изв. ВУЗов. Авиационная техн. 1963. № 2. С. 11–21.
32. *Шипилин А.В.* Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1966. № 4. С. 9–18.
33. *Шипилин А.В.* Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами // В кн.: Сборник теоретических работ по гидромеханике. М.: Тр. ВЦ АН СССР, 1970. С. 54–106.
34. *Шмыглевский Ю.Д.* Аналитические исследования динамики газа и жидкости. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 232 с.
35. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений // Прикл. матем. и механ. 1964. Т. 28. Вып. 2. С. 285–295.
36. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Якунина Г.Е.* Теория аэродинамических форм, близких к оптимальным. М.: “ЯНУС-К”, 2001. 132 с.
37. *Крайко А.Н.* Вариационные задачи газовой динамики и оптимальные аэродинамические формы. Введение // [16]. Часть 4. С. 357–372.
38. *Крайко А.Н., Пудовиков Д.Е., Пьянков К.С., Тилляева Н.И.* Осесимметричные головные части заданного удлинения, оптимальные или близкие к оптимальным по волновому сопротивлению // Прикл. матем. и механ. 2003. Т. 67. Вып. 5. С. 795–828.
39. *Крайко А.Н., Пьянков К.С., Тилляева Н.И., Шаповалов В.А.* Внутренние скачки уплотнения при сверхзвуковом обтекании контуров оптимальных тел и сопел // Изв. РАН. Механ. жидкости и газа. 2020. № 6. С. 121–138.
40. *Крайко А.Н., Мельников Д.А., Пирумов У.Г., Сергиенко А.А., Стернин Л.Е., Шмыглевский Ю.Д.* Замечания к статье Л.В. Гогиша “Исследование коротких сверхзвуковых сопел” (МЖГ, 1996, № 2, стр. 175–180) // Изв. АН СССР. Механ. жидкости и газа. 1967. №. 1. С. 185–186.