ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1894–1903

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

УГЛОВОЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ, ИМЕЮЩИМИ СТАЦИОНАРНЫЕ ТОЧКИ

И. В. Денисов

300026 Тула, пр-т Ленина, 125, Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого, Россия

e-mail: den_tspu@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2020 г.
Переработанный вариант 21.07.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Для сингулярно возмущенного параболического уравнения

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\epsilon)$$

в прямоугольнике рассматривается задача с краевыми условиями I рода. Предполагается, что в угловых точках прямоугольника функция F относительно переменной u является кубической. Нуль производной функции F и граничное значение задачи в каждой угловой точке прямоугольника лежат по одну сторону от решения вырожденного уравнения. Строится полное асимптотическое разложение решения при $\varepsilon\to 0$ и обосновывается его равномерность в замкнутом прямоугольнике. Библ. 6.

Ключевые слова: пограничный слой, асимптотическое приближение, сингулярно возмущенное уравнение.

DOI: 10.31857/S0044466921110065

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается начально-краевая задача вида

$$\varepsilon^2\left(a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}\right)=F(u,x,t,\varepsilon),\quad (x,t)\in\Omega, \tag{0.1}$$

$$u(x,0,\epsilon)=\phi(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{0.2}$$

$$u(0,t,\epsilon)=\psi_1(t),\quad u(1,t,\epsilon)=\psi_2(t),\quad 0\le t\le T, \tag{0.3}$$

где через Ω обозначен прямоугольник $\{(x,t)\,|\,0<x<1,\ 0<t<T\}$.

В [1] рассмотрен случай, когда в угловых точках прямоугольника функция F кубична относительно переменной u, причем нуль производной функции F и граничное значение задачи в угловой точке лежат по разные стороны от решения вырожденного уравнения. В предлагаемой статье рассматривается случай, когда нуль производной функции F и граничное значение задачи в угловой точке прямоугольника лежат по одну сторону от решения вырожденного уравнения. Оказывается, что наличие такой точки существенно влияет на вид и способ построения барьерных функций при доказательстве существования подходящего решения задачи для определения главного члена угловой части асимптотики решения. В работе строится полное асимптотическое приближение решения задачи (0.1)–(0.3) при $\epsilon\to 0$ и обосновывается равномерность этого приближения в замкнутом прямоугольнике $\bar\Omega$ с точностью любого порядка.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Повторим общие условия, которые предполагаются выполненными (см. [1]).

Условие 1. Функции $F(u,x,t,\epsilon)$, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ являются достаточно гладкими и в угловых точках прямоугольника Ω выполняются условия согласованности начально-краевых значений

$$\phi(0) = \psi_1(0), \quad \phi(1) = \psi_2(0).$$

Условие 2. Вырожденное уравнение $F(u,x,t,0) = 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$ имеет решение, которое обозначается как $u = \bar{u}_0(x,t)$.

Заметим, что в силу нелинейности это уравнение может иметь и другие решения.

Условие 3. Производная $F'_u(\bar{u}_0(x,t),x,t,0) > 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{\Omega}$.

Условие 4. Начальная задача

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = -F(\bar{u}_0(x,0) + \Pi_0, x, 0, 0), \quad \Pi_0(x,0) = \phi(x) - \bar{u}_0(x,0) \tag{1.1}$$

имеет решение $\Pi_0(x,\tau)$ при $\tau \geq 0$, удовлетворяющее условию $\Pi_0(x,\infty) = 0$ (здесь параметр $x \in [0, 1]$).

Условие 5. Для систем

$$\frac{dz_1}{dy} = z_2, \quad a^2\frac{dz_2}{dy} = F(\bar{u}_0(k,t) + z_1, k, t, 0) \tag{1.2}$$

прямые $z_1 = \psi_{1+k}(t) - \bar{u}_0(k,t)$ пересекают сепаратрисы, входящие в точку покоя $(z_1,z_2) = (0, 0)$ при $y \to \infty$ (здесь t – параметр, $k = 0$ или 1).

Условий 1–5 недостаточно, чтобы гарантировать существование решения задачи (0.1)–(0.3) для произвольной функции $F(u,x,t,\epsilon)$. Требуются дополнительные условия, заключающиеся в выборе определенного класса функций.

Условие 6. В угловых точках $(k,0)$, $k = 0, 1$, прямоугольника Ω функция $F(u,k,0,0)$ имеет вид

$$F(u,k,0,0) = u^3 - \bar{u}_0^3,$$

где числа $\bar{u}_0 = \bar{u}_0(k,0)$ отрицательны и меньше граничных значений:

$$\bar{u}_0(k,0) < \phi(k).$$

Решение задачи (0.1)–(0.3) строится согласно методу угловых пограничных функций (см. [2]) в виде суммы

$$u(x,t,\epsilon) = \bar{u} + (\Pi + Q + Q^*) + (P + P^*), \tag{1.3}$$

где $\bar{u}$ обозначает функцию, называемую регулярной частью асимптотики. Эта функция представляет решение задачи во внутренней части прямоугольника Ω без учета граничных условий. Пограничные функции Π, Q и Q^* осуществляют гладкий переход от регулярной части к граничным условиям на сторонах прямоугольника Ω: $t = 0$, $x = 0$ и $x = 1$ соответственно. Угловые пограничные функции P и P^* сглаживают невязки, вносимые пограничными функциями вблизи вершин прямоугольника Ω: (0, 0) и (1, 0) соответственно.

Пропустим формальную процедуру построения регулярной части асимптотики и погранслойных функций, которая приведена в [1]. Угловые пограничные функции ищутся в виде рядов

$$P(\xi,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k P_k(\xi,\tau), \quad P^*(\xi_*,\tau,\epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k P_k^*(\xi_*,\tau),$$

где растянутые переменные определяются следующими соотношениями:

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}, \quad \xi_* = \frac{1-x}{\epsilon}, \quad \tau = \frac{t}{\epsilon^2}.$$

Основные трудности доставляет задача для определения главного члена угловой части асимптотики решения, которая, также как и исходная, является нелинейной. Для угловой точки (0,0) задача для определения $P_0(\xi,\tau)$ ставится в первой четверти

$$\mathbb{R}_+^2 := \{(\xi,\tau) | \xi > 0,\ \tau > 0\}$$

плоскости растянутых переменных (ξ,τ) и имеет вид

$$a^2\frac{\partial^2 P_0}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_0}{\partial\tau}=F\left(\bar{u}_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0\right)-$$
$$-F\left(\bar{u}_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau),0,0,0\right)-F\left(\bar{u}_0(0,0)+Q_0(\xi,0),0,0,0\right),\quad \xi>0,\quad \tau>0, \tag{1.4}$$

$$P_0(0,\tau)=-\Pi_0(0,\tau),\quad P_0(\xi,0)=-Q_0(\xi,0),\quad P_0(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty, \tag{1.5}$$

где

$$\bar{u}_0(0,0)=-b<0. \tag{1.6}$$

Для функций $P_k(\xi,\tau)$, $k\ge 1$, в области $\mathbb{R}^2_+$ получаются линейные задачи

$$a^2\frac{\partial^2 P_k}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P_k}{\partial\tau}=F'_u\left(\bar{u}_0(0,0)+\Pi_0(0,\tau)+Q_0(\xi,0)+P_0(\xi,\tau),0,0,0\right)P_k+h_k, \tag{1.7}$$

$$P_k(0,\tau)=-\Pi_k(0,\tau),\quad P_k(\xi,0)=-Q_k(\xi,0),\quad P_k(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty, \tag{1.8}$$

где неоднородности h_k удовлетворяют экспоненциальным оценкам убывания вида

$$|h_k(\xi,\tau)|\le C\exp[-\kappa(\xi+\tau)],$$

если такого же вида оценкам удовлетворяют функции $P_0,\ldots,P_{k-1}$. Здесь C и κ – некоторые положительные числа.

2. ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНЕГО РЕШЕНИЯ

Для удобства определим оператор L:

$$L(P):=a^2\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2}-\frac{\partial P}{\partial\tau}-F(\bar{u}_0+\Pi_0+Q_0+P)+F(\bar{u}_0+\Pi_0)+F(\bar{u}_0+Q_0),$$

где

$$P=P(\xi,\tau),\quad F(u)=F(u,0,0,0),\quad \bar{u}_0=\bar{u}_0(0,0),\quad \Pi_0=\Pi_0(0,\tau),\quad Q_0=Q_0(\xi,0).$$

Задачу (1.4), (1.5) для главного члена угловой части асимптотики можно переписать в операторной форме

$$L(P_0)=0\quad \text{в области}\quad \mathbb{R}^2_+, \tag{2.1}$$

$$P_0(0,\tau)=-\Pi_0(0,\tau),\quad P_0(\xi,0)=-Q_0(\xi,0),\quad P_0(\xi,\tau)\to 0\quad \text{при}\quad \xi+\tau\to\infty. \tag{2.2}$$

Нужно доказать, что данная задача имеет решение, удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида

$$|P_0(\xi,\tau)|\le C\exp[-\kappa(\xi+\tau)], \tag{2.3}$$

где C и κ – некоторые положительные числа. Для этого воспользуемся методом верхних и нижних решений (см. [3]–[5]), который заключается в том, что задача

$$L(Z)=0\quad \text{в области}\quad \mathbb{R}^2_+,$$
$$Z=h\quad \text{на границе области},$$

имеет решение Z в промежутке между барьерными функциями $Z_-\le Z\le Z_+$, если в области $\mathbb{R}^2_+$ выполняются неравенства

$$L(Z_+)\le 0,\quad L(Z_-)\ge 0,\quad Z_-\le Z_+,$$

а на ее границе

$$Z_-\le h\le Z_+.$$

В [1] доказано, что на роль верхнего решения задачи независимо от величины граничного значения подходит функция $Z_+(\xi,\tau)=0$. Естественно и в рассматриваемом случае на роль верхнего решения попробовать эту функцию. Заметим, что по условию 6 граничное значение ϕ в точке (0, 0) лежит правее корня вырожденного уравнения $\bar{u}_0$. Поэтому значения Π_0 и Q_0 принадлежат промежутку $(0, \phi - \bar{u}_0]$, где $\phi - \bar{u}_0 > 0$, и на границе области $\mathbb{R}^2_+$ выполняются необходимые для верхнего решения неравенства:

$$Z_+(0,\tau) = 0 \geq -\Pi_0, \quad Z_+(\xi, 0) = 0 \geq -Q_0.$$

Внутри области $\mathbb{R}^2_+$ нужно доказать неравенство

$$L(Z_+) = -F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) \leq 0.$$

Для краткости обозначим

$$\bar{u}_0(0,0) = -b, \quad \Pi_0 = y, \quad Q_0 = z, \quad L(Z_+) = L(y,z). \tag{2.4}$$

Тогда неравенство примет вид

$$L = -F(-b + y + z) + F(-b + y) + F(-b + z) \leq 0, \quad y, z \in (0, \phi + b], \tag{2.5}$$

где число $b > 0$.

Внутри области $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$, как показано в [1], необходимые условия экстремума функции $L = L(y,z)$ имеют вид

$$F'(-b + y + z) = F'(-b + y) = F'(-b + z).$$

При условии $\phi > -\frac{b}{3}$ внутри области имеется точка экстремума $\left(\frac{2b}{3}, \frac{2b}{3}\right)$, в которой величина

$$L\left(\frac{2b}{3}, \frac{2b}{3}\right) = \frac{8b^3}{9} > 0,$$

так что неравенство (2.5) не выполняется.

Если же $-b < \phi \leq -\frac{b}{3}$, то внутри области точек экстремума нет. Однако в граничной точке $(\phi + b, \phi + b)$ величина

$$L(\phi + b, \phi + b) = -6\phi(\phi + b)^2 > 0.$$

Таким образом, функция $Z_+(\xi, \tau) = 0$ не подходит на роль верхнего решения ни при каком выборе граничного значения $\phi > -b$.

В качестве возможного верхнего решения задачи будем пробовать функцию

$$Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0,\tau) Q_0(\xi, 0)}{\phi - \bar{u}_0}.$$

Требуется доказать неравенство

$$\begin{gathered} L(Z_+) = -a^2 \frac{\Pi_0}{\phi - \bar{u}_0} \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} + \frac{Q_0}{\phi - \bar{u}_0} \frac{d\Pi_0}{d\tau} - \\ - F(\bar{u}_0 + \Pi_0 + Q_0 + Z_+) + F(\bar{u}_0 + \Pi_0) + F(\bar{u}_0 + Q_0) \leq 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь

$$a^2 \frac{d^2 Q_0}{d\xi^2} = F(\bar{u}_0 + Q_0), \quad -\frac{d\Pi_0}{d\tau} = F(\bar{u}_0 + \Pi_0),$$

и с учетом замены (2.4)

$$L(Z_+) = \left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right) F(-b + z) + \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right) F(-b + y) - F\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right).$$

На диагонали $z = y$ прямоугольника $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$ выражение $L(Z_+)$ представляет собой функцию $g(y)$ одной переменной y:

$$g(y) = 2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)F(-b + y) - F\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right), \quad y \in (0, \phi + b].$$

Производные этой функции имеют вид

$$g'(y) = -\frac{2}{\phi + b}F(-b + y) - 2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)\left[F'\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right) - F'(-b + y)\right],$$

$$g''(y) = \frac{2}{\phi + b}\left[F'\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right) - 2F'(-b + y)\right] -$$
$$- 2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)\left[2\left(1 - \frac{y}{\phi + b}\right)F''\left(-b + 2y - \frac{y^2}{\phi + b}\right) - F''(-b + y)\right].$$

Значение

$$g''(0) = k\left(2 - \frac{b}{\phi + b}\right).$$

Если $g''(0) > 0$, то производная $g'(y)$ возрастает на некотором промежутке $(0, y_0]$ и ее значения на этом промежутке $g'(y) > g'(0) = 0$. Отсюда заключаем, что функция $g(y)$ возрастает на промежутке $(0, y_0]$ и ее значения на этом промежутке $g(y) > g(0) = 0$. Условие $g''(0) > 0$ эквивалентно соотношению $\phi > -\frac{b}{2}$. Поэтому если $\phi > -\frac{b}{2}$, то неравенство (2.6) не выполняется.

Теперь рассмотрим возможность выполнения неравенства (2.6) при условии выбора ϕ из промежутка

$$-b < \phi \le -\frac{b}{2} < 0. \tag{2.7}$$

Для этого исследуем функцию $L(y, z) = L(Z_+)$ на наличие точек экстремума в области $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$ при условии (2.7). Производная

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right)\left[F'(-b + y) - F'\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right)\right] - \frac{1}{\phi + b}F'(-b + z).$$

Будем рассматривать выражение в квадратных скобках как функцию $h(y)$ одной переменной y, считая z параметром:

$$h(y) := F'(-b + y) - F'\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right), \quad y \in (0, \phi + b].$$

Производная этой функции с учетом вида функции $F(u)$ имеет вид

$$h'(y) = F''(-b + y) - \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right)F''\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right) =$$
$$= -6z\left[-1 + \frac{y}{\phi + b} + \frac{1}{\phi + b}\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right)\right].$$

Для функции

$$g(y) = -1 + \frac{y}{\phi + b} + \frac{1}{\phi + b}\left(-b + y + z - \frac{yz}{\phi + b}\right), \quad y \in (0, \phi + b],$$

стоящей в квадратных скобках, производная

$$g'(y) = \frac{1}{\phi + b}\left(2 - \frac{z}{\phi + b}\right) > 0.$$

Поэтому функция $g(y)$ возрастает на промежутке $(0, \phi + b]$ и ее значения на этом промежутке

$$g(y) > g(0) = \frac{1}{\phi + b}(z - \phi) > 0,$$

так как $\phi < 0$. Отсюда следует, что значения производной $h'(y) < 0$ на промежутке $(0, \phi + b]$. В связи с этим функция $h(y)$ убывает на промежутке $(0, \phi + b]$ и ее значения на этом промежутке $h(y) < h(0) = 0$. Возвращаясь к функции $L(y, z)$, заключаем, что производная

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \left(1 - \frac{z}{\phi + b}\right) h(y) - \frac{1}{\phi + b} F'(-b + z) < 0,$$

и, значит, при условии (2.7) функция $L(y, z)$ в области $(0, \phi + b] \times (0, \phi + b]$ не имеет точек экстремума. Кроме этого, при любом значении $z \in (0, \phi + b]$ функция $L(y, z)$ убывает по переменной y и выполняется неравенство

$$L(y, z) < L(0, z) = 0.$$

Это завершает доказательство неравенства (2.6) при условии (2.7) и можно сформулировать полученный результат.

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (2.7), *то функция*

$$Z_+(\xi, \tau) = -\frac{\Pi_0(0, \tau) Q_0(\xi, 0)}{\phi - \bar{u}_0}$$

является верхним решением задачи (2.1), (2.2).

3. ПОСТРОЕНИЕ НИЖНЕГО РЕШЕНИЯ

В качестве возможного нижнего решения задачи (2.1), (2.2) будем пробовать функцию

$$Z_-(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau) Q_0(\xi, 0)}.$$

Имеем

$$L(Z_-) = \sqrt{\Pi_0 Q_0}\left[\frac{1}{Q_0^2}\int_0^{Q_0} F(-b + u)du - \frac{1}{Q_0} F(-b + Q_0) - \frac{1}{\Pi_0} F(-b + \Pi_0)\right] -$$
$$- F\left(-b + \Pi_0 + Q_0 - 2\sqrt{\Pi_0 Q_0}\right) + F(-b + \Pi_0) + F(-b + Q_0).$$

С учетом вида функции $F(u)$ имеем

$$\frac{1}{Q_0^2}\int_0^{Q_0} F(-b + u)du = \frac{1}{4} Q_0^2 - bQ_0 + \frac{3}{2} b^2,$$

$$\frac{1}{Q_0} F(-b + Q_0) = Q_0^2 - 3bQ_0 + 3b^2,$$

$$\frac{1}{\Pi_0} F(-b + \Pi_0) = \Pi_0^2 - 3b\Pi_0 + 3b^2.$$

С учетом замены

$$y = \sqrt{\Pi_0} \in \left(0, \sqrt{\phi + b}\right], \quad z = \sqrt{Q_0} \in \left(0, \sqrt{\phi + b}\right],$$

и вида функции $F(u)$ нужно доказать неравенство

$$L(y, z) = yz\left(h(z) - g(z) - g(y)\right) - \left[-b + (y - z)^2\right)^3 + \left(-b + y^2\right]^3 + \left(-b + z^2\right)^3 + b^3 \geq 0, \quad (3.1)$$

где обозначено

$$L(y, z) = L(Z_-), \quad h(z) = \frac{1}{4} z^4 - bz^2 + \frac{3}{2} b^2, \quad g(z) = z^4 - 3bz^2 + 3b^2, \quad g(y) = y^4 - 3by^2 + 3b^2.$$

Замечание 1. В отличие от [1] неравенство (3.1) не выполняется, если отбросить $h(z)$, чтобы перейти к выражению, симметричному по y, z. Тем не менее симметрию можно использовать. Если в (3.1) отбросить положительное слагаемое $h(z)$, то в левой части останется выражение $L_1(y,z)$, симметричное по y, z:

$$L_1(y,z) = L_1(z,y).$$

Так как функция $h(z)$ убывает на промежутке $\left(0, \sqrt{\phi + b}\right]$, то условие $z_1 < z_2$ влечет $h(z_1) > h(z_2)$. Соответственно,

$$L(y,z) = yzh(z) + L_1(y,z) = yzh(z) + L_1(z,y),$$

и для $y < z$ выполняется неравенство

$$L(y,z) > yzh(y) + L_1(z,y) = L(z,y).$$

В связи с этим неравенство (3.1) будем доказывать на траекториях $z = \mathrm{const} \in \left(0, \sqrt{\phi + b}\right]$, т.е. будем считать левую часть (3.1) функцией одной переменной y: $L(Z_-) = L(y)$, где $y \in \left(0, \sqrt{\phi + b}\right]$, а z – параметр.

Так как $L(0) = 0$, то для выполнения (3.1) необходимо условие $L'(0) \geq 0$. Производная

$$L'(y) = z\left(h(z) - g(z)\right) - zg(z) - yzg'(y) - 6(y - z)[-b + (y - z)^2]^2 + 6y(-b + y^2)^2,$$

где $g'(y) = 4y^3 - 6by$. Таким образом,

$$L'(0) = z\left[-\frac{3}{4}z^4 + 2bz^2 - \frac{9}{2}b^2 + 6(-b + z^2)^2\right].$$

При достаточно малых значениях z знак $L'(0)$ совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратных скобках при $z = 0$. Это выражение

$$-\frac{9}{2}b^2 + 6(-b)^2 > 0.$$

При $z = \sqrt{\phi + b}$ производная

$$L'(0) = \frac{1}{4}\sqrt{\phi + b}(21\phi^2 + 2b\phi - 13b^2) \geq 0,$$

если

$$\phi \leq -\frac{\sqrt{274} + 1}{21}b = -0.83\ldots b, \quad \text{или} \quad \phi \geq \frac{\sqrt{274} - 1}{21}b = 0.74\ldots b.$$

С учетом условия (2.7) получаем ограничение на выбор граничного значения ϕ:

$$-b < \phi \leq -\frac{\sqrt{274} + 1}{21}b = -0.83\ldots b < 0. \tag{3.2}$$

Продолжим исследование функции $L(y)$, вычислим ее производные:

$$L''(y) = -2zg'(z) - yzg''(y) - 6[-b + (y - z)^2]^2 - 24(y - z)^2[-b + (y - z)^2] + \\ + 6(-b + y^2)^2 + 24y^2(-b + y^2),$$

$$L'''(y) = -3zg''(y) - yzg'''(y) + 72b(y - z) - 120(y - z)^3 - 72by + 120y^3,$$

$$L^{IV}(y) = 120z(5y - 3z),$$

$$L^{V}(y) = 600z,$$

где $g'(y) = 4y^3 - 6by$, $g''(y) = 12y^2 - 6b$, $g''' = 24y$.

На промежутке $y \in \left(0, \sqrt{\phi + b}\right]$ производная $L^V(y) > 0$, поэтому функция $L'''(y)$ выпукла вниз на этом промежутке. Величина

$$L'''(0) = 6z(20z^2 - 9b) \leq 6z(20(\phi + b) - 9b) < 0,$$

а знак

$$L'''\left(\sqrt{\phi+b}\right) = 6\left[20\left(z-\sqrt{\phi+b}\right)^3 - 10\phi z - 19b\phi\right]$$

совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратных скобках

$$f(z) = 20\left(z-\sqrt{\phi+b}\right)^3 - 10\phi z - 19bz, \quad z \in \left(0, \sqrt{\phi+b}\right].$$

Производная

$$f'(z) = 60\left(z-\sqrt{\phi+b}\right)^2 - 10\phi - 19b < 0$$

при

$$\sqrt{\phi+b} - \sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}} < z < \sqrt{\phi+b} + \sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}}.$$

Величина

$$\sqrt{\phi+b} - \sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}} < 0,$$

а

$$\sqrt{\phi+b} + \sqrt{\frac{10\phi+19b}{60}} > \sqrt{\phi+b}.$$

Поэтому на промежутке $z \in \left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$ производная $f'(z) < 0$, функция $f(z)$ убывает и ее значения

$$f(z) < f(0) = -20(\phi+b)\sqrt{\phi+b} < 0.$$

Итак, на промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$ функция $L'''(y)$ выпукла вниз и ее значения $L'''(0) < 0$, $L'''\left(\sqrt{\phi+b}\right) < 0$. Отсюда следует, что $L'''(y) < 0$ при любом $y \in \left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$.

Для функции $L''(y)$ заключаем, что она убывает на промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$. Величина

$$L''(0) = 2z^2(24b - 19z^2) > 0.$$

Для $L''\left(\sqrt{\phi+b}\right)$ возможны два варианта. Первый – когда $L''\left(\sqrt{\phi+b}\right) \geq 0$. В этом случае $L''(y) \geq 0$ на всем промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$. Соответственно, функция $L'(y)$ возрастает на промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$ и ее значения

$$L'(y) > L'(0) \geq 0.$$

Соответственно, функция $L(y)$ возрастает на промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$ и ее значения

$$L(y) > L(0) = 0,$$

так что неравенство (3.1) выполняется.

Второй вариант – когда $L''\left(\sqrt{\phi+b}\right) < 0$. В этом случае на промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$ существует единственная точка y_0, в которой $L''(y)$ меняет знак с положительного при $y \in (0, y_0)$ на отрицательный при $y \in \left(y_0, \sqrt{\phi+b}\right]$. Функция $L'(y)$ будет иметь максимум в точке y_0, возрастать на промежутке $(0, y_0)$ и убывать на промежутке $\left(y_0, \sqrt{\phi+b}\right]$. Кроме того, $L'(y)$ выпукла вверх на всем промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$ и $L'(0) \geq 0$ по условию (3.2).

На промежутке $\left(0, \sqrt{\phi+b}\right]$ может существовать лишь одна точка y_1, в которой $L'(y)$ поменяет свой знак с положительного при $y \in (0, y_1)$ на отрицательный при $y \in \left(y_1, \sqrt{\phi+b}\right]$. Если

$y_1 \ge \sqrt{\phi + b}$, то $L'(y) \ge 0$ на всем промежутке $\left(0, \sqrt{\phi + b}\right]$, функция $L(y)$ возрастает на этом промежутке и ее значения

$$L(y) > L(0) = 0,$$

так что неравенство (3.1) выполняется.

Если $y_1 < \sqrt{\phi + b}$, то функция $L(y)$ возрастает при $y \in (0, y_1)$ от значения $L(0) = 0$ и убывает при $y \in \left(y_1, \sqrt{\phi + b}\right]$ до значения $L\left(\sqrt{\phi + b}\right)$. Выполнение неравенства (3.1) зависит от знака $L\left(\sqrt{\phi + b}\right)$. В силу замечания 1, сделанного ранее,

$$L\left(\sqrt{\phi + b}, z\right) \ge L\left(z, \sqrt{\phi + b}\right),$$

а доказательство неравенства $L\left(z, \sqrt{\phi + b}\right) \ge 0$ по первой переменной уже проведено и приводит к проверке условия $L\left(\sqrt{\phi + b}, \sqrt{\phi + b}\right) \ge 0$. Значение

$$L\left(\sqrt{\phi + b}, \sqrt{\phi + b}\right) = \frac{1}{4}(\phi + b)\left[(\phi + b)^2 - 4b(\phi + b) + 6b^2\right] > 0,$$

что завершает доказательство неравенства (3.1), и можно сформулировать результат.

Теорема 2. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то функция*

$$Z_{-}(\xi, \tau) = -2\sqrt{\Pi_0(0, \tau) Q_0(\xi, 0)}$$

является нижним решением задачи (2.1), (2.2).

4. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ

Оба построенных барьера удовлетворяют экспоненциальной оценке убывания вида (2.3), поэтому на основании метода верхних и нижних решений заключаем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то задача* (1.4), (1.5) *имеет решение* $P_0(\xi, \tau)$, *удовлетворяющее экспоненциальной оценке убывания вида* (2.3).

Барьерные функции для задачи (1.4), (1.5) строились с расчетом, чтобы коэффициент F_u' в задачах (1.7), (1.8) оставался положительным, что обеспечивает существование решений $P_k(\xi, \tau)$ с оценками вида (2.3), т.е. справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то задачи* (1.7), (1.8) *имеют решения* $P_k(\xi, \tau)$, *удовлетворяющие экспоненциальным оценкам убывания вида* (2.3).

Отметим, что функции $P_k^*(\xi_*, \tau)$, $k \ge 0$, определяются аналогично.

Формальный ряд (1.3) оказывается полностью построенным. Обоснование асимптотики решения завершает следующая теорема.

Теорема 5. *Если выполнены условия* 1–6 *и* (3.2), *то для достаточно малых* ε *задача* (0.1)–(0.3) *имеет решение* $u(x, t, \varepsilon)$, *для которого ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(\bar{u}_k(x, t) + \Pi_k(x, \tau) + Q_k(\xi, t) + Q_k^*(\xi_*, t) + P_k(\xi, \tau) + P_k^*(\xi_*, \tau)\right)$$

является асимптотическим представлением при $\varepsilon \to 0$ *в замкнутом прямоугольнике* $\bar{\Omega}$.

Доказательство теоремы, как и в [1], основано на разрешимости задач для пограничных функций Π_k, Q_k, Q_k^*, P_k и P_k^* при $k \ge 1$ и повторяет доказательство соответствующей теоремы из [6].

Автор выражает искреннюю благодарность профессору В.Ф. Бутузову за внимание к данной проблематике и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с кубическими нелинейностями // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 2. С. 256–267.
2. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
3. *Amann H.* On the Existence of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1971. V. 21. № 2. P. 125–146.
4. *Sattinger D.H.* Monotone Methods in Nonlinear Elliptic and Parabolic Boundary Value Problems // Indiana Univ. Math. J. 1972. V. 21. № 11. P. 979–1000.
5. *Amann H.* Nonlinear Analysis: coll. of papers in honor of E.H. Rothe / Ed. by L. Cesari et al. New York etc: Acad press, cop. 1978. XIII. P. 1–29.
6. *Денисов И.В.* Угловой пограничный слой в краевых задачах для сингулярно возмущенных параболических уравнений с квадратичной нелинейностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 2. С. 255–274.