ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1839–1849

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

# НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНОЙ НА СТЫКЕ ДВУХ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ



**А. В. Глушко[1,*], Е. А. Логинова[1,**]**

[1] *394018 Воронеж, Университетская пл., 1, ФГБОУ ВО Воронежский государственный университет, Россия*

**e-mail: kuchp2@math.vsu.ru*

***e-mail: loginova@vsu.ru*

Поступила в редакцию 02.11.2020 г.
Переработанный вариант 02.11.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Статья посвящена изучению нестационарной задачи теплопроводности в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, имеющими экспоненциальный вид. На стыке полуплоскостей предполагается наличие трещины, т.е. неоднородных условий сопряжения. В верхней и нижней полуплоскостях задаются уравнения распространения тепла, которые дополняются условиями на разность температур и тепловых потоков между верхним и нижним берегами трещины. Также заданы однородные начальные условия. В работе приводятся интегральные представления компонент решения задачи, доказывается выполнение граничных и начальных условий. Для решения поставленной задачи после проведения замены переменных строятся четные продолжения изучаемых функций на верхнюю полуплоскость. Осуществляется переход к обобщенной задаче. Затем к ней применяются преобразование Фурье по пространственным переменным и преобразование Лапласа по времени, что позволяет использовать свойства указанных преобразований для получения решения. Применение обратных преобразований способствует получению интегральных представлений решения исходной задачи. Статья является первой из двух работ. Во второй работе будут выделены сингулярные компоненты асимптотических разложений решения по расстоянию до линии сопряжения. Библ. 7.

**Ключевые слова:** нестационарная задача теплопроводности, условия типа трансмиссии, разрез-трещина, задача теплопроводности, неоднородный коэффициент теплопроводности, влияние времени, различные уравнения в верхней и нижней полуплоскостях.

**DOI:** 10.31857/S0044466921110077

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Уже на протяжении десятилетий многие ученые – математики и физики – сосредоточены на построении и изучении свойств математических моделей, описывающих характеристики материалов с трещинами (см. [1]–[3]). Композитные материалы все чаще используются в различных технических системах, и возникновение трещин в подобных материалах, безусловно, меняет их свойства и поведение системы в целом, что обеспечивает актуальность и необходимость изучения подобных задач не только в настоящее время, но и в обозримом будущем. Одними из перспективных являются задачи теплопроводности, упругости, теплоупругости в материалах с трещинами. Было построено большое количество таких моделей (см. [4]–[6]), различающихся, в том числе, областями пространства, моделирующими материал, количеством, расположением, конфигурацией трещин и т.д.

Настоящая работа отличается от изученных ранее задач тем, что в ней рассматривается случай нестационарного распределения тепла в плоскости, составленной из двух полуплоскостей, состоящих из неоднородных материалов с различными коэффициентами внутренней теплопроводности, имеющими экспоненциальный вид. На стыке полуплоскостей предполагается наличие конечной трещины.

Введем обозначения. Пусть

$$\mathbb{R}^2_+ = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}, \quad \mathbb{R}^2_- = \{x = (x_1, x_2) \,|\, x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 < 0\}.$$

Предполагается, что коэффициенты внутренней теплопроводности заданы равенствами $k_1(x) = c_1 \exp(k_1 x)$ при $x \in \mathbb{R}^2_+$; $k_2(x) = c_2 \exp(k_2 x)$ при $x \in \mathbb{R}^2_-$, где $c_1$, $c_2$ — произвольные, отличные от нуля константы, $k_1$, $k_2$ — произвольные положительные константы.

Тогда нестационарные уравнения теплопроводности в нижней и верхней полуплоскостях имеют вид

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} - a^2 \left( \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x_2^2} + k_n \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x_2} \right) = 0, \tag{1}$$

$n = 1, 2$; при $n = 1$ $x \in \mathbb{R}^2_+$, $t \in (0; +\infty)$; при $n = 2$ $x \in \mathbb{R}^2_-$, $t \in (0; +\infty)$.

Уравнения (1) дополняются граничными условиями сопряжения

$$u_1(x_1, +0, t) - u_2(x_1, -0, t) = q_0(x_1, t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_1(x_1, +0, t)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2(x_1, -0, t)}{\partial x_2} + \frac{k_1}{2} u_1(x_1, +0, t) - \frac{k_2}{2} u_2(x_1, -0, t) = q_1(x_1, t), \tag{3}$$

где $x_1 \in \mathbb{R}$, $t > 0$.

Здесь $q_0(x_1, t)$ и $q_1(x_1, t)$ — некоторые известные функции. Условие (2) описывает разность между температурами верхнего и нижнего берега трещины, а условие (3) — разность между тепловыми потоками через эти берега.

Также заданы начальные условия

$$u_n(x_1, x_2, +0) = 0, \tag{4}$$

где $n = 1, 2$, при $n = 1$ $x \in \mathbb{R}^2_+$, при $n = 2$ $x \in \mathbb{R}^2_-$.

Предполагаются выполненными условия согласования $q_0(x_1, 0) = q_1(x_1, 0) = 0$.

Введем обозначение $R_n = ((s_1^2 + 0.25k_n^2) + a^{-2}p)^{0.5}$, $n = 1, 2$.

Основной результат работы сформулируем в теореме 1.

**Теорема 1.** *Пусть функции* $q_0(x_1, t)$ *и* $q_1(x_1, t)$ *равны нулю при* $x_1 \notin [-1, 1]$ *и* $t \notin [0, T]$, $T > 0$, *существуют ограниченные по* $x_1 \in [-1, 1]$, $t \geq 0$ *производные* $\frac{\partial q}{\partial x_1}, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t}, \frac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2}$, *выполнены условия согласования* $q_0(x_1, 0) = q_1(x_1, 0) = 0$.

Тогда решение задачи (1)–(4) задается формулами

$$\begin{gathered} u_n(x_1, x_2, t) = 0.25\pi^{-2} i \exp(-0.5 k_n x_2) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \left( \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} q_1(x_1, t) e^{-pt} e^{i x_1 s_1} dx_1 dt - \right. \\ \left. - R_{3-n} \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-1}^{1} q_0(x_1, t) e^{-pt} e^{i x_1 s_1} dx_1 dt \right) (R_1 + R_2)^{-1} \left( \exp[-|x_2| R_n] \right) e^{-i x_1 s_1 - i x_2 s_2 + pt} dp ds_1; \end{gathered} \tag{5}$$

где $n = 1, 2$, $\sigma > -a^2 \left( |s_1|^2 + 0.5k^2 \right)$, $k = \min(k_1, k_2)$.

Выполняется граничное условие (2), граничное условие (3) выполнено в смысле главного значения. Также выполнены начальные условия (4).

Для доказательства теоремы 1 были сформулированы и доказаны вспомогательные утверждения.

## 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(4), СВЕДЕНИЕ К ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ, ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Используя замены переменных $u_p(x) = \exp(-0.5k_px_2)v_p(x),\ p = 1, 2,\ v_2(x_1, x_2, t) = z(x_1, -x_2, t)$, перепишем задачу (1)–(4) в виде

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_1^2 v_1\right) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_1^2 z\right) = 0, \tag{7}$$

$$v_1(x_1, +0, t) - z(x_1, +0, t) = q_0(x_1, t), \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_1(x_1, +0, t)}{\partial x_2} + \frac{\partial z(x_1, +0, t)}{\partial x_2} = q_1(x_1, t), \tag{9}$$

$$v_1(x_1, x_2, +0) = 0, \tag{10}$$

$$z(x_1, x_2, +0) = 0. \tag{11}$$

Обозначим через $\hat{V}_1(x, t)$ и $\hat{V}_2(x, t)$ четное продолжение функций $v_1(x, t)$ и $z(x, t)$ на нижнюю полуплоскость, т.е.

$$\hat{V}_1(x, t) = \begin{cases} v_1(x, t), & x_2 > 0, \\ v_1(x_1, -x_2, t), & x_2 < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \hat{V}_2(x, t) = \begin{cases} z(x, t), & x_2 > 0, \\ z(x_1, -x_2, t), & x_2 < 0. \end{cases}$$

Пусть вне трещины $l = [-1; 1] \times \{0\}$ на границе полуплоскостей $\mathbb{R}_+^2$ и $\mathbb{R}_-^2$ – прямой $\Gamma = \mathbb{R} \times \{0\}$ температурные поля и тепловые потоки совпадают.

Тогда

$$\frac{\partial \hat{V}_1(x, t)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x, t)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial v_1(x_1, -x_2, t)}{\partial x_2}, & x_2 < 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \hat{V}_2(x, t)}{\partial x_2} = \begin{cases} \dfrac{\partial z(x, t)}{\partial x_2}, & x_2 > 0, \\ -\dfrac{\partial z(x_1, -x_2, t)}{\partial x_2}, & x_2 < 0. \end{cases}$$

Пусть также функции $\hat{V}_1(x, t), \hat{V}_2(x, t)$ равны нулю при $t < 0$.

Тогда, вычислив обобщенные производные, в $S'(\mathbb{R}^3)$ перейдем к обобщенной задаче

$$\frac{\partial \hat{V}_n}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_n^2 \hat{V}_1\right) = -a^2\left[\frac{\partial \hat{V}_n}{\partial x_2}\right]_{x_2=0} \delta(x_2) - a^2[\hat{V}_n]_{x_2=0}\delta'(x_2), \tag{12}$$

где $n = 1, 2$, $\delta(x_2)$ – дельта-функция Дирака.

Здесь $[f]_{x_2=0} = \lim\limits_{\varepsilon \to +0}(f(x_1, \varepsilon, t) - f(x_1, -\varepsilon, t))$.

Используя свойства четности функций $\hat{V}_1(x, t)$ и $\hat{V}_2(x, t)$, перепишем задачу (12) в виде

$$\frac{\partial \hat{V}_n}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \hat{V}_n}{\partial x_2^2} - \frac{1}{4}k_n^2 \hat{V}_n\right) = -2a^2\frac{\partial \hat{V}_n(x_1, +0, t)}{\partial x_2}\delta(x_2), \quad n = 1, 2. \tag{13}$$

Применяя к равенствам (13) преобразование Лапласа по переменной $t$ и преобразование Фурье по переменным $x_1$, $x_2$ и, используя свойства указанных преобразований, перейдем к задаче

$$\tilde{\hat{V}}_n(s, p)(p + a^2(|s|^2 + 0.25k_n^2)) = -2a^2 w_n^1(s_1, p), \tag{14}$$

где $n = 1, 2$, $L_{t \to p}F_{x \to s}\hat{V}_n = \tilde{\hat{V}}_n(s, p)$, $L_{t \to p}F_{x_1 \to s_1}\left[\dfrac{\partial \hat{V}_n(x_1, +0, t)}{\partial x_2}\right] = w_n^1(s_1, p)$.

**Утверждение 1.** *Справедливы соотношения*

$$w_n^1(s_1, p) = -R_1 w_n^0(s_1, p), \tag{15}$$

*где* $n = 1, 2$, $L_{t \to p}F_{x_1 \to s_1}[\hat{V}_n(x_1, +0, t)] = w_n^0(s_1, p)$.

**Доказательство.** Отметим, что

$$L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[\hat{V}_n] = L_{t\to p}F^{-1}_{s_2\to x_2}[F_{x\to s}\hat{V}_n] = 0.5\pi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_2s_2}L_{t\to p}[F_{x\to s}[\hat{V}_n]]ds_2, \tag{16}$$

откуда следует равенство

$$L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[\hat{V}_n(x_1,+0,t)] = 0.5\pi^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{t\to p}[F_{x\to s}[\hat{V}_n]]ds_2. \tag{17}$$

Выражая из соотношений (14) $\tilde{\hat{V}}_n(s,p)$ и подставляя в (17) с использованием введенных выше обозначений, получаем

$$\tilde{\hat{V}}_n(s,p) = -2a^2w_n^1(s,p)\left(p + a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right)\right). \tag{18}$$

Таким образом,

$$L_{t\to p}F_{x\to s}\hat{V}_n(x_1,x_2,t) = -2a^2L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial\hat{V}_n(x_1,+0,t)}{\partial x_2}\right]\left(p + a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right)\right). \tag{19}$$

Проинтегрировав левую и правую части (19) по переменной $s_2$ в интервале $(-\infty;\infty)$, придем к соотношениям

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} L_{t\to p}F_{x\to s}\left[\frac{\partial\hat{V}_n(x_1,+0,t)}{\partial x_2}\right]ds_2 = -2a^2L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds_2}{p + a^2(s_1^2 + s_2^2 + 0.25k_n^2)} =$$
$$= -2\pi R_n^{-1}L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}\left[\frac{\partial\hat{V}_n(x_1+0,t)}{\partial x_2}\right],\quad n = 1, 2.$$

Из последних равенств и равенств (16) вытекают представления (15).

**Утверждение 2.** *Решения уравнений* (14) *можно записать в виде*

$$\tilde{\hat{V}}_n(s,p) = \frac{-2R_n}{a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right) + p}\left(\frac{p_1(s_1,p) - R_{3-n}p_0(s_1,p)}{R_1 + R_2}\right), \tag{20}$$

*где* $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[q_0(x,t)] = p_0(s_1,p)$, $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}[q_1(x,t)] = p_1(s_1,p)$.

**Доказательство.** Применим к равенствам (8), (9) преобразование Лапласа по переменной $t$ и преобразование Фурье по переменным $x_1$, $x_2$, получим соотношения

$$w_1^0(s_1,p) - w_2^0(s_1,p) = p_0(s_1,p), \tag{21}$$

$$w_1^1(s_1,p) + w_2^1(s_1,p) = p_1(s_1,p). \tag{22}$$

Выражая из равенств (15), (21), (22) функции $w_1^0(s_1,p)$, $w_2^0(s_1,p)$, $w_1^1(s_1,p)$, $w_2^1(s_1,p)$ через $p_0(s_1,p)$ и $p_1(s_1,p)$ и подставляя в (14), приходим к выражениям (20).

Отметим, что функции $\hat{V}_1 = L^{-1}_{p\to t}F^{-1}_{s\to x}\tilde{\hat{V}}_1$, $\hat{V}_2 = L^{-1}_{p\to t}F^{-1}_{s\to x}\tilde{\hat{V}}_2$. Используя представления (20), перейдем к равенствам

$$\hat{V}_n = 0.25\pi^{-3}i\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} R_n\left(a^2\left(|s|^2 + 0.25k_n^2\right) + p\right)(R_1 + R_2)^{-1}\times$$
$$\times\left(\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-1}^{1} q_1(x_1,t)e^{-pt}e^{ix_1s_1}dx_1dt - R_{3-n}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-1}^{1} q_0(x_1,t)e^{-pt}e^{ix_1s_1}dx_1dt\right)e^{-ix_1s_1-ix_2s_2+pt}dpds_2ds_1, \tag{23}$$

из которых, вычислив интеграл по переменной $s_2$ и проведя обратную замену, получим выражения (5).

## 3. ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВЫПОЛНЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ И НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ

**Лемма 1.** *Пусть функция* $q(x_1,t)$ *равна нулю при* $x_1 \notin [-1,1]$ *и финитна по* $t$: $\operatorname{supp} q(x_1,t) \subseteq [0,T]$. *Пусть также существуют ограниченные по* $x_1 \in [-1,1]$, $t \ge 0$ *производные* $\dfrac{\partial q}{\partial x_1}, \dfrac{\partial q}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t}, \dfrac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2}$ *и выполнено условие согласования* $q(x_1,0) = 0$.

Тогда функция $L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}q(x_1,t)$ является аналитической по $p$ в полуплоскости $\operatorname{Re} p \ge -\varepsilon_0$ и при $\operatorname{Re} p = -0.5\varepsilon_0$ справедлива оценка

$$\begin{gathered}\left|L_{t\to p}F_{x_1\to s_1}q(x_1,t)\right| \le c\left((1+|s_1|)((0.25k^2+s_1^2)^2+\operatorname{Im}^2 p)\right)^{-1}\times \\ \times\left(\|\!|q(x_1,0)|\!\| + \left\|\!\left|\frac{\partial q(x_1,0)}{\partial t}\right|\!\right\| + \left\|\!\left|\frac{\partial q}{\partial t}\right|\!\right\| + \left\|\!\left|\frac{\partial^2 q}{\partial x_1\partial t}\right|\!\right\| + \left\|\!\left|\frac{\partial^3 q}{\partial x_1\partial t^2}\right|\!\right\|\right),\end{gathered} \tag{24}$$

где $c$, $\varepsilon_0$ – положительные константы,

$$\|\!|f(x_1,t)|\!\| = \max_{x_1\in[-1,1]}\int_0^\infty |f(x_1,t)|dt, \quad \|g(x_1)\| = \max_{x_1\in[-1,1]}|g(x_1)|, \quad k = \min\{k_1,k_2\}.$$

**Доказательство.** Сначала докажем выполнение неравенства

$$|\hat{q}(s_1,p)| \le \frac{c}{1+|s_1|}\left(\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)| + \max_{x_1\in[-1,1]}\left|\frac{\partial r(x_1,p)}{\partial x_1}\right|\right), \tag{25}$$

где

$$\hat{q}(s_1,p) = F_{x_1\to s_1}L_{t\to p}q(x_1,t), \quad r(x_1,p) = L_{t\to p}q(x_1,t).$$

В силу представления

$$\hat{q}(s_1,p) = \int_{-1}^{1} e^{ix_1s_1}r(x_1,p)dx_1,$$

получаем:

1) при $|s_1| < 1$ оценку

$$|\hat{q}(s_1,p)| \le 2\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)| \le 4\left(1+|s_1|\right)^{-1}\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)|, \tag{26}$$

2) при $|s_1| \ge 1$ оценку

$$\begin{gathered}|\hat{q}(s_1,p)| \le \frac{1}{|s_1|}\left|e^{ix_1}r(1,p) + e^{-ix_1}r(-1,p) - \int_{-1}^{1}\frac{\partial r(x_1,p)}{\partial x_1}e^{ix_1s_1}dx_1\right| \le \\ \le \frac{4}{1+|s_1|}\left(\max_{x_1\in[-1,1]}|r(x_1,p)| + \max_{x_1\in[-1,1]}\left|\frac{\partial r(x_1,p)}{\partial x_1}\right|\right).\end{gathered} \tag{27}$$

Из неравенств (26) и (27) следует, что при всех $x_1 \in \mathbb{R}$ выполняется оценка (25).

Перейдем теперь к изучению функций $\dfrac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m}$, $m = 0, 1$.

В силу представлений

$$\frac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m} = \int_0^\infty e^{-pt}\frac{\partial^m r(x_1,p)}{\partial x_1^m}dt$$

и оценки (25) функции $\dfrac{\partial^m r(x_1, p)}{\partial x_1^m}$ – аналитические в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq -\varepsilon_0$ при любом $\varepsilon_0 > 0$. Пусть $\varepsilon_0 = 0.25k^2 + s_1^2$, где $k = \min\{k_1, k_2\}$. Тогда оценки функций $\dfrac{\partial^m r(x_1, p)}{\partial x_1^m}$ достаточно провести при $\operatorname{Re} p = -\varepsilon_0$. Получим

$$\left|\frac{\partial^m r(x_1, p)}{\partial x_1^m}\right| = \left|-\frac{1}{p}\int_0^\infty \frac{\partial^m q(x_1, p)}{\partial x_1^m} de^{-pt}\right| = \frac{1}{|p|}\left|\frac{\partial^m q(x_1, 0)}{\partial x_1^m} - \int_0^\infty \frac{\partial^m \partial q(x_1, p)}{\partial x_1^m \partial t} e^{-pt} dt\right| \leq$$
$$\leq \frac{1}{|p|^2}\left(\left|\frac{\partial^{m+1}\partial q(x_1, 0)}{\partial x_1^m \partial t}\right| + \int_0^\infty \left|\frac{\partial^{m+2}\partial q(x_1, p)}{\partial x_1^m \partial t^2}\right| dt\right). \tag{28}$$

Из оценок (25) и (28) следует утверждение леммы.

Введем обозначения

$$\hat{V}_n^1(x,t) = -(2\pi)^2 i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_1(s_1, p) \exp\left(-|x_2| R_n\right) e^{-ix_1 s_1 + pt} (R_1 + R_2)^{-1} dp ds_1.$$

$$\hat{V}_n^0(x,t) = (-1)^n (2\pi)^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_0(s_1, p) \exp\left(-|x_2| R_n\right)(R_1 + R_2)^{-1} R_{3-n} e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1,$$

с учетом которых, а также используя обозначения, введенные в лемме 1, и вычисляя интеграл по переменной $s_2$, получим, что представления (23) можно записать в виде $\hat{V}_n(x_1,t) = \hat{V}_n^1(x_1,t) + \hat{V}_n^0(x_1,t)$, где $n = 1, 2$.

**Лемма 2.** *Пусть* $p = -0.5\varepsilon_0 + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$. *Тогда при* $c > 0$ *справедлива оценка*

$$|R_1 + R_2| \geq c(\xi^2 + s_1^4 + 1)^{0.25}. \tag{29}$$

**Доказательство.** Отметим, что в силу оценки $0.25k_n^2 - 0.5\varepsilon_0 > 0$, выполнено вложение

$$\varphi_n = \arg(R_n^2) = \arg\left(\left(s_1^2 + \frac{k_n^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right) + \frac{i\xi}{a^2}\right) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

При этом справедливо представление

$$\sqrt{\left(s_1^2 + \frac{k_n^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right) + \frac{i\xi}{a^2}} = \left(\left(s_1^2 + \frac{k_n^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4}\right)^{0.25} \left(\cos\frac{\varphi_n}{2} + i\sin\frac{\varphi_n}{2}\right),$$

используя которое, получаем цепочку преобразований

$$\left|(s_1^2 + 0.25k_1^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5} + (s_1^2 + 0.25k_2^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5}\right| =$$
$$= \left|\left\{\left[\left(s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4}\right]^{0.25} \cos 0.5\varphi_1 + \left[\left(s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 \cos 0.5\varphi_2\right]^{0.25}\right\} + \right.$$
$$\left. + i\left\{\left[\left(s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4}\right]^{0.25} \sin\frac{\varphi_1}{2} + \left[\left(s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2}\right)^2 \sin\frac{\varphi_2}{2}\right]^{0.25}\right\}\right| \geq$$
$$\geq \left|\operatorname{Re}\left((s_1^2 + 0.25k_1^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5} + (s_1^2 + 0.25k_2^2 - 0.5a^{-2}\varepsilon_0 + a^{-2}i\xi)^{0.5}\right)\right| =$$

$$= \left| \left( \left( s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right)^{0.25} \cos\frac{\varphi_1}{2} + \left( \left( s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right)^{0.25} \cos\frac{\varphi_1}{2} \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \left[ \left( s_1^2 + \frac{k_1^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right]^{0.25} + \left[ \left( s_1^2 + \frac{k_2^2}{4} - \frac{\varepsilon_0}{2a^2} \right)^2 + \frac{\xi^2}{a^4} \right]^{0.25} \right| \geq c(1 + s_1^4 + \xi^2)^{0.25}.$$

Таким образом, лемма доказана.

На основе неравенств (24)–(29) можно сделать вывод об оценке функции $\hat{V}_n^1(x,t)$, справедливой при всех $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$:

$$\begin{gathered} \left|\hat{V}_n^1(x_1,t)\right| \leq cK \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (1+|s_1|)^{-1}\left(1+|\xi|^2\right)^{-1}(1+s_1^4+\xi^2)^{-0.25} e^{-0.5\varepsilon_0 t} d\xi ds_1 \leq \\ \leq cKe^{-0.5\varepsilon_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} (1+|s_1|)^{-1}(1+s_1^4)^{-0.25} ds_1 \int_{-\infty}^{\infty} (1+\xi^2)^{-1} d\xi \leq \tilde{c}e^{-0.5\varepsilon_0 t} \leq \tilde{c}, \end{gathered} \tag{30}$$

где

$$K = \frac{16}{\varepsilon_1^2}\left( \left\| \frac{\partial q(\bullet,0)}{\partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 q(\bullet,t)}{\partial x_1 \partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t} \right\| + \left\| \frac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2} \right\| \right), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad n = 1, 2.$$

Из оценки (30) на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла заключаем, что функции $\hat{V}_n^1(x_1,t)$ непрерывны по совокупности переменных $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$ (см. [7]).

Тогда

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to +0} [\hat{V}_1^1(x_1,\varepsilon_1,t) - \hat{V}_1^2(x_1,\varepsilon_2,t)] = \hat{V}_1^1(x_1,0,t) - \hat{V}_1^2(x_1,0,t) = 0,$$

откуда

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to +0} [\hat{V}_1(x_1,\varepsilon_1,t) - \hat{V}_2(x_1,\varepsilon_2,t)] = \lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2 \to +0} [\hat{V}_1^0(x_1,\varepsilon_1,t) - \hat{V}_2^0(x_1,\varepsilon_2,t)]. \tag{31}$$

Перейдем к изучению поведения функций $\hat{V}_n^0(x_1,x_2,t)$ при $x_2 \to +0$.

Отметим справедливость равенства

$$R_1(R_1+R_2)^{-1} - 0.5 = 0.125(k_1^2 - k_2^2)(R_1+R_2)^2.$$

Будем рассматривать функции

$$\hat{V}_n^{01} = 0.25\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} 0.125\hat{q}_0(s_1,p)(k_2^2 - k_1^2)\exp\left(-|x_2| R_n\right)(R_1+R_2)^{-2} e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1,$$

для которых выполнено равенство $\hat{V}_1^{01}(x_1,0,t) = \hat{V}_2^{01}(x_1,0,t)$.

Тогда

$$\lim_{x_2 \to +0} \hat{V}_1 = -\lim_{x_2 \to +0} 0.125\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_0(s_1,p)\exp\left(-|x_2| R_1\right) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1.$$

Пусть

$$-0.125\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_0(s_1,p)\exp(-|x_2| R_1) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1 = \hat{u}_1^{01}.$$

Функцию $\hat{u}_1^{01}$ можно представить в виде суммы $\hat{u}_1^{01} = \hat{u}_1^{010} + \hat{u}_1^{011}$, где

$$\hat{u}_1^{010} = -0.125\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_0(s_1,p) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1 = 0.5F^{-1}_{s_1 \to x_1} L^{-1}_{p \to t}\left[L_{t \to p} F_{x_1 \to s_1}[q_0(x_1,t)]\right] = 0.5q_0(x_1,t),$$

$$\hat{u}_1^{011} = -0.125\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.25k^2 - s_1^2 - i\infty}^{-0.25k^2 - s_1^2 + \infty} \hat{q}_0(s_1, p)(\exp(-|x_2| R_1) - 1) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1,$$

$$p = -0.25k^2 - s_1^2 + i\xi.$$

Из (24) следует оценка $|\hat{q}_0(s_1, p)| \le c(1 + |s_1|)^{-1}((0.25k^2 + s_1^2)^2 + \xi^2)^{-1}$.

Отметим также, что при любом $\varepsilon \in (0; 1)$ справедливы оценки

$$|\exp(-|x_2| R_1) - 1| \le |\exp(-|x_2| R_1) - 1|^{\varepsilon} \le c|x_2|^{\varepsilon}((1 + s_1^2)^2 + \xi^2)^{0.5\varepsilon} \times$$
$$\times \int_0^1 \exp(-|x_2| \operatorname{Re} R_1 z) dz \le c|x_2|^{\varepsilon}((1 + s_1^2)^2 + \xi^2)^{0.5\varepsilon}, \tag{32}$$

которые выполнены в силу неравенства $\operatorname{Re} R_1 \ge 2^{-0.5}|R_1| > 0$ и, как следствие, $|\exp(-|x_2| R_1)| \le 1$.

Из оценки (32) и утверждения леммы 1 при $p = -s_1^2 - 0.25k_1^2 + i\xi$ вытекает оценка

$$|\hat{q}_0(s_1, p)| \cdot |\exp(-|x_2| R_1) - 1| \le c_3 |x_2|^{-\varepsilon}(1 + |s_1|)^{-1-\varepsilon}(1 + \xi^2)^{\varepsilon - 1}. \tag{33}$$

Пусть $\varepsilon = 0.25$, тогда, используя (33), получаем

$$|\hat{q}_0(s_1, p)| \cdot |\exp(-|x_2| R_1) - 1| \le c|x_2|^{\varepsilon}(1 + |s_1|)^{-1.125}(1 + \xi^2)^{-0.75}.$$

Таким образом, выполнено неравенство

$$\left|\hat{u}_1^{011}(x_1, x_2, t)\right| \le c|x_2|^{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1 + |s_1|)^{-1.125}(1 + \xi^2)^{-0.75} d\xi ds_1 \le \tilde{c}|x_2|^{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x_2 \to +0} \hat{u}_1^{011}(x_1, x_2, t) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x_2 \to +0} \hat{u}_1^{01} = \lim_{x_2 \to +0} \hat{u}_1^{010} = 0.5 q_0(x_1, t).$$

Тогда $\lim_{x_2 \to +0} \hat{V}_1(x_1, x_2, t) = 0.5 q_0(x_1, t)$. Очевидно, что $\lim_{x_2 \to +0} \hat{V}_2(x_1, x_2, t) = -0.5 q_0(x_1, t)$.

Итак, выполнено условие

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to +0} (\hat{V}_1(x_1, \varepsilon_1, t) - \hat{V}_2(x_1, \varepsilon_2, t)) = q_0(x_1, t). \tag{34}$$

Перейдем к изучению $\dfrac{\partial \hat{V}_n(x,t)}{\partial x_2}$, $n = 1, 2$. Отметим, что $\dfrac{\partial \hat{V}_n(x,t)}{\partial x_2}$ при $x_2 > 0$ можно представить в виде суммы:

$$\frac{\partial \hat{V}_n(x,t)}{\partial x_2} = \hat{W}_n^1(x,t) + \hat{W}_n^0(x,t), \tag{35}$$

где

$$\hat{W}_n^1(x,t) = -0.25\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \hat{q}_1(s_1, p) R_n \exp(-|x_2| R_n) R_1^{-1} R_2^{-1} e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1, \tag{36}$$

$$\hat{W}_n^0(x,t) = (-1)^{n+1} 0.25\pi^{-2} i \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} \frac{\hat{q}_0(s_1, p) R_1 R_2}{R_1 + R_2} \exp(-|x_2| R_n) e^{-ix_1 s_1 + pt} dp ds_1. \tag{37}$$

Заметим, что представление $\hat{W}_1^1(x,t)$ совпадает с представлением $\hat{V}_1^0(x,t)$, а представление $\hat{W}_2^1(x,t)$ совпадает с представлением $-\hat{V}_2^0(x,t)$ с заменой функции $\hat{q}_0$ на $\hat{q}_1$. Откуда следует равенство

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \hat{W}_1^1(x_1, \varepsilon, t) = \lim_{\varepsilon \to +0} \hat{W}_0^1(x_1, \varepsilon, t) = 0.5 q_1(x_1, t),$$

если $q_1$ удовлетворяет тем же условиям, что и $q_0$ при изучении $\hat{V}_n^0(x,t)$.

Из вышесказанного можно сделать вывод о том, что

$$\lim_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\to+0}[\hat{W}_1^1(x_1,\varepsilon_1,t)+\hat{W}_2^1(x_1,\varepsilon_2,t)] = q_1(x_1,t). \tag{38}$$

Рассмотрим теперь $\hat{W}_n^0(x,t)$, $n = 1, 2$. Отметим выполнение равенства

$$R_1R_2(R_1+R_2)^{-1} - 0.25(R_2+R_1) = (64)^{-1}(k_2^2-k_1^2)(R_1+R_2)^{-3}.$$

При выполнении условий леммы 2 из последнего тождества вытекает оценка

$$|G(s_1,p)| \le c(\xi^2+s_1^4+1)^{-0.75}, \quad p = -0.5\varepsilon_2+i\xi, \quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{39}$$

где $G(s_1,p) = R_1R_2(R_1+R_2)^{-1} - 0.25(R_2+R_1)$.

Функцию $\hat{W}_n^0(x,t)$ представим в виде суммы $\hat{W}_n^0(x,t) = Y_n^1(x,t)+Y_n^2(x,t)$, где

$$Y_n^1(x,t) = (-1)^{n+1}0.25\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)(R_1+R_2)\exp(-|x_2|R_n)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1, \tag{40}$$

$$Y_n^2(x,t) = (-1)^{n+1}\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)G(s_1,p)\exp(-|x_2|R_n)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1. \tag{41}$$

Изучим сначала выражение (41).

**Лемма 3.** *Пусть для функции $q_0(x_1,t)$ выполнены условия леммы 1. Тогда $Y_n^2(x,t)$ являются непрерывными по переменным $x_1\in\mathbb{R}$, $x_2\ge 0$, $t\ge 0$ и*

$$\lim_{x_2\to+0}(Y_1^2(x,t)+Y_2^2(x,t)) = 0. \tag{42}$$

**Доказательство.** Пусть $\varepsilon_0 = (s_1^2+0.25k_n^2)a^2$, значит, $R_n^2 = s_1^2+0.25k_n^2-0.5s_1^2-0.125k_n^2+a^{-2}i\xi \ge$ $\ge 0.5s_1^2+0.125k_n^2+a^{-2}i\xi$, $\operatorname{Re}(R_n^2)>0$ и, как в лемме 2, $|\exp(-|x_2|R_n)|\le 1$.

Заметим также, что

$$(1+|s_1|)^{-1}(1+s_1^4+\xi^2)^{-1.75} \le (1+|s_1|)^{-1}(1+s_1^4)^{-0.25}(1+\xi^2)^{-1.5}.$$

Таким образом, выполнена оценка

$$|Y_n^2(x,t)| \le c\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(1+|s_1|)(1+s_1^4+\xi^2)^{1.75}}d\xi ds_1 \le c\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1.5}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{ds_1}{(1+|s_1|)^{1.25}} < \infty. \tag{43}$$

Оценка (43) на основании теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла доказывает утверждение леммы 3 в части непрерывности функций $Y_n^2(x,t)$, $n = 1, 2$.

Заметим, что тогда выполнено равенство

$$\lim_{x_2\to+0}Y_2^2(x,t) = -0.25\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)G(s_1,p)e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1 = -\lim_{x_2\to+0}Y_1^2(x,t),$$

из которого следует (42). Лемма доказана.

Из леммы 3 можно сделать вывод о том, что

$$\lim_{x_2\to+0}(\hat{W}_2^0(x,t)+\hat{W}_1^0(x,t)) = \lim_{x_2\to+0}(Y_2^1(x,t)+Y_1^1(x,t)). \tag{44}$$

Рассмотрим теперь функции, заданные равенством (40). Отметим, что для суммы интегралов $Y_n^1(x,t)$, $n = 1,2$, справедливо представление

$$\begin{gathered}|Y_1^1(x,t)+Y_2^1(x,t)| = -0.25\pi^{-2}i\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-0.5\varepsilon_0-i\infty}^{-0.5\varepsilon_0+i\infty}\hat{q}_0(s_1,p)(R_1+R_2)(\exp(-|x_2|R_2) - \\ - \exp(-|x_2|R_1))e^{-ix_1s_1+pt}dpds_1.\end{gathered} \tag{45}$$

Запишем разность экспонент в представлении (45) в виде интеграла по отрезку $l$, соединяющему точки $x_2R_2$ и $x_2R_1$ комплексной плоскости. Также как и при выводе оценки (43), отметим, что $\operatorname{Re}(x_2R_n) > 0$, поэтому для любой точки $z \in l$ имеем $\operatorname{Re} z > 0$, откуда $|\exp(-z)| \le 1$. Отметим, что $\operatorname{Re} R_n > 0$. Прибавляя и отнимая необходимые слагаемые, получаем цепочку преобразований

$$
\begin{gathered}
\exp(-x_2R_2) - \exp(-x_2R_1) = \\
= \Big|(e^{-x_2 \operatorname{Re} R_2} - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1})\cos \operatorname{Im} R_2x_2 + e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1}(\cos \operatorname{Im} R_2x_2 - \cos \operatorname{Im} R_1x_2) - \\
- i(e^{-x_2 \operatorname{Re} R_2} - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1})\sin \operatorname{Im} R_2x_2 - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1}(\sin \operatorname{Im} R_2x_2 - \sin \operatorname{Im} R_1x_2)\Big| = \\
= \Big|x_2 \operatorname{Re}(R_2 - R_1)e^{-x_2\Theta_1} \cos \operatorname{Im} R_2 - e^{-x_2 \operatorname{Re} R_1} x_2 \operatorname{Im}(R_2 - R_1) \sin \operatorname{Im} \Theta_2 x_2 - \\
- ix_2 \operatorname{Re}(R_2 - R_1)e^{-x_2\Theta_3} \sin \operatorname{Im} R_2 - ie^{-x_2 \operatorname{Re} R_1} \operatorname{Im}(R_2 - R_1)\cos \Theta_4 x_2\Big| \le \\
\le 2x_2(|\operatorname{Re}(R_2 - R_1)| + |\operatorname{Im}(R_2 - R_1)|) \le 4x_2|R_2 - R_1| = \\
= x_2\left|k_2^2 - k_1^2\right|(R_1 + R_2)^{-1} \le cx_2(s_1^4 + \xi^2 + 1)^{-0.25},
\end{gathered} \tag{46}
$$

где $p = (s_1^2 + 0.25k_n^2)a^2 + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}$.

Получившаяся оценка основана на применении к каждой из четырех возникших разностей теоремы Лагранжа со средними точками $\Theta_k$, $k = 1, 2, 3, 4$. Последний переход возможен благодаря оценке (29).

Используя неравенства (46) и (24), оценим выражение (45):

$$
\begin{gathered}
\left|Y_1^1(x,t) + Y_2^1(x,t)\right| \le c\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} |\hat{q}_0(s_1, p)| \cdot |R_2 + R_1| \cdot x_2(R_2 + R_1)^{-1} dp ds_1 \le \\
\le cx_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |s_1|)^{-1}(1 + |s_1|)^{-0.5} ds_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + \xi^2)^{-0.75} d\xi \le \tilde{c}x_2.
\end{gathered}
$$

Из последней оценки следует равенство $\lim\limits_{x_2 \to +0}\left|Y_1^1(x,t) + Y_2^1(x,t)\right| = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{x_2 \to +0}(\hat{W}_2^0(x,t) + \hat{W}_1^0(x,t)) = 0$ и, окончательно, получим $\lim\limits_{x_2 \to +0}\left(\dfrac{\partial \hat{V}_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \hat{V}_2}{\partial x_2}\right) = q_1(x_1, t)$, т.е. второе граничное условие выполнено в смысле главного значения.

**Следствие 1.** Пусть $\operatorname{Re} p = |s|^2 + R > 0$. Тогда в условиях и обозначениях леммы 1 справедлива оценка

$$
\begin{gathered}
\left|L_{t \to p}F_{x_1 \to s_1} q(x_1, t)\right| \le c(1 + |s_1|)^{-1}(1 + R^2 + s_1^2 + \operatorname{Im}^2 p)^{-1} \times \\
\times \left(|||q(x_1, 0)||| + \left|\left|\left|\frac{\partial q(x_1, 0)}{\partial t}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{\partial q}{\partial t}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial t}\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\frac{\partial^3 q}{\partial x_1 \partial t^2}\right|\right|\right|\right).
\end{gathered} \tag{47}
$$

**Доказательство.** Заметим, что при измененных условиях на $p$ в оценке (28) справедливо неравенство $|p|^{-2} > (R^2 + \operatorname{Im}^2 p)^{-1}$, из чего следует утверждение следствия.

Запишем представления функций $\hat{V}_n(x_1, t)$, $n = 1, 2$, в виде суммы

$$
\hat{V}_n(x_1, t) = h_n^1(x_1, t) + h_n^2(x_1, t), \tag{48}
$$

где

$$
\begin{gathered}
h_n^m = -0.25\pi^{-2} i \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-0.5\varepsilon_0 - i\infty}^{-0.5\varepsilon_0 + i\infty} (\hat{q}_1(s_1, p) + (-1)^n R_{3-n}\hat{q}_0(s_1, p)(R_2 + R_1)^{-1} \times \\
\times (-\exp(-|x_2| R_n)) e^{-ix_1 s_1}(e^{pt} - 1)^{2-m} dp ds_1, \quad m = 1, 2.
\end{gathered} \tag{49}
$$

Сначала изучим функции $h_n^1(x,t)$ при $\varepsilon_0 = (0.25k^2 + s_1^2)a^2$, $k = \min\{k_1, k_2\}$.

Используя результаты лемм 1 и 2, получаем неравенство

$$\begin{gathered}\left|(\hat{q}_1(s_1,p)+(-1)^n R_{3-n}\times\hat{q}_0(s_1,p))^{-1}(R_2+R_1)^{-1}\left(\exp\left(-|x_2|R_n\right)\right)e^{-ix_1s_1}\right|\leq\\ \leq c\left(1+|s_1|\right)^{-1}(1+s_1^2+\operatorname{Im}^2 p)^{-1}.\end{gathered}\tag{50}$$

Исследуем выражение $|\exp(pt)-1|$. В силу выполнения равенства

$$\exp(pt)-1=pt\int_0^1\exp(ptz)dz$$

и того, что $\operatorname{Re}p<0$, справедлива оценка

$$\begin{gathered}\left|e^{pt}-1\right|=\left|e^{pt}-1\right|^{\varepsilon}\times\left|e^{pt}-1\right|^{1-\varepsilon}\leq 2\left|e^{pt}-1\right|^{\varepsilon}\leq 2\left(|p||t|\int_0^1 e^{\operatorname{Re}ptz}dz\right)^{\varepsilon}\leq|p|^{\varepsilon}t^{\varepsilon}\leq\\ \leq c(1+s_1^2+\operatorname{Im}^2 p)^{0.5\varepsilon}t^{\varepsilon},\quad 0\leq\varepsilon\leq 1.\end{gathered}\tag{51}$$

Из представления (49), оценок (50) и (51) при $\xi=\operatorname{Im}p$ и $0<\varepsilon<0.5$ следует неравенство

$$h_n^1=\frac{1}{(2\pi)^2 i}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1+s_1^2+\xi^2)^{0.5\varepsilon}t^{\varepsilon}}{(1+|s_1|)(1+s_1^2+\xi^2)}d\xi ds_1\leq ct^{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1}{(1+|s_1|)^{1+\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1-\varepsilon}}<\tilde{c}t^{\varepsilon},$$

откуда

$$\lim_{t\to+0}h_n^1(x,t)=0.\tag{52}$$

Покажем теперь, что $h_n^2(x,t)\equiv 0$. Учитывая, что подынтегральное выражение в (49) — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re}p>(-s_1^2-0.25k^2)a^2$, где $k=\min\{k_1,k_2\}$, сдвинем контур интегрирования с прямой $\operatorname{Re}p=-0.5a^2(s_1^2+0.25k^2)$ на прямую $\operatorname{Re}p=R+s_1^2$, где $R>0$ — произвольное число.

Опираясь на неравенство (47) при $\xi=\operatorname{Im}p$, получаем оценку

$$\left|h_n^2\right|\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi ds_1}{(1+|s_1|)(1+R^2+s_1^2+\xi^2)}\leq\frac{c}{(1+R^2)^{0.5\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds_1}{(1+|s_1|)^{1+\varepsilon}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{1-\varepsilon}}\leq\frac{1}{(1+R^2)^{0.5\varepsilon}},$$

где $\varepsilon>0$ — произвольное число. Следовательно, $\left|h_n^2\right|\leq(1+R^2)^{-0.5\varepsilon}\tilde{c}$. Устремляя $R\to+\infty$, имеем

$$h_n^2=0.\tag{53}$$

Из (48), (52), (53) следует выполнение условий

$$\lim_{t\to+0}V_n(x,t)=0,\quad n=1,2.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Chen Y.F.* The interface crack problem for a nonhomogeneous coating bonded to a homogeneous substrate // J. Mech. Phys. Solids. 1996. V. 44. P. 771–787.
2. *Lei W.-S.* Non oscillatory and non-singular asymptotic solutions to stress fields at interface cracks // Willey Publishing Ltd. Fatigue Fract. Engng Mater. Struct. 2017. P. 1–18.
3. *Vitucci G., Mishuris G.* Analysis of residual stresses in thermoelastic multilayer cylinders // J. of the European Ceramic Society. 2016. V. 36. P. 2411–2417.
4. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Черникова А.С.* Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. I // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 6. С. 1007–1023.
5. *Глушко А.В., Рябенко А.С., Черникова А.С.* Стационарное распределение тепла в биматериале с межфазной трещиной. Ч. 2 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1230–1242.
6. *Астахова Е.В., Глушко А.В., Логинова Е.А.* Влияние тепла на деформации материала с дефектом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 9. С. 1532–1536.
7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.