ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1779–1785

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 519.61

Светлой памяти Александра Александровича Абрамова посвящается

О МНОЖЕСТВЕ МАТРИЦ С КОКВАДРАТОМ $J_n(1)$

Х. Д. Икрамов

119992 Москва, Ленинские горы, МГУ, ВМК, Россия

e-mail: ikramov@cs.msu.su

Поступила в редакцию 21.02.2020 г.
Переработанный вариант 21.02.2020 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Показано, что комплексные матрицы с коквадратом $J_n(1)$ можно описать как невырожденные матрицы X, в алгебраической форме которых $X = Y + iZ$ вещественные матрицы Y и Z суть решения матричного уравнения $(J_n(1))^\top W - W(J_n(1))^{-1} = 0$. Описан вид таких матриц Y и Z. Библ. 2.

Ключевые слова: конгруэнтность, коквадрат, матричное уравнение Стейна, матричное уравнение Сильвестра, элементарный делитель.

DOI: 10.31857/S0044466921110089

1. Пусть A — невырожденная комплексная $n\times n$-матрица. Матрица $\mathscr{C}_A = A^{-*}A$ называется коквадратом матрицы A. Спектр и жорданова структура коквадрата дают много информации о нормальной форме A относительно конгруэнций. В данной статье конгруэнция понимается как преобразование вида

$$A \to P^*AP,$$

где P — произвольная невырожденная матрица.

Предположим, что жорданова форма коквадрата $\mathscr{C}_A$ состоит из единственной жордановой клетки

$$J_n(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & & & \\ & \lambda_0 & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \lambda_0 & 1 \\ & & & & \lambda_0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\lambda_0 = e^{i\theta}$ — число с модулем 1. В этом случае нормальная форма F_A матрицы A относительно конгруэнций представляет собой $n\times n$-матрицу

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdots & i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 1 & \cdots & & \\ 1 & i & \cdots & & \end{pmatrix},$$

взятую со скалярным множителем $e^{i\theta/2}$ или $-e^{i\theta/2}$ (см. [1, § 4.5]). Ту же нормальную форму имеет всякая матрица, конгруэнтная матрице A.

Положим $\lambda_0 = 1$. В предлагаемой статье рассматривается следующая задача: описать множество $\mathcal{K}_n$ всех невырожденных $n \times n$-матриц, коквадратом которых является жорданова клетка $J_n(1)$.

2. Множество

$$\mathcal{K}_n = \{X \,|\, X^{-*}X = J_n(1)\} \tag{2}$$

является многообразием в матричном пространстве $M_n(\mathbf{C})$, рассматриваемом как вещественное линейное пространство. Переписывая определение коквадрата в виде

$$X = X^*J_n(1) \tag{3}$$

и отказываясь от требования невырожденности матрицы X, мы погружаем $\mathcal{K}_n$ в вещественное линейное подпространство $\mathcal{L}_n$ решений уравнения (3).

Какова размерность подпространства $\mathcal{L}_n$? Положив

$$X = Y + iZ, \quad Y, Z \in M_n(\mathbf{R}), \tag{4}$$

заменим комплексное уравнение (3) парой вещественных уравнений

$$Y = Y^\top J_n(1), \tag{5а}$$

$$Z = -Z^\top J_n(1). \tag{5б}$$

Подпространства решений этих уравнений обозначим соответственно через $\mathcal{Y}_n$ и $\mathcal{Z}_n$. Очевидно, что они пересекаются только по нулевой матрице, поэтому подпространство

$$\mathcal{W}_n = \mathcal{Y}_n + \mathcal{Z}_n \tag{5в}$$

есть прямая сумма $\mathcal{Y}_n$ и $\mathcal{Z}_n$.

Из (5а) выводим

$$Y^\top = (J_n(1))^\top Y.$$

Подставляя это выражение для $Y^\top$ в (5а), приходим к однородному уравнению Стейна для матрицы Y:

$$Y = (J_n(1))^\top Y J_n(1).$$

Умножая обе части справа на $(J_n(1))^{-1}$, получаем однородное уравнение Сильвестра:

$$(J_n(1))^\top Y - Y(J_n(1))^{-1} = 0. \tag{6}$$

К этому же уравнению (6) (с заменой Y на Z) приводят аналогичные выкладки с уравнением (5б).

Итак, обе матрицы Y и Z в формуле (4) принадлежат подпространству $\mathcal{S}_n$ вещественных решений линейного однородного матричного уравнения (6). Размерность этого подпространства известна. Оба матричных коэффициента уравнения, т.е. матрицы $(J_n(1))^\top$ и $(J_n(1))^{-1}$, имеют единственный элементарный делитель $(\lambda - 1)^n$. Согласно формуле (19) из [2, глава VIII],

$$\dim \mathcal{S}_n = n.$$

Поскольку $\mathcal{Y}_n$, $\mathcal{Z}_n$ и $\mathcal{W}_n$ вложены в $\mathcal{S}_n$, то

$$\dim \mathcal{W}_n \le n.$$

Размерности подпространств $\mathcal{W}_n$ и $\mathcal{L}_n$ одинаковы, поэтому

$$\dim \mathcal{L}_n \le n. \tag{7}$$

Ниже мы показываем, что, в действительности,

$$\dim \mathcal{L}_n = \dim \mathcal{S}_n = n.$$

3. Приведем вид общих решений уравнений (5а) и (5б) для малых порядков n. Символы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ε используются для обозначения свободных параметров. Начнем с уравнения (5а).

$n = 2$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{8}$$

$n = 3$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & -\alpha & \beta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

$n = 4$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & -\alpha & \beta \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$n = 5$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & -\alpha & -\alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 2\alpha & \alpha - \beta & -\beta & \gamma \end{pmatrix}. \tag{11}$$

$n = 6$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & -\alpha & -\alpha & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 2\alpha & \alpha - \beta & -\beta & \gamma \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Перейдем теперь к уравнению (5б).

$n = 2$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \delta \\ -\delta & -\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$n = 3$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & -\delta & -\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

$n = 4$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & \delta & -\dfrac{\delta}{2} \\ 0 & -\delta & -\dfrac{\delta}{2} & \varepsilon \\ \delta & \dfrac{3\delta}{2} & \dfrac{\delta}{2} - \varepsilon & -\dfrac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

$n = 5$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta & -\dfrac{\delta}{2} \\ 0 & 0 & -\delta & -\dfrac{\delta}{2} & \varepsilon \\ 0 & \delta & \dfrac{3\delta}{2} & \dfrac{\delta}{2} - \varepsilon & -\dfrac{\varepsilon}{2} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

4. Покажем, как выводятся эти представления общих решений на примере уравнения (5а) при $n = 5$. Транспонируем это уравнение и положим $J_5(1) = I_5 + J_5(0)$:

$$Y^\top = Y + (J_5(0))^\top Y,$$

или

$$Y - Y^\top = -(J_5(0))^\top Y. \tag{17}$$

Таким образом, матрица

$$(J_5(0))^\top Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} & y_{45} \end{pmatrix},$$

отличаясь лишь знаком от матрицы $Y - Y^\top$, должна быть кососимметричной. Отсюда выводим

$$y_{11} = y_{21} = y_{31} = y_{41} = 0,$$

$$y_{12} = y_{23} = y_{34} = y_{45} = 0,$$

$$y_{22} = -y_{13}, \quad y_{32} = -y_{14}, \quad y_{42} = -y_{15},$$

$$y_{33} = -y_{24}, \quad y_{43} = -y_{25}, \quad y_{44} = -y_{35}.$$

Матрицы $Y, -(J_5(0))^\top Y$ и $Y - Y^\top$ теперь выглядят так:

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{13} & y_{14} & y_{15} \\ 0 & -y_{13} & 0 & y_{24} & y_{25} \\ 0 & -y_{14} & -y_{24} & 0 & y_{35} \\ 0 & -y_{15} & -y_{25} & -y_{35} & 0 \\ y_{51} & y_{52} & y_{53} & y_{54} & y_{55} \end{pmatrix},$$

$$-(J_5(0))^\top Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_{13} & -y_{14} & -y_{15} \\ 0 & y_{13} & 0 & -y_{24} & -y_{25} \\ 0 & y_{14} & y_{24} & 0 & -y_{35} \\ 0 & y_{15} & y_{25} & y_{35} & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y - Y^\top = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_{13} & y_{14} & y_{15} - y_{51} \\ 0 & 0 & 0 & y_{24} + y_{15} & y_{25} - y_{52} \\ -y_{13} & -y_{14} & 0 & y_{25} & y_{35} - y_{53} \\ -y_{14} & -y_{15} - y_{24} & -y_{25} & 0 & -y_{54} \\ -y_{15} + y_{51} & y_{52} - y_{25} & y_{53} - y_{35} & y_{54} & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство двух последних матриц дает соотношения

$$y_{13} = y_{14} = 0, \quad y_{51} = y_{15},$$

$$y_{24} + y_{15} = 0 \Rightarrow y_{24} = -y_{15},$$

$$y_{25} = -y_{24} = y_{15},$$

$$y_{25} - y_{52} = -y_{15} \Rightarrow y_{52} = y_{25} + y_{15} = 2y_{15},$$

$$y_{35} - y_{53} = -y_{25} \Rightarrow y_{53} = y_{35} + y_{25} = y_{15} + y_{35},$$

$$y_{54} = y_{35}.$$

Полагая $y_{15} \equiv \alpha$, $y_{35} \equiv -\beta$ и $y_{55} \equiv \gamma$, приходим к формуле (11).

5. Внимательный взгляд на формулы (8)–(16) обнаруживает такую закономерность: при фиксированном порядке n общее решение Y зависит от $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ свободных параметров, а общее решение Z – от $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ свободных параметров. Это наблюдение относится пока лишь к малым значениям n. В данном разделе мы покажем по индукции, что указанная закономерность верна для всех n.

Базисом индукции могут служить сами представления (8)–(16). Индуктивный переход проанализируем для определенности для уравнения (5а). При этом будем различать случаи нечетного и четного n.

Пусть $n = 2k - 1$ и Y_{2k-1} – произвольное решение уравнения (5а) для этого значения n, т.е.

$$Y_{2k-1} = Y_{2k-1}^\top J_{2k-1}(1).$$

Сопоставление формул (9) и (10) показывает, что общее решение для $n = 4$ получается из общего решения для $n = 3$ окаймлением нулевой строкой сверху и нулевым столбцом слева. Это же верно для перехода от $n = 5$ к $n = 6$ (см. формулы (11) и (12)). Исходя из этого наблюдения, построим матрицу

$$Y_{2k} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(2k-1)} \\ 0_{(2k-1)\times 1} & Y_{2k-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

порядка $2k$ и вычислим произведение $Y_{2k}^\top J_{2k}(1)$:

$$Y_{2k}^\top J_{2k}(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(2k-1)} \\ 0_{(2k-1)\times 1} & Y_{2k-1}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e_{2k-1}^\top \\ 0_{(2k-1)\times 1} & J_{2k-1}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0_{1\times(2k-1)} \\ 0_{(2k-1)\times 1} & Y_{2k-1}^\top J_{2k-1}(1) \end{pmatrix} = Y_{2k}.$$

Таким образом, все матрицы вида (18) являются решениями уравнения (5а) при $n = 2k$ и, согласно индуктивному предположению, образуют линейное подпространство размерности $\left\lceil \frac{2k-1}{2} \right\rceil = k = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Рассмотрим теперь случай четного $n = 2k$. Сопоставление формул (8) и (9), а также (10) и (11), приводит к такому выводу: общее решение для $n = 2k + 1$ получается из общего решения для $n = 2k$ окаймлением (ненулевыми) строкой и столбцом (снизу и справа). Само по себе окаймление не увеличивает число свободных параметров, а новым свободным параметром становится последний диагональный элемент $y_{2k+1,2k+1}$.

Итак, пусть Y_{2k} – произвольное решение уравнения (5а) для $n = 2k$, т.е.

$$Y_{2k} = Y_{2k}^\top J_{2k}(1).$$

Будем искать решение уравнения (5а) для $n = 2k + 1$ в виде

$$Y_{2k+1} = \begin{pmatrix} Y_{2k} & a \\ b^\top & \gamma \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Здесь a и b – это вектор-столбцы размерности $2k$, а γ – скаляр.

Вычислим произведение $Y_{2k+1}^{\top}J_{2k+1}(1)$:

$$Y_{2k+1}^{\top}J_{2k+1}(1) = \begin{pmatrix} Y_{2k}^{\top} & b \\ a^{\top} & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{2k}(1) & e_{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \tag{20}$$

$$\begin{pmatrix} Y_{2k}^{\top}J_{2k}(1) & Y_{2k}^{\top}e_{2k} + b \\ a^{\top}J_{2k}(1) & a^{\top}e_{2k} + \gamma \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Проверим совместность системы условий

$$Y_{2k}^{\top}e_{2k} + b = a, \tag{22а}$$

$$a^{\top}J_{2k}(1) = b^{\top}, \tag{22б}$$

$$a^{\top}e_{2k} + \gamma = \gamma. \tag{22в}$$

Уравнение (22в) удовлетворяется тогда и только тогда, когда последняя компонента вектора a равна нулю. (Заметим, что это условие выполнено при $n = 3$ и $n = 5$.) Положив $a_{2k} = 0$, транспонируем уравнение (22б):

$$b = (J_{2k}(1))^{\top}a. \tag{23}$$

Подставляя это выражение в (22а), имеем

$$((J_{2k}(1))^{\top} - I)a = -Y_{2k}^{\top}e_{2k},$$

или

$$(J_{2k}(0))^{\top}a = -Y_{2k}^{\top}e_{2k}.$$

Первые компоненты левой и правой частей равны нулю, так как обе матрицы $(J_{2k}(0))^{\top}$ и $Y_{2k}^{\top}$ имеют нулевые первые строки. Остальные компоненты этого равенства однозначно определяют элементы вектора a в позициях $1, 2, \ldots, n-1$. Напомним, что $a_{2k} = 0$.

Итак, нужный нам вектор a однозначно определяется вектором $Y_{2k}^{\top}e_{2k}$, т.е. последней строкой матрицы Y_{2k}. Вслед за a находим b по формуле (23). Оба вектора зависят от тех же k свободных параметров, что и Y_{2k}.

Матрица (21), соответствующая этим векторам a и b, совпадает с Y_{2k+1}, каково бы ни было число γ. Это число является новым свободным параметром, и суммарное число параметров в общем решении равно $k + 1 = \left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil$.

Из проведенного исследования заключаем, что линейное подпространство $\mathcal{T}_n$ решений уравнения (5а) имеет размерность не меньшую, чем $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. Аналогичным образом показываем, что линейное подпространство $\mathcal{U}_n$ решений уравнения (5б) имеет размерность не меньшую, чем $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. В соответствующем анализе используются наблюдения, почерпнутые из формул (13)–(16): при переходе от четного n к $n+1$ происходит окаймление нулевыми строкой и столбцом сверху и слева; при переходе от нечетного n к $n+1$ окаймление, напротив, производится (ненулевыми) строкой и столбцом снизу и справа.

6. Подведем итог.

Подпространства $\mathcal{T}_n$ и $\mathcal{U}_n$ пересекаются только по нулевому вектору. Поэтому (см. (4)) вещественное линейное подпространство $\mathcal{L}_n$, составленное из решений уравнения (3), имеет размерность, не меньшую, чем $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$. С другой стороны, в разд. 2 было показано (см. (7)), что

$$\dim \mathcal{L}_n \le \dim \mathcal{S}_n = n.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. $\dim \mathcal{L}_n = \dim \mathcal{S}_n = n$.

Вопрос, поставленный в начале статьи, получает следующий ответ: множество $\mathcal{K}_n$ матриц, имеющих коквадрат $J_n(1)$, состоит из всех невырожденных решений уравнения (3). Решения этого уравнения образуют подпространство размерности n. Все они имеют нижнюю антитреугольную форму, что следует из представления (4) и рассуждений разд. 5.

7. Все матрицы из $\mathcal{K}_n$ имеют один и тот же коквадрат $J_n(1)$. Тем не менее не все они конгруэнтны. Покажем это на примере простейшего случая $n = 2$.

Матрицы X из $\mathcal{K}_2$ имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 0 & i\delta \\ -i\delta & \alpha - i\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Тёплицево разложение матрицы X таково:

$$\frac{1}{2}(X + X^*) = \begin{pmatrix} 0 & i\delta \\ -i\delta & \alpha \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{2i}(X - X^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\delta}{2} \end{pmatrix}.$$

Эрмитовы матрицы $\frac{1}{2}(X + X^*)$ имеют при всех $\delta \neq 0$ одно положительное и одно отрицательное собственные значения, а потому все они конгруэнтны. Вырожденные матрицы $\frac{1}{2i}(X - X^*)$ имеют при $\delta \neq 0$ единственное собственное значение, которое положительно при $\delta < 0$ и отрицательно, если $\delta > 0$. Поэтому матрицы X с $\delta < 0$ не могут быть конгруэнтны матрицам X с $\delta > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Horn R.A., Johnson C.R.* Matrix Analysis. Second edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2013.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.