ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1927–1936

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.538

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ[1)]

© 2021 г. М. О. Корпусов[1,2]

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, МГУ, физ. факультет, Россия

[2] 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, РУДН, Россия

e-mail: korpusov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.07.2020 г.
Переработанный вариант 05.07.2020 г.
Принята к публикации 11.02.2021 г.

Мы вывели новые нелинейные уравнения высокого порядка соболевского типа, описывающие ионно-звуковые волны в плазме во внешнем электрическом или магнитном полях. Несмотря на громоздкий вид уравнений, для исследования соответствующих начальных и начально-краевых задач развиты методы исследования. Так, используя наши результаты, мы в дальнейшем предложим достаточные условия возникновения режимов с обострением. Библ. 18.

Ключевые слова: нелинейные уравнения соболевского типа, разрушение, “blow-up”, локальная разрешимость, нелинейная емкость, оценки времени разрушения.

DOI: 10.31857/S0044466921110119

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы впервые получили нелинейные уравнения теории нелинейных ионно-звуковых волн в плазме, находящейся либо во внешнем электрическом, либо во внешнем магнитном полях. Эти нелинейные уравнения являются соболевскими уравнениями (см. [1]) шестого порядка — второго по координатам и четвертого по времени следующих видов:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)=f_0(x,t),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{Bi}^2\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi+\omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0.$$

Отметим, что соответствующее уравнение ионно-звуковых волн в однородной и изотропной плазме описывается уравнением четвертого порядка — второго по координатам и второго по времени следующего вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\Delta_3\phi=0.$$

Наконец, в заключительным разделе нами получено следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi+\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0,$$

которое учитывает слабую диссипативность ионно-звуковых волн во внешнем магнитном поле.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [2]–[6] и посвященные выводу нелинейных уравнений соболевского типа.

[1)] Работа выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН и при финансовой поддержке Программы РУДН “5-100”.

Заметим, что некоторые начальные и начально-краевые задачи для различных вариантов нелинейных уравнений ионно-звуковых волн исследовались в [7]–[14].

2. ИЗОТРОПНАЯ И ОДНОРОДНАЯ ПЛАЗМА

Рассмотрим незамагниченную однородную плазму. Будем рассматривать такие колебания частиц плазмы, частота которых не превышает ионной ленгмюровской частоты

$$\omega_{pi} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{M}\right)^{1/2}.$$

В этом случае в волновом движении участвуют не только электроны, но и ионы. Обычно при рассмотрении ионно-звуковых волн полагают температуру ионов $T_i = 0$, поскольку температура электронов $T_e \gg T_i$. Кроме того, при рассмотрении волн частоты $\omega \le \omega_{pi}$ считается, что можно пренебречь инерцией электронов и положить в соответствующих уравнениях массу электрона $m = 0$.

Выберем декартову систему координат $\{Ox_1x_2x_3\}$ с репером $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Гидродинамика ионов и электронов описывается следующей системой уравнений (см. [15]):

$$Mn_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + Mn_i(\mathbf{v}_i, \nabla)\mathbf{v}_i = -\nabla p_i - en_i\nabla\phi, \quad p_i = n_i kT_i, \tag{2.1}$$

$$mn_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + mn_e(\mathbf{v}_e, \nabla)\mathbf{v}_e = -\nabla p_e + en_e\nabla\phi, \quad p_e = n_e kT_e, \tag{2.2}$$

где M – масса иона, n_i – концентрация ионов, $\mathbf{v}_i$ – скорость иона, p_i – давление, создаваемое ионами, T_i – температура ионов, m – масса электрона, n_e – концентрация электронов, $\mathbf{v}_e$ – скорость электрона, p_e – давление, создаваемое электронами, T_e – температура электронов, ϕ – потенциал электрического поля.

Положим в уравнении (2.2) $m = 0$ и получим следующее равенство:

$$0 = -kT_e\nabla n_e + en_e\nabla\phi \Rightarrow n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right). \tag{2.3}$$

Положим в уравнении (2.1) температуру ионов $T_i = 0$ и получим в линейном приближении уравнение

$$Mn_0 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -en_0\nabla\phi. \tag{2.4}$$

Дополним полученные уравнения (2.3) и (2.4) уравнениями электрической части системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}_i, \tag{2.6}$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации.

Из уравнений (2.4) и (2.6) вытекает уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\nabla\phi. \tag{2.7}$$

Из уравнений (2.3), (2.5) и (2.7) вытекает

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2\Delta_3\phi = 0, \quad \omega_{pi} = \left(\frac{4\pi e^2 n_0}{M}\right)^{1/2}, \tag{2.8}$$

где

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}.$$

Уравнение (2.8) называется уравнением ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме и ее линейный вариант был впервые получен в [15].

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (2.8) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемые разложения ее в ряд и тогда уравнение (2.8) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0 \frac{e\phi}{kT_e} - 4\pi n_0 \frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right) + \omega_{pi}^2 \Delta_3 \phi = 0.$$

3. ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Выберем декартову систему координат $\{Ox_1x_2x_3\}$ с репером $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть плазма находится во внешнем постоянном и однородном поле

$$\mathbf{E}_0 = E_0\mathbf{e}_3, \quad E_0 > 0.$$

Гидродинамика ионов во внешнем электрическом поле описывается системой уравнений

$$Mn_i \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + Mn_i(\mathbf{v}_i, \nabla)\mathbf{v}_i = -\nabla p_i + en_i\mathbf{E}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div}(n_i\mathbf{v}_i) = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_i = 0, \tag{3.2}$$

где M – масса иона, n_i – концентрация ионов, $\mathbf{v}_i$ – скорость иона, p_i – давление. Гидродинамика электронов во внешнем электрическом поле описывается, в частности, уравнением

$$mn_e \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + mn_e(\mathbf{v}_e, \nabla)\mathbf{v}_e = -\nabla p_e - en_e\mathbf{E}, \tag{3.3}$$

где m – масса электрона, n_e – концентрация электронов, $\mathbf{v}_e$ – скорость электрона, p_e – давление. В уравнении (3.3) положим

$$m = 0, \quad p_e = n_e kT_e, \quad \mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_3 - \nabla\phi \tag{3.4}$$

и предположим, что температура T_e постоянна. В результате из (3.3) и (3.4) получим дифференциальное уравнение

$$kT_e\nabla n_e = en_e(-E_0\mathbf{e}_3 + \nabla\phi),$$

решение которого выписывается явно следующим образом:

$$n_e = n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right), \quad n_0(x_3) = n_0 \exp\left(-\frac{eE_0}{kT_e}x_3\right), \quad n_0 = \text{const} > 0. \tag{3.5}$$

Добавим к уравнениям (3.1), (3.2) и (3.5) электрическую часть квазистационарной системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_i\mathbf{v}_i, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации, ϕ – потенциал электрического поля.

Проведем линеаризацию в уравнениях (3.1), (3.2) и (3.7). Именно, положим

$$n_i = N_0 + n, \quad p_i = kT_iN_0 + p, \quad \mathbf{E} = E_0\mathbf{e}_3 - \nabla\phi.$$

Из уравнения (3.1) получим следующие два:

$$kT_i\nabla N_0 = eN_0E_0\mathbf{e}_3, \tag{3.8}$$

$$MN_0 \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\nabla p - eN_0 \nabla \phi + enE_0 \mathbf{e}_3. \tag{3.9}$$

Дифференциальное уравнение (3.8) легко интегрируется, и мы получаем явный вид функции $N_0 = N_0(x_3)$:

$$N_0(x_3) = n_0 \exp\left(\frac{eE_0}{kT_i} x_3\right). \tag{3.10}$$

Теперь проведем линеаризацию уравнений (3.2) и (3.7) и получим уравнения

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(N_0(x_3)\mathbf{v}_i) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = eN_0(x_3)\mathbf{v}_i. \tag{3.12}$$

Таким образом, мы пришли к системе уравнений (3.9), (3.11), (3.12) и (3.6).

Заметим, что первое уравнение из (3.11) с учетом второго уравнения из (3.11) и явного вида функции $N_0(x_3)$, определенной равенством (3.10), примет следующий вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{eE_0}{kT_i} N_0(x_3) v_{i3} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_i = 0.$$

Из уравнения (3.9) в координатах получаем

$$MN_0(x_3)\frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} - eN_0(x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \tag{3.13}$$

$$MN_0(x_3)\frac{\partial v_{i2}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} - eN_0(x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{3.14}$$

$$MN_0(x_3)\frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_3} - eN_0(x_3)\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + enE_0. \tag{3.15}$$

Продифференцируем обе части равенства (3.15) по времени и с учетом равенства (3.11) получим равенство

$$MN_0(x_3)\frac{\partial^2 v_{i3}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_3} - eN_0(x_3)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_3} - \frac{(eE_0)^2}{kT_i} N_0(x_3) v_{i3}. \tag{3.16}$$

Из равенства (3.12) и из (3.13), (3.14), (3.16) получим равенства

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{3.18}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right)\frac{\partial P_3}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x_3} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_3}, \tag{3.19}$$

где мы ввели обозначение

$$\omega_0 := \frac{eE_0}{\sqrt{kT_i M}}.$$

Проинтегрируем равенство (3.19) по времени и получим уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right) P_3 = -\frac{e}{M}\frac{\partial p}{\partial x_3} - \frac{e^2 N_0(x_3)}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_3} + f_0(x), \tag{3.20}$$

где функция $f_0(x)$ считается заданной. Из уравнений (3.5), (3.6), (3.17), (3.18) и (3.20) вытекает следующее уравнение шестого порядка:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\frac{4\pi e}{M}\Delta_2 p+\omega_{pi}^2(x_3)\Delta_2\phi\right)+ \\ +\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{4\pi e}{M}\frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2}+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right)\right)=0, \tag{3.21}$$

где

$$\omega_{pi}^2(x_3)=\frac{4\pi e^2N_0(x_3)}{M},\quad \omega_0^2=\frac{(eE_0)^2}{kT_iM}, \tag{3.22}$$

$$N_0(x_3)=n_0\exp\left(\frac{eE_0}{kT_i}x_3\right),\quad n_0(x_3)=n_0\exp\left(-\frac{eE_0}{kT_e}x_3\right). \tag{3.23}$$

Кроме того, мы использовали следующие обозначения:

$$\Delta_3=\Delta_2+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2},\quad \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \tag{3.24}$$

Теперь получим второе уравнение искомой системы уравнений. С этой целью перепишем уравнения (3.13), (3.14) и (3.16) в виде

$$\frac{\partial v_{i1}}{\partial t}=-\frac{1}{MN_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_1}-\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial v_{i2}}{\partial t}=-\frac{1}{MN_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_2}-\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \tag{3.26}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)v_{i3}=-\frac{1}{MN_0(x_3)}\frac{\partial^2 p}{\partial t\partial x_3}-\frac{e}{M}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_3}. \tag{3.27}$$

Из уравнений (3.25), (3.26) и (3.27), а также второго уравнения (3.11) вытекает следующее уравнение четвертого порядка:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)(\Delta_2 p+eN_0(x_3)\Delta_2\phi)+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(N_0(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{N_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)+eN_0(x_3)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right)=0. \tag{3.28}$$

Итак, мы пришли к нелинейной системе уравнений (3.21) и (3.28) относительно давления p и электрического потенциала ϕ, описывающей нелинейные ионно-звуковые волны в плазме во внешнем электрическом поле.

Рассмотрим некоторые возможные упрощения системы уравнений (3.21) и (3.28). Предположим, что область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$, в которой физически расположена плазма, находится в полуплоскости $x_3\le-\delta$ при $\delta>0$. Тогда заметим, что

$$\frac{N_0(x_3)}{T_i^\lambda}=\frac{n_0\exp\left(\frac{eE_0}{kT_i}x_3\right)}{T_i^\lambda}\to+0\quad\text{при}\quad T_i\to+0$$

для любого $\lambda\ge0$. В приближении малого T_i уравнение (3.28) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2 p+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(N_0(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{N_0(x_3)}\frac{\partial p}{\partial x_3}\right)\right)=0. \tag{3.29}$$

Формально это уравнение получено из (3.28) отбрасыванием следующих слагаемых с “бесконечно” малыми коэффициентами:

$$eN_0(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi\quad\text{и}\quad eN_0(x_3)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}.$$

Отметим, что линейное уравнение (3.29) хорошо изучено и совпадает с уравнением внутренних волн в стратифицированной жидкости, но с коэффициентами, имеющими другой физический смысл (см. [16]).

Следовательно, при учете начальных и граничных условий функцию $p = p(x,t)$ в уравнении (3.21) можно считать заданной и поэтому уравнение (3.21) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0(x_3)\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) = f_0(x,t), \quad (3.30)$$

где

$$f_0(x,t) := -\frac{4\pi e}{M}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2 p(x,t) - \frac{4\pi e}{M}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2 p}{\partial x_3^2},$$

и мы использовали обозначения (3.22), (3.23) и (3.24). Назовем уравнение (3.30) уравнением ионно-звуковых волн в незамагниченной плазме во внешнем электрическом поле с заданной функцией $f_0(x,t)$.

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (3.30) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемые разложения ее в ряд и тогда уравнение (3.30) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0(x_3)\frac{e\phi}{kT_e} - 4\pi n_0(x_3)\frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right) +$$
$$+ \omega_{pi}^2(x_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_0^2\right)\Delta_2\phi + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\omega_{pi}^2(x_3)\frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) = f_0(x,t).$$

4. ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Выберем декартову систему координат $\{Ox_1x_2x_3\}$ с репером $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Пусть плазма находится во внешнем постоянном и однородном поле

$$\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3, \quad B_0 > 0.$$

Линеаризованное уравнение, описывающее гидродинамику ионов в плазме во внешнем магнитном поле, имеет следующий вид (см. [17]):

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{e}{M}\nabla\phi + \omega_{Bi}[\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_i], \quad \omega_{Bi} = \frac{eB_0}{Mc}. \quad (4.1)$$

Линейная гидродинамика электронов описывается уравнением

$$mn_{e0}\frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} = -\nabla p_e + \frac{en_{e0}B_0}{c}[\mathbf{e}_3, \mathbf{v}_e] + en_{e0}\nabla\phi_e, \quad p_e = n_{e0}kT_e. \quad (4.2)$$

Как и в предыдущем разделе положим в уравнении (4.2) массу электрона $m = 0$. Кроме того, поскольку скорость электронов много меньше скорости света, то положим в (4.2) $c = +\infty$. В результате получим следующее уравнение:

$$0 = -kT_e\nabla n_{e0} + en_{e0}\nabla\phi_e \Rightarrow n_{e0} = n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right). \quad (4.3)$$

Дополним (4.1) и (4.3) уравнениями электродинамики

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_{e0}, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}_i. \quad (4.5)$$

Перепишем уравнение (4.1) в координатах

$$\frac{\partial v_{i1}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \omega_{Bi}v_{i2}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial v_{i2}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} + \omega_{Bi} v_{i1}, \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_3}. \tag{4.8}$$

Из уравнений (4.6) и (4.7) вытекают следующие два:

$$\frac{\partial^2 v_{i1}}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2 v_{i1} = -\frac{e}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_1} + \frac{e}{M}\omega_{Bi}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial^2 v_{i2}}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2 v_{i2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_2} - \frac{e}{M}\omega_{Bi}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}. \tag{4.10}$$

Из уравнений (4.5), (4.9), (4.10) и (4.8) вытекают следующие:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_1} + \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \tag{4.11}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_2} - \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial \phi}{\partial x_3}. \tag{4.13}$$

В свою очередь, из уравнений (4.11) и (4.12) получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^2 \partial x_1} + \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_2}, \tag{4.14}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^3 \phi}{\partial t^2 \partial x_2} - \frac{e^2 n_0 \omega_{Bi}}{M}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x_1}. \tag{4.15}$$

Теперь из уравнений (4.13), (4.14) и (4.15) вытекает равенство

$$4\pi\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\operatorname{div}\mathbf{P} = -\omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_2\phi - \omega_{pi}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = -\omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi - \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}, \tag{4.16}$$

где

$$\omega_{pi} = \left(\frac{4\pi n_0 e^2}{M}\right)^{1/2}, \quad \omega_{Bi} = \frac{eB_0}{Mc}. \tag{4.17}$$

Из уравнений (4.3), (4.4) и (4.16) вытекает уравнение шестого порядка

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right) + \omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi + \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0, \tag{4.18}$$

которое мы назовем *уравнением ионно-звуковых волн* в замагниченной плазме.

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (4.18) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемых разложения ее в ряд и тогда уравнение (4.18) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{Bi}^2\right)\left(\Delta_3\phi - 4\pi n_0\frac{e\phi}{kT_e} - 4\pi n_0\frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right) + \omega_{pi}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3\phi + \omega_{pi}^2\omega_{Bi}^2\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2} = 0,$$

где использованы обозначения (4.17).

5. ПЛАЗМА ВО ВНЕШНЕМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ: СЛАБАЯ ДИССИПАЦИЯ

В этом разделе мы несколько модифицируем базовую модель ионно-звуковых волн, изложенную в разд. 2, и получим еще одно нелинейное уравнение ионно-звуковых волн со слабой диссипацией во внешнем магнитном поле.

Пусть однородная плазма находится во внешнем постоянном магнитном поле

$$\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{e}_3, \quad B_0 > 0.$$

Рассмотрим следующие соотношения из [18, с. 340]:

$$\mathbf{j} = \sigma\left(-\nabla\phi + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i, \mathbf{B}_0]\right),$$
$$\mathbf{f} := \frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{B}_0] = \frac{\sigma}{c}[\mathbf{B}_0, \nabla\phi] + \frac{\sigma}{c^2}[\mathbf{B}_0, [\mathbf{B}_0, \mathbf{v}_i]], \tag{5.1}$$

где $\sigma > 0$ – коэффициент проводимости плазмы, c – скорость света, $\mathbf{v}_i$ – вектор скорости ионов, $\mathbf{j}$ – вектор плотности тока в плазме. Тогда в линейном приближении и при температуре ионов $T_i = 0$ получим следующую линейную систему уравнений гидродинамики ионов [18, с. 341]:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} = -\frac{e}{M}\nabla\phi + \mathbf{f}, \tag{5.2}$$

где объемная плотность сторонних сил $\mathbf{f}$ определена равенством (5.1). Как и в разд. 2 предполагаем, что плотность электронов описывается распределением Больцмана

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right). \tag{5.3}$$

Наконец, как и выше, систему уравнений (5.2), (5.1) и (5.3) замыкаем следующими уравнениями из электрической части квазистационарной системы уравнений Максвелла:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = -4\pi n_e, \quad \mathbf{D} = -\nabla\phi + 4\pi\mathbf{P}, \tag{5.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = en_0\mathbf{v}_i, \tag{5.5}$$

где $\mathbf{D}$ – вектор индукции электрического поля, $\mathbf{P}$ – вектор поляризации. Из системы уравнений (5.2) и (5.1) в координатах получаем следующие равенства:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)v_{i1} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \quad \sigma_1 := \frac{\sigma B_0^2}{c^2}, \tag{5.6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)v_{i2} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial v_{i3}}{\partial t} = -\frac{e}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}. \tag{5.7}$$

Теперь из уравнений (5.5) и (5.6), (5.7) получаем уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)\frac{\partial P_1}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_1} - \frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \tag{5.8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sigma_1\right)\frac{\partial P_2}{\partial t} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial^2 P_3}{\partial t^2} = -\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial\phi}{\partial x_3}. \tag{5.10}$$

Из (5.8) и (5.9) вытекают уравнения

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}=-\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_1}-\frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_2},\\&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}=-\frac{e^2 n_0}{M}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_2}+\frac{en_0\sigma B_0}{c}\frac{\partial^2\phi}{\partial t\partial x_1}.\end{aligned}\tag{5.11}$$

Из уравнений (5.10), (5.11) вытекает следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}4\pi\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{div}\mathbf{P}&=-\omega_{pi}^2\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial x_1^2}-\omega_{pi}^2\frac{\partial^3\phi}{\partial t\partial x_2^2}-\omega_{pi}^2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=\\&=-\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi-\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2},\quad \omega_{pi}^2:=\frac{4\pi e^2 n_0}{M}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Из уравнений (5.3), (5.4) и (5.12) вытекает нелинейное уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\exp\left(\frac{e\phi}{kT_e}\right)\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi+\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0,\tag{5.13}$$

где

$$\sigma_1=\frac{\sigma B_0^2}{c^2},\quad \omega_{pi}^2=\frac{4\pi e^2 n_0}{M}.$$

Полученное уравнение пятого порядка (5.13) назовем *уравнением ионно-звуковых волн* со слабой диссипацией во внешнем магнитном поле.

В заключение данного раздела отметим, что в уравнении (5.13) в приближении большой температуры T_e электронов можно вместо рассмотрения экспоненты рассмотреть первые три слагаемых разложения ее в ряд, и тогда уравнение (5.13) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\sigma_1\right)\left(\Delta_3\phi-4\pi n_0\frac{e\phi}{kT_e}-4\pi n_0\frac{(e\phi)^2}{2(kT_e)^2}\right)+\omega_{pi}^2\frac{\partial}{\partial t}\Delta_3\phi+\sigma_1\omega_{pi}^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}=0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Al'shin A.B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G.* Blow-up in nonlinear Sobolev type equations. De Gruyter: Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2011.
2. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. Т. 39. № 6. С. 1006–1022.
3. *Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г.* О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 8. С. 1237–1249.
4. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Об одной начально-краевой задаче магнитной гидродинамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 11. С. 1734–1741.
5. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2003. Т. 43. № 12. С. 1835–1869.
6. *Корпусов М.О., Свешников А.Г.* Трехмерные нелинейные эволюционные уравнения псевдопараболического типа в задачах математической физики. 2 // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. № 11. С. 2041–2048.
7. *Корпусов М.О.* О разрушении ионно-звуковых волн в плазме // Матем. сб. 2011. Т. 202. № 1. С. 37–64.
8. *Корпусов М.О.* О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с сильной пространственно-временной дисперсией // Алгебра и анализ. 2011. Т. 23. № 6. С. 96–130.
9. *Корпусов М.О.* О разрушении ионно-звуковых волн в плазме с нелинейными источниками на границе // Изв. РАН. Сер. матем. 2012. Т. 76. № 2. С. 103–140.

10. *Корпусов М.О.* О разрушении за конечное время решения начально-краевой задачи для нелинейного уравнения ионно-звуковых волн // Теор. и матем. физ. 2016. Т. 187. № 3. С. 447–454.
11. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Овсянников Е.А., Панин А.А.* Локальная разрешимость и разрушение решения одного уравнения с квадратичной некоэрцитивной нелинейностью // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2017. Т. 10. № 2. С. 107–123.
12. *Корпусов М.О., Панин А.А.* О непродолжаемом решении и разрушении решения одномерного уравнения ионно-звуковых волн в плазме // Матем. заметки. 2017. Т. 102. № 3. С. 383–395.
13. *Корпусов М.О., Лукьяненко Д.В., Панин А.А., Юшков Е.В.* О разрушении решений одного полного нелинейного уравнения ионно-звуковых волн в плазме с некоэрцитивными нелинейностями // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 2. С. 43–78.
14. *Корпусов М.О., Овсянников Е.А.* Взрывная неустойчивость в нелинейных волновых моделях с распределенными параметрами // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 3. С. 15–70.
15. *Габов С.А.* Новые задачи математической теории волн. М.: Физматлит, 1998.
16. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука, 1990.
17. *Петвиашвили В.И., Похотелов О.А.* Уединенные волны в плазме и атмосфере. М.: Энергоатомиздат, 1989.
18. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика. Т. 8. М.: Наука, 1992.