ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 11, с. 1850–1872

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ В СРЕДЕ С РАЗРЫВНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ[1)]

Н. Т. Левашова[1,*], Б. В. Тищенко[1,]**

[1] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 2, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет, Россия

*e-mail: natasha@wanaku.net

**e-mail: bogdanmsu@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.12.2020 г.
Переработанный вариант 24.03.2021 г.
Принята к публикации 07.07.2021 г.

Используется асимптотический анализ для исследования существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости по Ляпунову решения одномерной нелинейной параболический системы типа активатор–ингибитор. Особенностью задачи являются разрывы I рода функций в правых частях уравнений. Скачок функций происходит в единственной точке отрезка, на котором рассматривается задача. Исследуется решение, обладающее большим градиентом в окрестности разрыва. Доказательство теорем существования и устойчивости проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств. Библ. 31.

Ключевые слова: система нелинейных уравнений, малый параметр, внутренние слои, верхнее и нижнее решения, асимптотика решения, асимптотическая устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.31857/S0044466921110132

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматривается система двух дифференциальных уравнений второго порядка с разрывными нелинейными функциями в правой части. Целью работы является получение достаточных условий существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения параболической системы, обладающего большим градиентом в окрестности точек разрыва правой части.

Такая постановка задачи возникла в ходе разработки автоволновой модели развития мегаполисов (см. [1], [2]). Эта модель основана на системе двух уравнений типа активатор–ингибитор, где в роли активатора выступает площадь городской застройки, а ингибитор определяется экологическими или экономическими факторами, обусловленными политикой градообразования той или иной страны. Наличие барьеров, препятствующих распространению фронта активатора, например больших водоемов, в модели учитывается как разрыв функций в правых частях. В малой (по сравнению с рассматриваемой территорией) окрестности границы разрыва происходит резкое изменение значений активатора и ингибитора. Эта малая окрестность называется внутренним переходным слоем. Тем самым, в задаче присутствует естественный малый параметр, равный отношению ширины переходного слоя к ширине рассматриваемой области.

Очевидно, численному решению такой задачи должно предшествовать аналитическое исследование существования и устойчивости упомянутого решения, что можно сделать, применяя метод малого параметра. В настоящей работе с использованием этого метода получены достаточные условия существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости, а также выделена локальная область притяжения устойчивого решения.

Доказательство существования и асимптотической устойчивости стационарного решения начально-краевой задачи здесь проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. [3], [4]), основанного на методе верхних и нижних решений. Распростране-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 18-11-00042П.

ние последнего на задачи с единственной точкой разрыва первого рода в правых частях уравнений здесь проведено провели на основании модифицированного доказательства соответствующей теоремы из [5], где оно проведено для случая C^2-гладких правых частей.

Проблемы существования и устойчивости гладких решений скалярных уравнений реакция–диффузия в случае разрывного реактивного слагаемого были рассмотрены в ряде работ (см., например, [6], [7]).

Вопрос о существовании и свойствах слабых решений для систем уравнений с разрывными коэффициентами освещается, например, в [8], [9].

Особенность настоящего исследования заключается в распространении асимптотических методов, использованных в [6], [7], для обоснования существования гладкого решения системы уравнений с разрывной правой частью и локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения системы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему параболических уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 y_{xx} - y_t = f(y, z, x, \varepsilon), \quad x \in (0,1), \quad t \in \mathbb{R}^+,\\ &\varepsilon^2 z_{xx} - z_t = g(y, z, x, \varepsilon), \quad x \in (0,1), \quad t \in \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ – малый параметр.

Отметим, что именно такое распределение степеней малого параметра возникает в результате проведения масштабирования и перехода к безразмерным переменным в системе автоволновых уравнений (см. [1]). Вхождение различных степеней ε в уравнениях для активатора (u-компонента) и ингибитора (v-компонента) обусловлено тем, что характерный масштаб изменения активатора значительно превышает соответствующий масштаб для ингибитора.

Здесь и далее будем использовать обозначения $\mathbb{R}^+ := (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^- := (-\infty, 0)$, $\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_0^- := (-\infty, 0]$.

Поставим следующие начальные и краевые условия:

$$y_x(0,t) = y_x(1,t) = 0, \quad y(x,0) = u^0(x), \quad z_x(0,t) = z_x(1,t) = 0, \quad z(x,0) = v^0(x), \tag{2}$$

считая, что функции $u^0(x)$, $v^0(x)$ гладкие на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяют условиям согласования $u_x^0(0) = u_x^0(1) = v_x^0(0) = v_x^0(1) = 0$.

Будем считать, что правые части системы (1) имеют вид

$$\begin{aligned} &f(u, v, x, \varepsilon) = \begin{cases} f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad 0 < x \le x_0,\\ f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad x_0 < x \le 1, \end{cases}\\ &g(u, v, x, \varepsilon) = \begin{cases} g^{(-)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad 0 < x \le x_0,\\ g^{(+)}(u, v, x, \varepsilon), & u \in I_u, \quad v \in I_v, \quad x_0 < x \le 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

причем функции $f^{(-)}(u, v, x, \varepsilon)$ и $g^{(-)}(u, v, x, \varepsilon)$ принадлежат классу $C^3(I_u \times I_v \times [0, x_0] \times [0, \varepsilon_0])$, а $f^{(+)}(u, v, x, \varepsilon)$, $g^{(+)}(u, v, x, \varepsilon)$ – классу $C^3(I_u \times I_v \times [x_0, 1] \times [0, \varepsilon_0])$, где I_u и I_v – некоторые допустимые интервалы изменения переменных u и v, а на поверхности $\{u \in I_u,\ v \in I_v,\ x = x_0 \in (0,1)\}$ функции $f(u, v, x, \varepsilon)$ и $g(u, v, x, \varepsilon)$ претерпевают разрывы I рода.

Определение 1. Пара функций $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ из класса $C^{1,1}([0,1] \times \mathbb{R}_0^+) \cap C^{2,1}(((0,1) \backslash x_0) \times \mathbb{R}^+)$ называется *решением задачи* (1), (2), если она удовлетворяет уравнениям (1) при $(x,t) \in ((0,1) \backslash x_0) \times \mathbb{R}^+$, а также граничным и начальным условиям (2).

Пусть выполнены следующие условия.

Условие 1. Каждое из уравнений $f^{(\mp)}(u,v,x,0)=0$ имеет изолированное решение $u=\varphi^{(\mp)}(v,x)$ соответственно в области $I_v\times[0,x_0]$ и $I_v\times[x_0,1]$, и выполняются неравенства

$$\varphi^{(-)}(v,x_0)<\varphi^{(+)}(v,x_0),\qquad f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)>0.$$

Обозначим $h^{(\mp)}(v,x)=g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x),v,x,0)$.

Условие 2. Каждое из уравнений $h^{(\mp)}(v,x)=0$ имеет изолированное решение $v=\psi^{(\mp)}(x)$ соответственно на отрезках $[0,x_0]$ и $[x_0,1]$ и выполняются неравенства

$$\psi^{(-)}(x_0)<\psi^{(+)}(x_0),\qquad h_v^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x),x)>0.$$

Условие 3. (Условие квазимонотонности). Пусть при всех $(u,v)\in I_u\times I_v$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ выполняются неравенства

$$f_v^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)>0,\qquad g_u^{(\mp)}(u,v,x,\varepsilon)<0$$

соответственно на отрезках $[0,x_0]$ и $[x_0,1]$.

Замечание 1. Условие квазимонотонности в таком виде характерно для задач типа активатор–ингибитор.

Основная цель работы – определить достаточные условия существования, локальной единственности и асимптотической устойчивости стационарного решения задачи (1), (2), близкого к $(\varphi^{(-)},\psi^{(-)})$ слева от точки x_0 и к $(\varphi^{(+)},\psi^{(+)})$ справа от этой точки и резко изменяющегося от значений $(\varphi^{(-)},\psi^{(-)})$ до значений $(\varphi^{(+)},\psi^{(+)})$ в малой окрестности точки x_0. Далее эту окрестность мы будем называть *внутренним переходным слоем*.

Очевидно, стационарное решение задачи (1), (2) является решением следующей задачи:

$$\begin{gathered}\varepsilon^4u''=f(u,v,x,\varepsilon),\qquad \varepsilon^2v''=g(u,v,x,\varepsilon),\qquad x\in(0,1),\\ u'(0)=u'(1)=0,\qquad v'(0)=u'(1)=0.\end{gathered}\tag{4}$$

Определение 2. Пара функций $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ из класса $C^1([0,1])\cap C^2((0,1)\backslash x_0)$ называется *решением задачи* (4), если она удовлетворяет уравнениям (4) при $x\in(0,1)\backslash x_0$ и граничным условиям.

Прежде чем сформулировать остальные условия, рассмотрим так называемые присоединенные уравнения для задачи (4):

$$\frac{d^2\tilde v}{d\tau^2}=h^{(-)}(\tilde v,x_0),\quad \tau<0,\qquad \frac{d^2\tilde v}{d\tau^2}=h^{(+)}(\tilde v,x_0),\quad \tau>0,\qquad \tau:=\frac{x-x_0}{\varepsilon},\tag{5}$$

$$\frac{d^2\hat u}{d\sigma^2}=f^{(-)}\left(\hat u,v,x_0,0\right),\quad \sigma<0,\qquad \frac{d^2\hat u}{d\sigma^2}=f^{(+)}\left(\hat u,v,x_0,0\right),\quad \sigma>0,\qquad \sigma:=\frac{x-x_0}{\varepsilon^2}.\tag{6}$$

Каждое из присоединенных уравнений эквивалентно присоединенной системе

$$\frac{d\tilde v}{d\tau}=\Phi^{(\mp)},\qquad \frac{d\Phi^{(\mp)}}{d\tau}=h^{(\mp)}(\tilde v,x_0);\qquad \frac{d\hat u}{d\sigma}=\Psi^{(\mp)},\qquad \frac{d\Psi^{(\mp)}}{d\sigma}=f^{(\mp)}\left(\hat u,v,x_0,0\right).\tag{7}$$

Условие 4. Пусть выполняются неравенства

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v}h^{(-)}(s,x_0)ds>0,\qquad v\in(\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)],$$

$$\int\limits_{\psi^{(+)}(x_0)}^{v}h^{(+)}(s,x_0)ds>0,\qquad v\in[\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)),$$

$$\int\limits_{\varphi^{(-)}(v,x_0)}^{u}f^{(-)}(s,v,x_0,0)ds>0,\qquad u\in(\varphi^{(-)}(v,x_0),\varphi^{(+)}(v,x_0)],\qquad v\in[\psi^{(-)}(x_0),\psi^{(+)}(x_0)],$$

$$\int\limits_{\varphi^{(+)}(v,x_0)}^{u} f^{(+)}(s,v,x_0,0)ds > 0, \quad u \in [\varphi^{(-)}(v,x_0), \varphi^{(+)}(v,x_0)), \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)].$$

При выполнении условия 4 функции

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}) = \sqrt{2\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}} h^{(\mp)}(s,x_0)ds} \tag{8}$$

задают выражения для сепаратрис седловых точек $(\psi^{(\mp)}(x_0), 0)$ первой пары систем (7) на фазовой плоскости $(\tilde{v}, \Phi)$, а функции

$$\Psi^{(\mp)}(\hat{u}, v) = \sqrt{2\int\limits_{\varphi^{(\mp)}(v,x_0)}^{\hat{u}} f^{(\mp)}(s,v,x_0,0)ds} \tag{9}$$

при каждом $v \in [\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0)]$ – выражения для сепаратрис седловых точек $(\varphi^{(\mp)}(v,x_0), 0)$ второй пары систем (7) на фазовой плоскости $(\hat{u}, \Psi)$.

Обозначим

$$H^v(\tilde{v}) := \Phi^{(-)}(\tilde{v}) - \Phi^{(+)}(\tilde{v}), \quad H^u(\hat{u}, v) := \Psi^{(-)}(\hat{u}, v) - \Psi^{(+)}(\hat{u}, v). \tag{10}$$

Условие 5. Пусть существует величина $q_0 \in (\psi^{(-)}(x_0), \psi^{(+)}(x_0))$ – единственное решение уравнения $H^v(\tilde{v}) = 0$, и величина $p_0 \in (\varphi^{(-)}(q_0, x_0), \varphi^{(+)}(q_0, x_0))$ – единственное решение уравнения $H^u(\hat{u}, q_0) = 0$, и выполняются неравенства

$$\frac{dH^v}{dv}(q_0) \neq 0, \quad \frac{\partial H^u}{\partial u}(p_0, q_0) > 0.$$

Замечание 2. Выполнение неравенств из условия 5 эквивалентно выполнению неравенств

$$h^{(-)}(q_0, x_0) - h^{(+)}(q_0, x_0) \neq 0, \quad f^{(-)}(p_0, q_0, x_0, 0) - f^{(+)}(p_0, q_0, x_0, 0) > 0.$$

Введем функции

$$\nu^{(\mp)}(v,x) := g_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x), v, x, 0) + \frac{f_v^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x), v, x, 0)}{f_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x), v, x, 0)} g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(v,x), v, x, 0) \tag{11}$$

соответственно на множествах $(v,x) = I_v \times [0, x_0]$ для функций с верхним индексом “(–)” и $(v,x) = I_v \times [x_0, 1]$ для функций с индексом “(+)”, а также введем обозначения

$$\overline{\nu}^{(\mp)}(x) := \nu^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x). \tag{12}$$

Условие 6. Пусть $\overline{\nu}^{(\mp)}(x) > 0$ соответственно на отрезках $[0, x_0]$ и $[x_0, 1]$, а для функций $\nu^{(\mp)}(v,x)$ справедливы соотношения

$$\int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{v} \nu^{(-)}(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in [\psi^{(-)}(x_0), q_0), \qquad \int\limits_{\psi^{(-)}(x_0)}^{q_0} \nu^{(-)}(s,x_0)ds > 0,$$

$$\int\limits_{v}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s,x_0)ds \geq 0, \quad v \in (q_0, \psi^{(+)}(x_0)], \qquad \int\limits_{q_0}^{\psi^{(+)}(x_0)} \nu^{(+)}(s,x_0)ds > 0.$$

В основе доказательства существования и устойчивости стационарных решений параболических уравнений с внутренними переходными или пограничными слоями лежит асимптотический метод дифференциальных неравенств (см. [6], [7], [10]–[12]). Этот метод основан на построении для рассматриваемой начально-краевой задачи верхних и нижних решений, которые, согласно принципу сравнения из [5], [8], по сути являются асимптотическими приближениями точного решения исходной задачи. Построение верхнего и нижнего решений включает два этапа: 1) получение асимптотического приближения решения с помощью алгоритма Васильевой (см. [13]), 2) задание добавок к этому асимптотическому приближению, обеспечивающих выполнение системы неравенств, фигурирующей в определении верхнего и нижнего решений (см. [5] и ниже в этой работе). Достаточными условиями применения алгоритма Васильевой в настоящей работе являются условия 1–4 и отличные от нуля производные $dH^v/dv(q_0)$ и $\partial H^u/\partial u(p_0, q_0)$ в условии 5. Как правило, для выполнения неравенств, определяющих верхнее и нижнее решение, одной только возможности применения алгоритма Васильевой оказывается недостаточно, поэтому на втором этапе появляются дополнительные условия. В нашем случае это положительный знак производной $\partial H^u/\partial u(p_0, q_0)$ в условии 5, а также условие 6, которые в случае выбранной квазимонотонности (см. условие 3) позволяют построить подходящие добавки к асимптотическому приближению, обеспечивающие выполнение требуемых неравенств.

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В данном разделе мы остановимся на построении асимптотического приближения решения стационарной задачи. Отметим, что вид этого приближения и алгоритм его построения лишь незначительно отличаются от приведенного в [4].

Асимптотическое приближение первого порядка решения задачи (4) строится отдельно слева и справа от точки x_0:

$$U_1(x,\varepsilon) = \begin{cases} U^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ U^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \quad V_1(x,\varepsilon) = \begin{cases} V^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ V^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1. \end{cases} \tag{13}$$

Каждая из функций $U^{(\mp)}$, $V^{(\mp)}$ представляется в виде суммы

$$U^{(\mp)} = \bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) + M^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon) + P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon) + R^{(\mp)}u(\eta_{\mp},\varepsilon), \tag{14}$$

$$V^{(\mp)} = \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) + M^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon) + P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp},\varepsilon). \tag{15}$$

Функции, зависящие от переменной x, описывают поведение решения вдали от точки x_0 и границ отрезка (регулярная часть); функции, зависящие от растянутых переменных τ и σ (см. (5), (6)), описывают резкое изменение решения в окрестности точки x_0 (функции переходного слоя); функции, зависящие от растянутых переменных $\zeta_- = x/\varepsilon$ и $\eta_- = x/\varepsilon^2$, описывают поведение решения в окрестности точки $x = 0$, а зависящие от растянутых переменных $\zeta_+ = (1-x)/\varepsilon$ и $\eta_+ = (1-x)/\varepsilon^2$ – в окрестности точки $x = 1$ (пограничные функции).

Каждая из функций, входящих в суммы (14), (15), представляется в виде разложения по степеням малого параметра:

$$\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) = \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{v}_1^{(\mp)}(x); \tag{16}$$

$$Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}u(\tau) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}u(\tau), \quad Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}v(\tau) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}v(\tau); \tag{17}$$

$$M^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon) = M_0^{(\mp)}u(\sigma) + \varepsilon M_1^{(\mp)}u(\sigma), \quad M^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{3} \varepsilon^i M_i^{(\mp)}v(\sigma); \tag{18}$$

$$P^{(\mp)}u(\zeta_{\mp},\varepsilon) = \varepsilon P_1^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}) + \varepsilon^2 P_2^{(\mp)}u(\zeta_{\mp}); \quad P^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}) = \varepsilon P_1^{(\mp)}v(\zeta_{\mp}) + \varepsilon^2 P_2^{(\mp)}v(\zeta_{\mp});$$
$$R^{(\mp)}u(\eta_{\mp},\varepsilon) = \varepsilon^2 R_2^{(\mp)}u(\eta_{\mp}) + \varepsilon^3 R_3^{(\mp)}u(\eta^{\mp}).$$

Алгоритм построения пограничных P- и R-функций для аналогичной системы уравнений представлен в [4], [14], [15], поэтому здесь мы не будем на нем подробно останавливаться.

Функции $U^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $U^{(+)}(x,\varepsilon)$, а также $V^{(-)}(x,\varepsilon)$ и $V^{(+)}(x,\varepsilon)$ сшиваются непрерывно в точке x_0, согласно равенствам

$$U^{(-)}(x_0,\varepsilon) = U^{(+)}(x_0,\varepsilon) = p_0 + \varepsilon p_1 + O(\varepsilon^2), \tag{19}$$

$$V^{(-)}(x_0,\varepsilon) = V^{(+)}(x_0,\varepsilon) = q_0 + \varepsilon q_1 + O(\varepsilon^2), \tag{20}$$

где величины p_0 и q_0 – те же, что в условии 5, а коэффициенты p_1 и q_1 определяются после построения функций переходного слоя первого порядка $Q_1^{(\mp)}u$, $Q_1^{(\mp)}v$, $M_1^{(\mp)}u$, $M_1^{(\mp)}v$ таким образом, чтобы выполнялись следующие условия на производные функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $V^{(\mp)}(x,\varepsilon)$:

$$\frac{dU^{(-)}}{dx}(x_0,\varepsilon) = \frac{dU^{(+)}}{dx}(x_0,\varepsilon) + O(1), \quad \frac{dV^{(-)}}{dx}(x_0,\varepsilon) = \frac{dV^{(+)}}{dx}(x_0,\varepsilon) + O(\varepsilon). \tag{21}$$

2.1. Регулярная часть

Системы уравнений для функций регулярной части получаются из равенств

$$\begin{aligned} f^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{v}_1^{(\mp)}(x), x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2), \\ g^{(\mp)}(\bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x), \quad \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{v}_1^{(\mp)}(x), x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2) \end{aligned} \tag{22}$$

путем приравнивания коэффициентов при равных степенях ε в разложении Тейлора по малому параметру функций, входящих в эти равенства.

В частности, в нулевом порядке, принимая во внимание условия 1 и 2, следует положить $\bar{v}_0^{(\mp)}(x) = \psi^{(\mp)}(x)$, $\bar{u}_0^{(\mp)}(x) = \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x)$.

Функции первого порядка $\bar{u}_1^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_1^{(\mp)}(x)$ находятся из систем

$$\begin{aligned} \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x), \\ \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{g}_\varepsilon^{(\mp)}(x), \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f}^{(\mp)}(x) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x), \psi^{(\mp)}(x), x, 0), \\ \bar{g}^{(\mp)}(x) := g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x), \psi^{(\mp)}(x), x, 0), \end{aligned} \tag{24}$$

и аналогичный смысл имеют сходные обозначения производных этих функций. Системы (23) также разрешимы в силу условий 1 и 2.

2.2. Функции переходного слоя

Системы уравнений для функций переходного слоя получаются из равенств

$$\varepsilon^2\frac{d^2Q^{(\mp)}u}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}f(\tau,\varepsilon), \quad \frac{d^2Q^{(\mp)}v}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}g(\tau,\varepsilon), \tag{25}$$

$$\frac{d^2M^{(\mp)}u}{d\sigma^2} = M^{(\mp)}f(\sigma,\varepsilon), \quad \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2M^{(\mp)}v}{d\sigma^2} = M^{(\mp)}g(\sigma,\varepsilon), \tag{26}$$

где

$$\begin{aligned} Q^{(\mp)}f(\tau,\varepsilon) := f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon), x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon) - \\ - f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon), x_0+\varepsilon\tau,\varepsilon), \end{aligned}$$

а функции $Q^{(\mp)}g(\tau,\varepsilon)$ определяются аналогичным образом;

$$\begin{aligned} M^{(\mp)}f(\sigma,\varepsilon) := f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\varepsilon\sigma,\varepsilon) + M^{(\mp)}u(\sigma,\varepsilon), \\ \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\varepsilon\sigma,\varepsilon) + M^{(\mp)}v(\sigma,\varepsilon), x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) - \\ - f^{(\mp)}(\bar{u}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\varepsilon\sigma,\varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\varepsilon\sigma,\varepsilon), x_0+\varepsilon^2\sigma,\varepsilon), \end{aligned}$$

а функции $M^{(\mp)}g$ определяются по аналогии с $M^{(\mp)}f$.

Краевые условия при $\xi = 0$ и $\sigma = 0$ для функций переходного слоя получаются из условий непрерывного сшивания (19), (20); также учитывается требование убывания этих функций на бесконечности

$$\begin{gathered} Q_i^{(\mp)}u(\tau) \to 0, \quad Q_i^{(\mp)}v(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \mp\infty; \\ M_i^{(\mp)}u(\sigma) \to 0, \quad M_i^{(\mp)}v(\sigma) \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to \mp\infty, \quad i = 0,1,\ldots \end{gathered} \tag{27}$$

Задачи для функций с верхним индексом "(–)" решаются на полупрямых $\xi \le 0$ и $\sigma \le 0$, а для функций с верхним индексом "(+)" – на полупрямых $\xi \ge 0$ и $\sigma \ge 0$.

2.2.1. Функции переходного слоя нулевого порядка. Описанным выше способом для функций $M_0^{(\mp)}v(\sigma)$ и $M_1^{(\mp)}v(\sigma)$ получаются однородные уравнения с однородными краевыми условиями и условиями стремления к нулю на бесконечности. Отсюда следует, что эти функции тривиальные:

$$M_i^{(\mp)}v \equiv 0, \quad i = 0,1. \tag{28}$$

Введем обозначения

$$\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) := \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x_0), x_0) + Q_0^{(\mp)}u(\tau), \quad \tilde{v}^{(\mp)}(\tau) := \psi^{(\mp)}(x_0) + Q_0^{(\mp)}v(\tau). \tag{29}$$

Из первой пары равенств (25) в нулевом порядке с учетом введенных обозначений получаем уравнение $f^{(\mp)}(\tilde{u}^{(\mp)}(\tau), \tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0, 0) = 0$, из которого с учетом условия 1 следует выражение

$$\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) = \varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0). \tag{30}$$

Выделяя слагаемые нулевого порядка во второй паре равенств (25), условии непрерывности (20) и условии убывания на бесконечности (27), с учетом обозначений (29) и выражений (30), получаем задачи для функций $\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)$:

$$\frac{d^2\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)}{d\tau^2} = h^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0), \quad \tilde{v}^{(\mp)}(0) = q_0, \quad \tilde{v}^{(\mp)}(\mp\infty) = \psi^{(\mp)}(x_0). \tag{31}$$

Уравнения (31) совпадают с присоединенными уравнениями (5). При выполнении условия 4 решения задач (31) существуют (см. разд. 1) и для них при достаточно больших $|\tau|$ справедливы следующие экспоненциальные оценки (см. [16], [17]):

$$\begin{gathered} \tilde{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} + \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right) \le \left|\tilde{v}^{(\mp)}(\tau) - \psi^{(\mp)}(x_0)\right| \le \overline{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right), \\ \tilde{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} + \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right) \le \left|\tilde{u}^{(\mp)}(\tau) - \varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x_0), x_0)\right| \le \overline{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right), \end{gathered} \tag{32}$$

где $\tilde{C}, \overline{C}$, $\omega^{(\mp)}$ – положительные константы, последние соответственно из интервалов $0 < \omega^{(\mp)} < \sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)}$.

Введем обозначения

$$\hat{u}^{(\mp)}(\sigma) := \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0) + M_0^{(\mp)}u(\sigma). \tag{33}$$

С использованием этих обозначений из первой пары равенств (26) с учетом (28), а также условий (19) и (27) в нулевом порядке получаем задачи для функций $\hat{u}^{(\mp)}(\sigma)$:

$$\frac{d^2\hat{u}^{(\mp)}(\sigma)}{d\sigma^2} = f^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0, x_0, 0), \quad \hat{u}^{(\mp)}(0) = p_0, \quad \hat{u}^{(\mp)}(\mp\infty) = \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0).$$

Эти задачи разрешимы, как и задачи (31), и их решения имеют экспоненциальные оценки (см. [16]):

$$\left|\hat{u}^{(\mp)}(\sigma) - \varphi^{(\mp)}(q_0, x_0)\right| \le C_0 e^{-K_0|\sigma|},$$

где C_0, K_0 – положительные константы.

Далее для краткости будем использовать обозначения

$$\overline{h}^{(\mp)}(x) := h^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\psi^{(\mp)}(x), x), x, 0), \quad \tilde{h}^{(\mp)}(\tau) := h^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0),$$

$$\begin{gathered}\tilde{f}^{(\mp)}(\tau) := f^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau),\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),x_0,0),\\ \tilde{g}^{(\mp)}(\tau) := g^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau),\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),x_0,0),\\ \hat{f}^{(\mp)}(\sigma) := f^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0,x_0,0), \quad \hat{g}^{(\mp)}(\sigma) := g^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0,x_0,0).\end{gathered} \tag{34}$$

В аналогичном смысле дальше будем понимать и обозначения для производных этих функций.

2.2.2. Функции переходного слоя первого порядка. Обозначим

$$\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)) := \frac{d\tilde{v}^{(\mp)}}{d\tau}, \quad \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0) := \frac{d\hat{u}^{(\mp)}}{d\sigma} \tag{35}$$

(см. (7)).

Из разложения первого порядка первой пары равенства (25) получаем следующие выражения, связывающее функции $Q_1^{(\mp)}u(\tau)$ и $Q_1^{(\mp)}v(\tau)$:

$$0 = \tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)Q_1^{(\mp)}u(\tau) + \tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)Q_1^{(\mp)}v(\tau) + Q_1^{(\mp)}\tilde{f}(\tau), \tag{36}$$

где $Q_1^{(\mp)}\tilde{f}(\tau)$ – известная функция.

С учетом этого выражения из второй пары равенств (25), а также условий (20) и (27) получаем задачи для функций $Q_1^{(\mp)}v(\tau)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^2Q_1^{(\mp)}v}{d\tau^2} = \tilde{h}_v^{(\mp)}(\tau)Q_1^{(\mp)}v(\tau) + Q_1^{(\mp)}\tilde{g}(\tau),\\ Q_1^{(\mp)}v(0) = q_1 - \overline{v}_1^{(\mp)}(x_0), \quad Q_1^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0.\end{gathered} \tag{37}$$

Здесь были использованы обозначения (34). Функции $Q_1^{(\mp)}\tilde{g}(\tau)$ известны.

Решения этих задач выписываются явно:

$$Q_1^{(\mp)}v(\tau) = (q_1 - \overline{v}_1^{(\mp)}(x_0))\frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi^{(\mp)}(q_0)} + \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))\int_0^\tau \frac{d\tau_1}{[\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))]^2}\int_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2))Q^{(\mp)}\tilde{g}(\tau_2)d\tau_2. \tag{38}$$

Из первой пары равенств (26) и условий (19) и (27) получаем задачи для функций $M_1^{(\mp)}u(\sigma)$:

$$\begin{gathered}\frac{d^2M_1^{(\mp)}u}{d\sigma^2} = \hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma)M_1^{(\mp)}u(\sigma) + M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma),\\ M_1^{(\mp)}u(0) = p_1 - \overline{u}_1^{(\mp)}(x_0) - Q_1^{(\mp)}u(0), \quad M_1^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0,\end{gathered} \tag{39}$$

где функции $M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma)$ известны. Здесь также были использованы обозначения (34).

Решения этих задач выписываются явно:

$$\begin{gathered}M_1^{(\mp)}u(\sigma) = (p_1 - \overline{u}_1^{(\mp)}(x_0) - Q_1^{(\mp)}u(0))\frac{\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0)}{\Psi^{(\mp)}(p_0,q_0)} + \\ + \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma),q_0)\int_0^\sigma \frac{d\sigma_1}{[\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_1),q_0)]^2}\int_{\mp\infty}^{\sigma_1}\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_2),q_0)M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma_2)d\sigma_2.\end{gathered} \tag{40}$$

Функции $Q_1^{(\mp)}\tilde{f}(\tau)$, $Q_1^{(\mp)}\tilde{g}(\tau)$ и $M_1^{(\mp)}\hat{f}(\sigma)$ в (36), (37) и (39) экспоненциально убывают соответственно при $\tau \to \mp\infty$, и $\sigma \to \mp\infty$. Согласно [17], справедливы следующие экспоненциальные оценки:

$$\left|Q_1^{(\mp)}u(\tau)\right| \le \tilde{C}_1 e^{-\kappa_1|\tau|}, \quad \left|Q_1^{(\mp)}v(\tau)\right| \le \tilde{C}_1 e^{-\kappa_1|\tau|}, \quad \left|M_1^{(\mp)}u(\sigma)\right| \le \hat{C}_1 e^{-K_1|\sigma|}, \tag{41}$$

где $\tilde{C}_1$, κ_1, $\hat{C}_1$, K_1 – положительные константы.

2.2.3. Функции переходного слоя высших порядков. В настоящей работе в ходе использования асимптотического метода дифференциальных неравенств нам понадобятся еще функции $M_2^{(\mp)}v(\sigma)$ и $M_3^{(\mp)}v(\sigma)$. Функции с верхним индексом “(–)” определены на полупрямой $\sigma \le 0$, а с верхним индексом “(+)” – на полупрямой $\sigma \geq 0$. Эти функции суть убывающие к нулю соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ вместе с первыми производными решения уравнений

$$\frac{d^2 M_2^{(\mp)} v}{d\sigma^2} = M_0^{(\mp)} \hat{g}(\sigma), \quad \frac{d^2 M_3^{(\mp)} v}{d\sigma^2} = M_1^{(\mp)} \hat{g}(\sigma),$$

где $M_{0,1}^{(\mp)} \hat{g}(\sigma)$ – известные экспоненциально убывающие функции.

Для функций $M_{2,3}^{(\mp)} v(\sigma)$ справедливы экспоненциальные оценки такого же вида, как (41) для $M_1^{(\mp)} u(\sigma)$.

2.3. Сшивание производных асимптотического представления

Подставляя в условия сшивания (21) представления (14)–(18), придем к равенствам

$$\begin{gathered}\left.\left(\frac{dM_0^{(-)}u}{d\sigma} - \frac{dM_0^{(+)}u}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0} + \varepsilon\left[\left.\left(\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau} - \frac{dQ_0^{(+)}u}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + \left.\left(\frac{dM_1^{(-)}u}{d\sigma} - \frac{dM_1^{(+)}u}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0}\right] + O(\varepsilon^2) = 0, \\ \left.\left(\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau} - \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + \varepsilon\left[\left.\left(\frac{dQ_1^{(-)}v}{d\tau} - \frac{dQ_1^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + \right. \\ \left. + \left.\left(\frac{dM_2^{(-)}v}{d\sigma} - \frac{dM_2^{(+)}v}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0} + \left.\left(\frac{d\psi^{(-)}}{dx} - \frac{d\psi^{(+)}}{dx}\right)\right|_{x=x_0}\right] + O(\varepsilon^2) = 0.\end{gathered} \tag{42}$$

Приравнивая в этих равенствах слагаемые порядка ε^0 с учетом обозначений (29), (33) и (35), получаем систему уравнений $H^v(q_0) = 0$, $H^u(p_0, q_0) = 0$, где функции H^v и H^u задаются выражениями (10).

Согласно условию 5, эта система разрешима.

Обозначим

$$\Phi(q_0) := \Phi^{(-)}(q_0) = \Phi^{(+)}(q_0), \quad \Psi(p_0, q_0) := \Psi^{(-)}(p_0, q_0) = \Psi^{(+)}(p_0, q_0). \tag{43}$$

В первом порядке с учетом явных выражений (38) для $Q_1^{(\mp)} v$ и (40) для $M_1^{(\mp)} u$, вида (10) функций H^v и H^u, а также вида (8), (9) функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v})$, $\Psi^{(\mp)}(\hat{u}, v)$, получаем систему уравнений для определения коэффициентов p_1 и q_1,входящих в правые части равенств (19) и (20):

$$\frac{dH^v}{dv}(q_0) \cdot q_1 = H_1^v(p_0, q_0), \quad \frac{\partial H^u}{\partial u}(p_0, q_0) \cdot p_1 = H_1^u(p_0, q_0),$$

где $H_1^v(p_0, q_0)$, $H_1^u(p_0, q_0)$ известны. Эта система разрешима в силу условия 5.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1–6. *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *существует решение* $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ *задачи* (4) *в смысле определения* 2, *для которого пара функций* $(U_1(x,\varepsilon), V_1(x,\varepsilon))$ *является равномерным на отрезке* $x \in [0,1]$ *асимптотическим приближением с точностью* $O(\varepsilon^2)$, *т.е.*

$$|U_1(x,\varepsilon) - u_\varepsilon(x)| + |V_1(x,\varepsilon) - v_\varepsilon(x)| \leq C\varepsilon^2, \quad x \in [0,1], \tag{44}$$

где C *– не зависящая от* ε *положительная константа.*

Доказательство этой теоремы проведем по аналогии с [5] с небольшими изменениями, касающимися наличия разрыва I рода правых частей задачи (4) при $x = x_0$.

3.1. Существование решения в общем случае

Обозначим

$$L_{u,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^4 \frac{d^2u}{dx^2} - f(u,v,x,\varepsilon), \quad L_{v,\varepsilon}(u,v) := \varepsilon^2 \frac{d^2v}{dx^2} - g(u,v,x,\varepsilon).$$

Определим верхнее и нижнее решения задачи (4) следующим образом.

Определение 3. Пары функций $(\overline{U}(x),\overline{V}(x))$ и $(\underline{U}(x),\underline{V}(x))$ из класса $C([0,1]) \cap C^1([0,1]\backslash x_0) \cap$ $\cap\, C^2((0,1)\backslash x_0)$ называются соответственно *верхним и нижним решениями задачи* (4), если для них выполняются следующие неравенства:

(A_1). $\underline{U}(x) \le \overline{U}(x)$, $\underline{V}(x) \le \overline{V}(x)$, $x \in [0,1]$;

(A_2). $L_{u,\varepsilon}(\overline{U},v) \le 0 \le L_{u,\varepsilon}(\underline{U},v)$, $\underline{V} \le v \le \overline{V}$, $x \in (0,1)\backslash x_0$, $L_{v,\varepsilon}(u,\overline{V}) \le 0 \le L_{v,\varepsilon}(u,\underline{V})$, $\underline{U} \le u \le \overline{U}$, $x \in (0,1)\backslash x_0$;

(A_3). $\overline{U}_x(0) \le 0 \le \underline{U}_x(0)$, $\overline{U}_x(1) \ge 0 \ge \underline{U}_x(1)$, $\overline{V}_x(0) \le 0 \le \underline{V}_x(0)$, $\overline{V}_x(1) \ge 0 \ge \underline{V}_x(1)$;

(A_4). $\overline{U}_x(x_0-0) - \overline{U}_x(x_0+0) \ge 0$, $\underline{U}_x(x_0-0) - \underline{U}_x(x_0+0) \le 0$, $\overline{V}_x(x_0-0) - \overline{V}_x(x_0+0) \ge 0$, $\underline{V}_x(x_0-0) - \underline{V}_x(x_0+0) \le 0$.

Отличие приведенного здесь определения верхнего и нижнего решений отличается от аналогичного определения из [5] наличием точки x_0, в которой у этих функций происходит скачок производной.

Доказательство теоремы сравнения в [5] основано на классическом принципе максимума. Приведем здесь аналогичное утверждение на случай функций, не гладких в одной точке.

Лемма 1. *Пусть* $w(x) \in C[0,1] \cap C^1([0,1]\backslash x_0) \cap C^2((0,1)\backslash x_0)$ *и для некоторой непрерывной функции* $c(x) > 0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$-w''(x) + c(x)w(x) \ge 0, \quad x \in (0,1)\backslash x_0, \quad w'(0) \le 0 \le w'(1), \tag{45}$$

$$w'(x_0-0) \ge w'(x_0+0). \tag{46}$$

Тогда $w(x) \ge 0$, $x \in [0,1]$.

Доказательство. Для функций из класса C^1 данное утверждение доказано в [18].

Справедливость утверждения леммы в случае строгого знака неравенства в условии (46) вытекает из следующих соображений. В силу неравенства (45) функция $w(x)$ не может быть отрицательной константой. Предположим, что она достигает отрицательного минимума на отрезке $[0,1]$. Согласно [5], [18], минимум функции $w(x)$ не может достигаться на краях отрезка или в точках, где эта функция гладкая.

Если минимум функции $w(x)$ достигается в точке x_0, то выполняются неравенства $w'(x_0-0) \le 0 \le w'(x_0+0)$, причем мы рассматриваем случай, когда хотя бы одно из этих неравенств строгое. Но в таком случае это противоречит неравенству $w'(x_0-0) > w'(x_0+0)$.

Итак, функция $w(x)$ не может достигать отрицательного минимума на отрезке $[0,1]$, откуда следует утверждение леммы.

Докажем теперь существование хотя бы одного решения задачи (4), заключенного между верхним и нижним решениями.

Лемма 2. *Пусть существуют пары функций* $(\overline{U},\overline{V})$ *и* $(\underline{U},\underline{V})$, *являющиеся соответственно верхним и нижним решениями в смысле определения* 3. *Тогда существует хотя бы одно решение* $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ *задачи* (4) *в смысле определения* 2, *причем*

$$\underline{U}(x) \le u_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x), \quad \underline{V}(x) \le v_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x), \quad x \in [0,1]. \tag{47}$$

Доказательство. Следуя [5], зададим итерационные процессы как

$$\varepsilon^4 \frac{d^2\overline{u}^{(k)}}{dx^2} - c\overline{u}^{(k)} = \mathcal{F}_1(\overline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\overline{u}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\overline{u}^{(k)}}{dx}(1) = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^2 \frac{d^2\overline{v}^{(k)}}{dx^2} - c\overline{v}^{(k)} = \mathcal{F}_2(\overline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\overline{v}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\overline{v}^{(k)}}{dx}(1) = 0;\\
&\varepsilon^4 \frac{d^2\underline{u}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{u}^{(k)} = \mathcal{F}_1(\underline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\underline{u}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\underline{u}^{(k)}}{dx}(1) = 0,\\
&\varepsilon^2 \frac{d^2\underline{v}^{(k)}}{dx^2} - c\underline{v}^{(k)} = \mathcal{F}_2(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x), \quad x \in ((0,1)\backslash x_0), \quad \frac{d\underline{v}^{(k)}}{dx}(0) = \frac{d\underline{v}^{(k)}}{dx}(1) = 0,
\end{aligned} \tag{48}
$$

где $k = 1, 2, \ldots$, c – достаточно большая положительная константа,

$$
\mathcal{F}_1(u, v, x) := f(u, v, x, \varepsilon) - cu, \quad \mathcal{F}_2(u, v, x) := g(u, v, x, \varepsilon) - cv,
$$

и полагаем $(\overline{u}^{(0)}, \overline{v}^{(0)}) = (\overline{U}, \overline{V})$, а $(\underline{u}^{(0)}, \underline{v}^{(0)}) = (\underline{U}, \underline{V})$.

Согласно [19], каждая из задач (48) имеет единственное решение из класса $C^1([0,1]) \cap C^2((0,1)\backslash x_0)$.

Поскольку функции $\overline{u}^{(0)}$, $\overline{v}^{(0)}$, $\underline{u}^{(0)}$, $\underline{v}^{(0)}$ являются кусочно-гладкими и удовлетворяют неравенствам (A_4), то повторяя соответствующее доказательство из [5] с использованием леммы 1, получим, что функции $\overline{u}^{(k)}$, $\overline{v}^{(k)}$, $\underline{u}^{(k)}$, $\underline{v}^{(k)}$, где $k = 0, 1, \ldots$, образуют монотонные ограниченные последовательности верхних и нижних решений, для которых справедливы цепочки неравенств

$$
\begin{aligned}
&\underline{U} = \underline{u}^{(0)} \le \underline{u}^{(1)} \le \ldots \le \underline{u}^{(k)} \le \ldots \le \overline{u}^{(k)} \le \overline{u}^{(k-1)} \le \ldots \le \overline{u}^{(0)} = \overline{U},\\
&\underline{V} = \underline{v}^{(0)} \le \underline{v}^{(1)} \le \ldots \le \underline{v}^{(k)} \le \ldots \le \overline{v}^{(k)} \le \overline{v}^{(k-1)} \le \ldots \le \overline{v}^{(0)} = \overline{V}.
\end{aligned} \tag{49}
$$

Пусть $G_1(x, s)$, $G_2(x, s)$ – функции Грина задач (48) соответственно для u- и v-компонент, тогда их решения можно записать в виде (см. [19])

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_1(x, s)\mathcal{F}_1(\overline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, s)ds, \quad \underline{u}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_1(x, s)\mathcal{F}_1(\underline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, s)ds,\\
&\overline{v}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_2(x, s)\mathcal{F}_2(\overline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, s)ds, \quad \underline{v}^{(k)}(x) = \int_0^1 G_2(x, s)\mathcal{F}_2(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, s)ds.
\end{aligned} \tag{50}
$$

Из неравенств (49) следует существование пределов $\overline{u}(x)$, $\overline{v}(x)$, $\underline{u}(x)$, $\underline{v}(x)$ каждой из последовательностей, а следовательно, пределов правых частей равенств (50). Из последнего вытекает ограниченность интегралов в правых частях (50).

Из условия 3 и непрерывности функций $\mathcal{F}_{1,2}$ по первым двум аргументам можно установить, как и в [5], что последовательности $\mathcal{F}_1(\overline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x)$, $\mathcal{F}_2(\overline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x)$ не убывают, а $\mathcal{F}_1(\underline{u}^{(k-1)}, \overline{v}^{(k-1)}, x)$, $\mathcal{F}_2(\underline{u}^{(k-1)}, \underline{v}^{(k-1)}, x)$ не возрастают.

Тем самым, для равенств (50) выполнены все условия теоремы Леви, что влечет за собой непрерывность функций $\overline{u}(x)$, $\overline{v}(x)$, $\underline{u}(x)$, $\underline{v}(x)$ и справедливость при $k \to +\infty$ предельных равенств

$$
\begin{aligned}
&\overline{u}(x) = \int_0^1 G_1(x, s)\mathcal{F}_1(\overline{u}, \underline{v}, s)ds, \quad \overline{v}(x) = \int_0^1 G_2(x, s)\mathcal{F}_2(\overline{u}, \overline{v}, s)ds,\\
&\underline{u}(x) = \int_0^1 G_1(x, s)\mathcal{F}_1(\underline{u}, \overline{v}, s)ds, \quad \underline{v}(x) = \int_0^1 G_2(x, s)\mathcal{F}_2(\underline{u}, \underline{v}, s)ds.
\end{aligned} \tag{51}
$$

Правые части равенств (51) обращают уравнения (4) в тождества при $x \in (0,1)\backslash x_0$, поскольку гладкость функций $\mathcal{F}_1(\overline{u}(x), \underline{v}(x), x)$, $\mathcal{F}_1(\underline{u}(x), \overline{v}(x), x)$, $\mathcal{F}_2(\overline{u}(x), \overline{v}(x), x)$ и $\mathcal{F}_2(\underline{u}(x), \underline{v}(x), x)$ нарушается в единственной точке x_0. Равенство $\overline{u}_x(x_0 - 0) = \overline{u}_x(x_0 + 0)$ и аналогичные равенства для функций $\underline{u}(x)$, $\overline{v}(x)$, $\underline{v}(x)$ следуют из равенств (51) непосредственно.

Исходя из этого, а также свойств функций Грина $G_{1,2}(x,s)$, можно заключить, что $(\overline{u}(x),\overline{v}(x))$ и $(\underline{u}(x),\underline{v}(x))$ являются решениями задачи (4) в смысле определения 2, тем самым у задачи (4) существует, по крайней мере, одно решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ в интервале

$$\underline{U}(x) \le u_\varepsilon(x) \le \overline{U}(x), \quad \underline{V}(x) \le v_\varepsilon(x) \le \overline{V}(x).$$

Лемма 2 доказана.

3.2. Обоснование асимптотики

Согласно асимптотическому методу дифференциальных неравенств из [3], [4], будем строить верхнее и нижнее решения задачи (4) отдельно слева и справа от точки x_0 в таком же виде, как и асимптотическое приближение (13):

$$\overline{U}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \overline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \quad \overline{V}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \overline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \overline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \tag{52}$$

$$\underline{U}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \underline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1, \end{cases} \quad \underline{V}(x,\varepsilon) = \begin{cases} \underline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & 0 \le x \le x_0, \\ \underline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & x_0 < x \le 1. \end{cases} \tag{53}$$

Функции $\overline{U}^{(\mp)}$, $\underline{U}^{(\mp)}$, $\overline{V}^{(\mp)}$, $\underline{V}^{(\mp)}$ являются модификациями функций $U^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $V^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ (см. (14), (15)):

$$\begin{aligned} \overline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)) + \varepsilon^2\Pi_u^{(\mp)}(x,\varepsilon), \\ \underline{U}^{(\mp)} &= U^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon(\alpha^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}u(\tau) + m^{(\mp)}u(\sigma)) - \varepsilon^2\Pi_u^{(\mp)}(x,\varepsilon), \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned} \overline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)) + \varepsilon^2\Pi_v^{(\mp)}(x,\varepsilon) + \varepsilon^3 m_3^{(\mp)}v(\sigma) - \\ &\quad - \varepsilon^2 M_2^{(\mp)}v(0) - \varepsilon^3(M_3^{(\mp)}v(0) + m_3^{(\mp)}v(0)), \\ \underline{V}^{(\mp)} &= V^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon(\beta^{(\mp)}(x) + q^{(\mp)}v(\tau)) - \varepsilon^2\Pi_v^{(\mp)}(x,\varepsilon) - \varepsilon^3 m_3^{(\mp)}v(\sigma) - \\ &\quad - \varepsilon^2 M_2^{(\mp)}v(0) - \varepsilon^3(M_3^{(\mp)}v(0) - m_3^{(\mp)}v(0)). \end{aligned} \tag{55}$$

Введенные здесь функции, $\Pi_u^{(\mp)}$ и $\Pi_v^{(\mp)}$, обеспечивают выполнение неравенства (A_3) и строятся аналогично [4], [14], [15]; слагаемые $-\varepsilon^i M_i^{(\mp)}v(0)$, $i = 2,3$, а также слагаемые, содержащие $m_3^{(\mp)}v(0)$, обеспечивают непрерывность верхнего и нижнего решений.

Функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ определим как решения систем уравнений

$$\overline{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}(x) - \overline{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}(x) = A, \quad \overline{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)}(x) + \overline{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)}(x) = B, \tag{56}$$

при $x \in [0,x_0]$ для функций с верхним индексом “(–)” и при $x \in [x_0,1]$ для функций с верхним индексом “(+)” с положительными константами A и B. Здесь использованы обозначения (24). В силу условий 1–3, 6 эти системы однозначно разрешимы:

$$\alpha^{(\mp)}(x) = \frac{\overline{g}_v^{(\mp)}(x)A + \overline{f}_v^{(\mp)}(x)B}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)\overline{\nu}^{(\mp)}(x)}, \quad \beta^{(\mp)}(x) = \frac{-\overline{g}_u^{(\mp)}(x)A + \overline{f}_u^{(\mp)}(x)B}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)\overline{\nu}^{(\mp)}(x)}. \tag{57}$$

Покажем, что функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$ принимают строго положительные значения, для этого учтем, что

$$\overline{\nu}^{(\mp)}(x) = \overline{g}_v^{(\mp)}(x) + \frac{\overline{f}_v^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{g}_u^{(\mp)}(x) > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\overline{f}_v^{(\mp)}(x)}{\overline{f}_u^{(\mp)}(x)}\overline{g}_u^{(\mp)}(x) < 0.$$

Из этих неравенств следует, что $\overline{g}_v^{(\mp)}(x) > 0$, и в свою очередь из (57), что функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ принимают положительные значения при положительных A и B.

Функции $q^{(-)}u(\tau)$, $q^{(-)}v(\tau)$, определенные при $\tau \le 0$ и $q^{(+)}u(\tau)$, $q^{(+)}v(\tau)$, определенные при $\tau \ge 0$ зададим как решения следующих систем уравнений:

$$\begin{gathered}\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)q^{(\mp)}u(\tau) - \tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)q^{(\mp)}v(\tau) + \\ + \left[\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\alpha^{(\mp)}(x_0) - \left(\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x_0)\right)\beta^{(\mp)}(x_0) - d^u e^{-k^u|\tau|}\right] = 0,\end{gathered} \tag{58}$$

$$\frac{d^2 q^{(\mp)}v(\tau)}{d\tau^2} = \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)q^{(\mp)}v(\tau) + \tilde{G}^{(\mp)}(\tau), \quad q^{(\mp)}v(0) = \delta^v - \beta^{(\mp)}(x_0), \quad q^{(\mp)}v(\mp\infty) = 0. \tag{59}$$

Здесь использовано обозначение $\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) := \nu^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau), x_0)$, где функции $\nu^{(\mp)}(v, x)$ определены выражениями (11);

$$\begin{gathered}\tilde{G}^{(\mp)}(\tau) := \left[\left(\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau) - \bar{g}_u^{(\mp)}(x_0)\right) - \frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)}\left(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_u^{(\mp)}(x_0)\right)\right]\alpha^{(\mp)}(x_0) + \\ + \left[\left(\tilde{g}_v^{(\mp)}(\tau) - \bar{g}_v^{(\mp)}(x_0)\right) + \frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)}\left(\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x_0)\right)\right]\beta^{(\mp)}(x_0) + \frac{\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)}{\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau)} d^u e^{-k^u|\tau|};\end{gathered} \tag{60}$$

положительные константы d^u, k^u, δ^v будут выбраны ниже.

Прежде, чем выписать явные выражения для решений задач (59), необходимо исследовать решения однородных уравнений

$$W_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)W^{(\mp)}(\tau) = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}. \tag{61}$$

Функции $\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)$ непрерывны и ограничены соответственно на полупрямых $\tau \le 0$ и $\tau \ge 0$, также имеют место предельные соотношения $\lim_{\tau\to\mp\infty} \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) = \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0) > 0$ (см. обозначение (12) и условие 6). Согласно [20]–[22], при $\tau \le 0$ существует функция $W^{(-)}(\tau)$, являющаяся решением уравнения (61), в которое входят функции с верхним индексом “(–)”, а при $\tau \ge 0$ существует функция $W^{(+)}(\tau)$, являющаяся решением уравнения (61), в которое входят функции с верхним индексом “(+)”, и при достаточно больших $|\tau|$ справедливы оценки

$$\left|W^{(-)}(\tau)\right| \le C_1 e^{(\sqrt{\bar{\nu}^{(-)}(x_0)} - \sigma^{(-)})\tau}, \quad \tau < 0, \quad \left|W^{(+)}(\tau)\right| \le C_2 e^{-(\sqrt{\bar{\nu}^{(+)}(x_0)} - \sigma^{(+)})\tau}, \quad \tau > 0, \tag{62}$$

где $\sigma^{(\mp)}$ – константы соответственно из интервалов $0 < \sigma^{(\mp)} < \sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}$.

Каждую из этих функций можно однозначно определить как решение соответствующей краевой задачи:

$$W_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)W^{(\mp)}(\tau) = 0, \quad \tau \in R^{\mp}, \quad W^{(\mp)}(0) = 1, \quad W^{(\mp)}(\mp\infty) = +0. \tag{63}$$

Докажем две леммы относительно функций $W^{(\mp)}(\tau)$.

Лемма 3. *Если* $\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0) > 0$ (*см. условие* 6), *то для решений* $W^{(\mp)}(\tau)$ *задач* (63) *справедливы оценки*

$$\tilde{C}_1 \exp\left(-\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}|\tau|\right) \le W^{(\mp)}(\tau) \le \bar{C}_1 \exp\left(-\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}|\tau|\right) + \bar{C}_2 \exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right), \tag{64}$$

где $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\omega^{(\mp)}$ – *положительные константы, последние соответственно из интервалов* $0 < \omega^{(\mp)} < \sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)}$.

Доказательство. Сведем уравнения (63) к эквивалентным интегральным уравнениям

$$W^{(\mp)} = e^{\pm\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau} + e^{\pm\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau}\int_0^{\tau} e^{\mp 2\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau_1}\int_{\mp\infty}^{\tau_1} e^{\pm\sqrt{\bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)}\tau_2}(\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_2) - \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0))W^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2.$$

Утверждение леммы следует из этих уравнений, оценок (62) и

$$\left|\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) - \bar{\nu}^{(\mp)}(x_0)\right| \le \bar{C}\exp\left(-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right),$$

где $C > 0$, а $\omega^{(\mp)}$ – те же, что в (64), справедливы при достаточно больших $|\tau|$ в силу формулы Лагранжа, обозначений (11), (12) и оценок (32).

Лемма 4. *Пусть функции* $\nu^{(\mp)}(v,x)$ *удовлетворяют условию* 6. *Тогда решения* $W^{(\mp)}(\tau)$ *задач* (63) *строго положительны и выполняются неравенства*

$$\frac{dW^{(-)}}{d\tau}(0) > 0, \quad \frac{dW^{(+)}}{d\tau}(0) < 0. \tag{65}$$

Доказательство. Используем метод верхних и нижних решений из [5].

Введем функции

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) := \frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi(q_0)}, \quad \overline{W}^{(\mp)}(\tau) := \exp(Z^{(\mp)}(\tau)), \tag{66}$$

где

$$Z^{(\mp)}(\tau) = \int_0^{\tau} \frac{d\tau_1}{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))} \int_{\mp\infty}^{\tau_1} \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2))\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2.$$

В первом равенстве (66) использовано обозначение (43).

Докажем, что функции $\underline{W}^{(\mp)}(\tau)$ и $\overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ являются соответственно парами верхних и нижних решений задач (63).

В ходе доказательства будем использовать соотношения

$$\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau) = \tilde{h}_v^{(\mp)}(\tau) - 2\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}, \tag{67}$$

где учтено равенство $\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau) = -\tilde{f}_v^{(\mp)}(\tau)(\tilde{f}_u^{(\mp)}(\tau))^{-1}$, вытекающее из условия 1 и использованы обозначения (34).

Из условий 1, 3 и соотношения (67) следуют неравенства

$$\tilde{g}_u^{(\mp)}(\tau)\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau) > 0, \quad \overline{\nu}^{(\mp)}(x_0) < \overline{h}_v^{(\mp)}(x_0). \tag{68}$$

Перепишем функции $Z^{(\mp)}(\tau)$ в виде

$$\begin{aligned} Z^{(-)}(\tau) &= \int_{q_0}^{\tilde{v}^{(-)}(\tau)} \frac{ds_1}{(\Phi^{(-)}(s_1))^2} \int_{\psi^{(-)}(x_0)}^{s_1} \nu^{(-)}(s_2,x_0)ds_2, \quad \tau \le 0, \\ Z^{(+)}(\tau) &= \int_{q_0}^{\tilde{v}^{(+)}(\tau)} \frac{ds_1}{(\Phi^{(+)}(s_1))^2} \int_{\psi^{(+)}(x_0)}^{s_1} \nu^{(+)}(s_2,x_0)ds_2, \quad \tau \ge 0. \end{aligned} \tag{69}$$

Из условия 6 следует, что функции $Z^{(\mp)}(\tau)$ принимают неположительные значения соответственно при $\tau \le 0$ и $\tau \ge 0$.

Оценим поведение функций $\underline{W}^{(\mp)}(\tau)$ и $\overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ при больших значениях $|\tau|$. Будем считать, что τ_0 достаточно большое, чтобы для всех $|\tau| > \tau_0$ выполнялись оценки (см. [20]–[22]):

$$\begin{aligned} \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)) &\le C\exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau|\right), \\ \Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2)))^{-1} &\le \exp\left(-\left(\sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}\right)|\tau_1 - \tau_2|\right), \end{aligned} \tag{70}$$

при $C > 0$, и

$$0 < \omega^{(\mp)} < \sqrt{\overline{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \sqrt{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}. \tag{71}$$

Выбор таких величин $\omega^{(\mp)}$ возможен в силу неравенств (32) (подробнее см. [10], [17]) и второй пары неравенств (68).

Используя эти оценки, получаем неравенства

$$\left|\int\limits_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau_1}{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_1))}\int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau_2))\tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2\right| \le C_0 + \frac{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}{\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}}|\tau|.$$

Обозначим

$$\nu_0 := \frac{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}{\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)} - \omega^{(\mp)}}.$$

Если величины $\omega^{(\mp)}$ принадлежат интервалу (71), то выполняются неравенства $0 < \nu_0 < \sqrt{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}$, поэтому при $|\tau| > \tau_0$

$$\overline{W}^{(\mp)}(\tau) \ge Ce^{-\nu_0|\tau|} > Ce^{-\sqrt{\overline{\nu}^{(\mp)}(x_0)}|\tau|} > Ce^{-\left(\sqrt{\bar{h}_v^{(\mp)}(x_0)}-\omega^{(\mp)}\right)|\tau|}, \quad C > 0. \tag{72}$$

Из полученных оценок (64), (72), а также первой пары оценок (70) следует, что при достаточно больших $|\tau|$ выполняются неравенства

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le W^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau).$$

Очевидно, что

$$\underline{W}^{(\mp)}(0) = W^{(\mp)}(0) = \overline{W}^{(\mp)}(0) = 1. \tag{73}$$

Согласно определению верхних и нижних решений задач (63), требуется еще доказать, что выполняются неравенства (см. [5])

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}, \tag{74}$$

$$\overline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\overline{W}^{(\mp)}(\tau) \le 0 \le \underline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\underline{W}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}^{\mp}. \tag{75}$$

Подставив соотношения (67) в соответствующие выражения (69) и учитывая второе равенство (7), придем к представлению

$$\overline{W}^{(\mp)}(\tau) = \frac{\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))}{\Phi(q_0)}\exp\left(-2\int\limits_{q_0}^{\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)}\frac{ds_1}{\left(\Phi^{(\mp)}(s_1)\right)^2}\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{s_1}\tilde{g}_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(s_2,x_0),s_2,x_0,0)\varphi_v^{(\mp)}(s_2,x_0)ds_2\right).$$

В силу положительности $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))$ и первого неравенства (68) в показателе экспоненты стоит положительная величина, откуда следует справедливость неравенства (74) при $\tau < 0$ для функций с верхним индексом “(–)” и при $\tau > 0$ для функций с верхним индексом “(+)”.

Подставляя функции $\overline{W}^{(\mp)}$ и $\underline{W}^{(\mp)}$ в левые части уравнений (63), получаем

$$\overline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\overline{W}^{(\mp)}(\tau) = -2\frac{\exp(Z^{(\mp)}(\tau))}{(\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)))^2}\times$$
$$\times\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}^{(\mp)}(\tau)}\tilde{\nu}^{(\mp)}(s)ds\int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{\tilde{v}(\tau)}g_u^{(\mp)}(\varphi^{(\mp)}(s_2,x_0),s_2,x_0,0)\varphi_v^{(\mp)}(s_2,x_0)ds_2, \tag{76}$$

$$\underline{W}_{\tau\tau}^{(\mp)} - \tilde{\nu}^{(\mp)}(\tau)\underline{W}^{(\mp)}(\tau) = 2\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))g_u^{(\mp)}(\tau)\varphi_v^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau),\tau). \tag{77}$$

В силу условия 6, первого неравенства (68) и положительности функций $\Phi^{(\mp)}(\tilde{v}^{(\mp)}(\tau))$ правые части равенств (76) неположительны, а равенств (77) – неотрицательны, следовательно, неравенства (75) выполняются.

Итак, функции $\overline{W}^{(\mp)}$ и $\underline{W}^{(\mp)}$ являются соответственно верхними и нижними решениям задач (63), поэтому для решений этих задач справедливы неравенства (см. [5])

$$\underline{W}^{(\mp)}(\tau) \le W^{(\mp)}(\tau) \le \overline{W}^{(\mp)}(\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}. \tag{78}$$

Заметим, что функции $\underline{W}^{(\mp)}(\tau)$ и $\overline{W}^{(\mp)}(\tau)$ принимают строго положительные значения соответственно при $\tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}$, поэтому функции $W^{(\mp)}(\tau)$ строго положительны.

Выпишем выражения для производных $\overline{W}_{\tau}^{(\mp)}(0)$:

$$\overline{W}_{\tau}^{(\mp)}(0) = \frac{1}{\Phi(q_0)} \int\limits_{\psi^{(\mp)}(x_0)}^{q_0} \tilde{v}^{(\mp)}(s)ds.$$

Здесь использовано обозначение (43). В силу условия 6 справедливы неравенства $\overline{W}_{\tau}^{(-)}(0) > 0$, $\overline{W}_{\tau}^{(+)}(0) < 0$. Отсюда с учетом (78) и (73) следует выполнение неравенств (65).

Лемма 4 доказана.

Выпишем явные выражения для решений задач (59):

$$q^{(\mp)}v(\tau) = \left(\delta^{v} - \beta^{(\mp)}(x_0)\right)W^{(\mp)}(\tau) + W^{(\mp)}(\tau)\int\limits_{0}^{\tau} \frac{d\tau_1}{[W^{(\mp)}(\tau_1)]^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\tau_1} W^{(\mp)}(\tau_2)\tilde{G}^{(\mp)}(\tau_2)d\tau_2. \tag{79}$$

В силу экспоненциального убывания функций $W^{(-)}(\tau)$ и $\tilde{G}^{(-)}(\tau)$ при $\tau \to -\infty$, а также функций $\tilde{G}^{(+)}(\tau)$ и $W^{(+)}(\tau)$ при $\tau \to +\infty$ (см. оценки (64), (32) и обозначение (60)), для функций $q^{(\mp)}v(\tau)$ справедливы экспоненциальные оценки типа (41).

Согласно лемме 4, функции $W^{(\mp)}(\tau)$ принимают строго положительные значения. Положив в (58), (60) константу $d^{u} > 0$ достаточно большой, а константу $k^{u} > 0$ достаточно малой, можно добиться того, что функции $\tilde{G}^{(\mp)}(\tau)$, а также выражения в квадратных скобках в (58) будут принимать отрицательные значения соответственно на полупрямых $\tau \in \mathbb{R}_0^{\mp}$. Вместе с этим выбор достаточно большой величины δ^{v} обеспечивает положительность функций $q^{(\mp)}v(\tau)$, что, в свою очередь, с учетом условий 1 и 3 влечет положительность $q^{(\mp)}u(\tau)$, причем для $q^{(\mp)}u(\tau)$ также будут справедливы экспоненциальные оценки вида (41).

Функцию $m^{(-)}u(\sigma)$, определенную при $\sigma \le 0$, и функцию $m^{(+)}u(\sigma)$, определенную при $\sigma \ge 0$, зададим как решения задач

$$\frac{d^2 m^{(\mp)}u}{d\sigma^2} = \hat{f}_v^{(\mp)}(\sigma) \cdot m^{(\mp)}u(\sigma) + \hat{F}^{(\mp)}(\sigma), \quad m^{(\mp)}u(0) = \delta^{u} - \alpha^{(\mp)}(x_0) - q^{(\mp)}u(0), \quad m^{(\mp)}u(\mp\infty) = 0, \tag{80}$$

где δ^{u} — положительная величина,

$$\hat{F}^{(\mp)}(\sigma) := \left[\hat{f}_u^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{f}_u^{(\mp)}(0)\right]\left(\alpha^{(\mp)}(x_0) + q^{(\mp)}u(0)\right) + \left[\hat{f}_v^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{f}_v^{(\mp)}(0)\right]\delta^{v} - D^{u}e^{-K^{u}|\sigma|},$$

положительная константа D^{u} выбирается достаточно большой, а положительная константа K^{u} достаточно малой таким образом, чтобы функции $\hat{F}^{(\mp)}(\sigma)$ принимали строго отрицательные значения соответственно на полупрямых $\sigma \le 0$ и $\sigma \ge 0$.

Решения задач (80) могут быть выписаны явно:

$$\begin{aligned} m^{(\mp)}u(\sigma) = (\delta^{u} - \alpha^{(\mp)}(x_0) - q^{(\mp)}u(0))\frac{\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0)}{\Psi(p_0, q_0)} + \\ + \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma), q_0)\int\limits_{0}^{\sigma} \frac{d\sigma_1}{[\Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_1), q_0)]^2} \int\limits_{\mp\infty}^{\sigma_1} \Psi^{(\mp)}(\hat{u}^{(\mp)}(\sigma_2), q_0)\hat{F}^{(\mp)}(\sigma_2)d\sigma_2. \end{aligned} \tag{81}$$

Здесь использовано обозначение (43). Выбрав теперь положительную величину δ^{u} достаточно большой, добьемся положительности функций $m^{(\mp)}u(\sigma)$. Для них также справедливы оценки типа (41).

Функции $m_3^{(\mp)}v(\sigma)$ определяются как убывающие соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ вместе с первыми производными решения уравнений

$$\frac{d^2 m_3^{(\mp)}v}{d\sigma^2} = \hat{g}_u^{(\mp)}(\sigma)m^{(\mp)}u(\sigma) + [\hat{g}_u^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{g}_u^{(\mp)}(0)](\alpha^{(\mp)}(x_0) + q^{(\mp)}u(0)) + [\hat{g}_v^{(\mp)}(\sigma) - \tilde{g}_v^{(\mp)}(0)]\delta^v$$

на полупрямой $\sigma \le 0$ для функции с верхним индексом “(–)” и на полупрямой $\sigma \ge 0$ для функции с верхним индексом “(+)”. Эти функции экспоненциально убывают соответственно при $\sigma \to \mp\infty$ и имеют оценки типа (41) для $M_1^{(\mp)}u(\sigma)$.

Докажем теперь, что функции, определенные выражениями (52)–(55), удовлетворяют неравенствам (A_1)–(A_4), и тем самым действительно являются верхним и нижним решениями задачи (4).

Лемма 5. *При достаточно малых значениях* ε *пары функций* $(\overline{U}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon))$ *и* $(\underline{U}(x,\varepsilon),\underline{V}(x,\varepsilon))$, *определенные выражениями* (52)–(55), *являются соответственно верхним и нижним решениями задачи* (4).

Доказательство. Для доказательства леммы 5 нужно проверить выполнение неравенств (A_1)–(A_4).

Условие (A_1) выполняется, поскольку функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$, $q^{(\mp)}u(\tau)$, $q^{(\mp)}v(\tau)$ и $m^{(\mp)}u(\sigma)$ принимают строго положительные значения в своих областях определения.

Для доказательства условия (A_2) заметим, что оно тем более будет выполнено, если справедливы неравенства

$$L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) < 0 < L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}), \quad L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) < 0 < L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}), \quad x \in (0,1)\backslash x_0. \tag{82}$$

Подставляя в эти неравенства функции $(\overline{U},\overline{V})$ и $(\underline{U},\underline{V})$, с учетом уравнений (22), (25), (26), (56), (59) и (80) получаем

$$L_{u,\varepsilon}(\overline{U},\underline{V}) = -\varepsilon(A + d^u e^{-k^u|\tau|} + D^u e^{-K^u|\sigma|}) + O(\varepsilon^2),$$
$$L_{u,\varepsilon}(\underline{U},\overline{V}) = \varepsilon(A + d^u e^{-k^u|\tau|} + D^u e^{-K^u|\sigma|}) + O(\varepsilon^2),$$
$$L_{v,\varepsilon}(\overline{U},\overline{V}) = -\varepsilon B + O(\varepsilon^2), \quad L_{v,\varepsilon}(\underline{U},\underline{V}) = \varepsilon B + O(\varepsilon^2).$$

Неравенства (82) выполняются при достаточно малых ε и указанном выше выборе констант A, B, d^u, k^u и D^u, K^u.

Выполнение условий (A_3) доказывается так же, как в [4], [14], [15].

Проверим выполнение условия (A_4) для верхнего решения (для нижнего решения это можно сделать аналогично). Принимая во внимание условия сшивания (42), скачки производных каждой из компонент верхнего решения в точке x_0 можно выразить как

$$\left.\left(\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx} - \frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}\right)\right|_{x=x_0} = \frac{1}{\varepsilon}\left.\left(\frac{dm^{(-)}u}{d\sigma} - \frac{dm^{(+)}u}{d\sigma}\right)\right|_{\sigma=0} + O(1), \tag{83}$$

$$\left.\left(\frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx} - \frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}\right)\right|_{x=x_0} = \left.\left(\frac{dq^{(-)}v}{d\tau} - \frac{dq^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} + O(\varepsilon). \tag{84}$$

Используя явные выражения (79) и (81), получаем равенства

$$\left.\left(\frac{dq^{(-)}v}{d\sigma} - \frac{dq^{(+)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0} = (W_\tau^{(-)}(0) - W_\tau^{(+)}(0))\delta^v - W_\tau^{(-)}(0)\beta^{(-)}(x_0) + W_\tau^{(+)}(0)\beta^{(+)}(x_0) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{0} W^{(-)}(\tau)\tilde{G}^{(-)}(\tau)d\tau + \int_{0}^{+\infty} W^{(+)}(\tau)\tilde{G}^{(+)}(\tau)d\tau$$

(здесь мы учли равенство (73)) и

$$\left(\frac{dm^{(-)}u}{d\sigma}-\frac{dm^{(+)}u}{d\sigma}\right)\bigg|_{\sigma=0}=\frac{\partial H^u}{\partial u}(q_0,p_0)\delta^u-\frac{1}{\Psi(p_0,q_0)}\Big([\alpha^{(-)}(x_0)+q^{(-)}u(0)]f^{(-)}(q_0,p_0,x_0,0)-$$
$$-[\alpha^{(+)}(x_0)+q^{(+)}u(0)]f^{(+)}(q_0,p_0,x_0,0)\Big)+$$
$$+\frac{1}{\Psi(p_0,q_0)}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\Psi^{(-)}(\hat{u}^{(-)}(\sigma),q_0)\hat{F}^{(-)}(\sigma)d\sigma+\int\limits_{0}^{+\infty}\Psi^{(+)}(\hat{u}^{(+)}(\sigma),q_0)\hat{F}^{(+)}(\sigma)d\sigma\right).$$

При достаточно малых ε правые части этих равенств, а значит, и правые части равенств (83), (84) могут быть сделаны положительными за счет достаточно больших δ^v, δ^u в силу леммы 4 и второго неравенства из условия 5.

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Применяя к задаче (4) лемму 5, в которой в качестве верхних и нижних решений выступают функции $(\underline{U},\underline{V})$ и $(\overline{U},\overline{V})$, где $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$ определены выражениями (52)–(55), получаем, что у задачи (4) существует решение $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$, для которого справедливы неравенства (47).

Равномерную оценку (44) с точностью $O(\varepsilon^2)$ можно получить так же, как и в [4], если построить асимптотическое приближение второго порядка решения задачи (4), а затем по аналогии с (52)–(55) верхнее и нижнее решения этой задачи, являющиеся модификациями асимптотического приближения второго порядка. Тогда оценка (44) будет следовать из неравенств (47).

Теорема 1 доказана.

4. ЛОКАЛЬНАЯ ЕДИНСТВЕННОСТЬ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* 1–6. *Тогда для достаточно малых* $\varepsilon>0$ *решение* $(u_\varepsilon(x),v_\varepsilon(x))$ *задачи* (1) *локально единственно как решение задачи* (4) *и асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова с областью притяжения не меньше* $[\underline{U}(x,\varepsilon),\overline{U}(x,\varepsilon)]\times[\underline{V}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon)]$, *где* $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ *определяются выражениями* (52)–(55).

Прежде чем переходить к доказательству, введем некоторые обозначения и определения.

Для любого $T>0$ положим $D_T:=\{(x,t)\in(0,1)\times(0,T]\}$, $D_T^{(-)}:=\{(x,t)\in(0,x_0)\times(0,T]\}$, $D_T^{(+)}:=$ $:=\{(x,t)\in(x_0,1)\times(0,T]\}$.

Обозначим

$$L^t_{u,\varepsilon}(u,v):=\varepsilon^4\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}-f(u,v,x,\varepsilon),\qquad L^t_{v,\varepsilon}(u,v):=\varepsilon^2\frac{\partial^2v}{\partial x^2}-\frac{\partial v}{\partial t}-g(u,v,x,\varepsilon).$$

Определение 4. Будем называть задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon^4y_{xx}-y_t=f(y,z,x,\varepsilon),\quad x\in(0,1),\quad \varepsilon^2z_{xx}-z_t=g(y,z,x,\varepsilon),\quad x\in(0,1),\quad t\in\mathbb{R}^+,\\ y_x(0,t)=y_x(1,t)=z_x(0,t)=y_x(1,t)=0,\quad t\in(0,T],\\ \underline{U}(x,\varepsilon)\le y(x,0)=u^0(x)\le\overline{U}(x,\varepsilon),\quad \underline{V}(x,\varepsilon)\le z(x,0)=v^0(x)\le\overline{V}(x,\varepsilon),\quad x\in[0,1],\end{gathered}\tag{85}$$

где T – любое положительное число, *вспомогательной к задаче* (1).

Для доказательства теоремы 2 сначала докажем существование и единственность решения вспомогательной задачи в смысле определения 1, в котором временной промежуток $\mathbb{R}_0^+$ сужен до $[0,T]$, а затем расширим временной интервал до $\mathbb{R}_0^+$, пользуясь произвольностью T.

Доказательство для вспомогательной задачи проведем с помощью метода верхних и нижних решений.

Определение 5. Пары функций $(\overline{U}^T(x,t), \overline{V}^T(x,t))$ и $(\underline{U}^T(x,t), \underline{V}^T(x,t))$ из $C([0,1]\times[0,T]) \cap$ $\cap\, C^{1,1}(([0,1]\backslash x_0)\times[0,T]) \cap\, C^{2,1}(((0,1)\backslash x_0)\times(0,T])$ называются соответственно *верхним и нижним решениями задачи* (85), если для них выполняются следующие неравенства:

(B_1). $\underline{U}^T(x,t) \le \overline{U}^T(x,t)$, $\underline{V}^T(x,t) \le \overline{V}^T(x,t)$, $(x,t) \in \overline{D}_T$;

(B_2). $L^t_{u,\varepsilon}(\overline{U}^T, v) \le 0 \le L^t_{u,\varepsilon}(\underline{U}^T, v)$, $\underline{V}^T \le v \le \overline{V}^T$, $(x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}$, $L^t_{v,\varepsilon}(u, \overline{V}^T) \le 0 \le L^t_{u,\varepsilon}(u, \underline{V}^T)$, $\underline{U}^T \le u \le \overline{U}^T$, $(x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}$;

(B_3). $\overline{U}^T_x(0,t) \le 0 \le \underline{U}^T_x(0,t)$, $\overline{U}^T_x(1,t) \ge 0 \ge \underline{U}^T_x(1,t)$, $t \in [0,T]$, $\overline{V}^T_x(0,t) \le 0 \le \underline{V}^T_x(0,t)$, $\overline{V}^T_x(1,t) \ge 0 \ge$ $\ge \underline{V}^T_x(1,t)$, $t \in [0,T]$;

(B_4). $\overline{U}^T_x(x_0-0,t) - \overline{U}^T_x(x_0+0,t) \ge 0$, $\underline{U}^T_x(x_0-0,t) - \underline{U}^T_x(x_0+0,t) \le 0$, $t \in [0,T]$, $\overline{V}^T_x(x_0-0,t) -$ $- \overline{V}^T_x(x_0+0,t) \ge 0$, $\underline{V}^T_x(x_0-0,t) - \underline{V}^T_x(x_0+0,t) \le 0$, $t \in [0,T]$.

Лемма 6. *Пусть некоторые* $(\overline{U}^T, \overline{V}^T)$ *и* $(\underline{U}^T, \underline{V}^T)$ *являются соответственно верхним и нижним решениями в смысле определения 5. Тогда для любого* $T > 0$ *существует единственное решение* $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ *вспомогательной задачи* (85), *причем в* $\overline{D}^T$ *выполняются неравенства*

$$\underline{U}^T(x,t) \le y_\varepsilon(x,t) \le \overline{U}^T(x,t), \quad \underline{V}^T(x,t) \le z_\varepsilon(x,t) \le \overline{V}^T(x,t). \tag{86}$$

Доказательство. Как и в предыдущем разделе определим итерационные процессы для построения последовательностей верхних и нижних решений начально-краевой задачи (85):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \overline{y}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \overline{y}^{(k)}}{\partial x^2} + c\overline{y}^{(k)} = \mathcal{F}_1(\overline{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}, x, t), \quad (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)},\\
\overline{y}^k_x(0,t) = \overline{y}^k_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad \overline{y}^{(k)}(x,0) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1;\\
\frac{\partial \overline{z}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \overline{z}^{(k)}}{\partial x^2} + c\overline{z}^{(k)} = \mathcal{F}_2(\overline{y}^{(k-1)}, \overline{z}^{(k-1)}, x, t), \quad (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)},\\
\overline{z}^{(k)}_x(0,t) = \overline{z}^{(k)}_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad \overline{z}^{(k)}(x,0) = v^0(x), \quad 0 \le x \le 1;\\
\frac{\partial \underline{y}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 \underline{y}^{(k)}}{\partial x^2} + c\underline{y}^{(k)} = \mathcal{F}_1(\underline{y}^{(k-1)}, \overline{z}^{(k-1)}, x, t), \quad (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)},\\
\underline{y}^{(k)}_x(0,t) = \underline{y}^{(k)}_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad \underline{y}^{(k)}(x,0) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1;\\
\frac{\partial \underline{z}^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \underline{z}^{(k)}}{\partial x^2} + c\underline{z}^{(k)} = \mathcal{F}_2(\underline{y}^{(k-1)}, \underline{z}^{(k-1)}, x, t), \quad (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)},\\
\underline{z}^{(k)}_x(0,t) = \underline{z}^{(k)}_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad \underline{z}^{(k)}(x,0) = v^0(x), \quad 0 \le x \le 1,
\end{gathered} \tag{87}$$

где $k = 1, 2, \ldots$, c — достаточно большая положительная константа,

$$\mathcal{F}_1(y,z,x,t) := -f(y,z,x,\varepsilon) + cy, \quad \mathcal{F}_2(y,z,x,t) := -g(y,z,x,\varepsilon) + cz.$$

Также полагаем $(\overline{y}^{(0)}, \overline{z}^{(0)}) = (\overline{U}^T, \overline{V}^T)$ и $(\underline{y}^{(0)}, \underline{z}^{(0)}) = (\underline{U}^T, \underline{V}^T)$.

Согласно [23], каждая из задач (87) имеет единственное решение из класса $C^{1,1}([0,1]\times[0,T])$. Действуя так же, как в [12], можно показать, что эти решения принадлежат классу $C^{2,1}(((0,1)\backslash x_0)\times(0,T])$.

Поскольку функции $\overline{y}^{(0)}$, $\overline{z}^{(0)}$, $\underline{y}^{(0)}$, $\underline{z}^{(0)}$ являются кусочно-гладкими и для каждого значения $t \in [0,T]$ удовлетворяют неравенствам (B_4), то, повторяя рассуждения из [5] и используя утверждение, аналогичное лемме 1 для параболических уравнений из [12], можно доказать, что последовательности верхних и нижних решений в $\overline{D}^T$ обладают свойством монотонности и ограниченности типа (49), и, следовательно, существуют их предельные функции $\overline{y}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$, $\overline{z}(x,t)$ $\underline{z}(x,t)$.

Обозначим через $G_1(x,s,t-\tau)$ функцию Грина первой из задач (87).

Рассмотрим для каждого натурального номера k функцию

$$\overline{y}^{(k)}(x,t) = \int_0^1 G_1(x,s,t)u^0(s)ds + \int_0^t d\tau \int_0^1 G_1(x,s,t-\tau)\mathcal{F}_1^{(k-1)}(\overline{y}^{(k-1)},\underline{z}^{(k-1)},s,\tau)ds. \tag{88}$$

Эта функция удовлетворяет первому уравнению (87) всюду, кроме точки x_0. Докажем, что она является гладкой в D_T. Тогда возможность представления решения задач (87) в виде (88) будет следовать из единственности решения.

Обозначим

$$\varkappa_1^{(k)}(t) := f^{(-)}(\overline{y}^{(k)}(x_0,t),\underline{z}^{(k)}(x_0,t),x_0,\varepsilon) - f^{(+)}(\overline{y}^{(k)}(x_0,t),\underline{z}^{(k)}(x_0,t),x_0,\varepsilon),$$
$$f_0^{(k)}(x,t) := f(\overline{y}^{(k)}(x,t),\underline{z}^{(k)}(x,t),x,\varepsilon) + \Theta(x-x_0)\varkappa_1^{(k)}(t),$$

где $\Theta(x-x_0)$ – функция Хевисайда, определенная как $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$

Заметим, что функции $f_0^{(k)}(x,t)$ непрерывны.

Пусть

$$\mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(x,t) := \mathcal{F}_1(\overline{y}^{(k-1)},\underline{z}^{(k-1)},x,t) - \Theta(x-x_0)\varkappa_1^{(k-1)}(t) \equiv -f_0^{(k-1)}(x,t) + c\overline{y}^{(k-1)}(x,t).$$

Функции $\mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(x,t)$ также являются непрерывными.

Решения первой задачи (87) для каждого натурального k можно представить в виде

$$\overline{y}^{(k)}(x,t) = Y^{(k)}(x,t) + \Omega^{(k)}(x,t), \tag{89}$$

где

$$Y^{(k)}(x,t) := \int_0^1 G_1(x,s,t)u^0(s)ds + \int_0^t d\tau \int_0^1 G_1(x,s,t-\tau)\mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(s,\tau)ds, \tag{90}$$

$$\Omega^{(k)}(x,t) := \int_0^t d\tau \int_{x_0}^1 G_1(x,s,t-\tau)\varkappa_1^{(k-1)}(\tau)ds. \tag{91}$$

Очевидно, что $Y^{(k)}(x,t)$ является классическим решением задачи

$$\frac{\partial Y^{(k)}}{\partial t} - \varepsilon^4 \frac{\partial^2 Y^{(k)}}{\partial x^2} + cY^{(k)} = \mathcal{F}_{1,0}^{(k-1)}(x,t), \quad (x,t) \in D_T,$$
$$Y_x^{(k)}(0,t) = Y_x^{(k)}(1,t) = 0, \quad Y^{(k)}(x,0) = u^0(x).$$

Функция $\Omega^{(k)}(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Omega_t^{(k)} - \varepsilon^4\Omega_{xx}^{(k)} + c\Omega^{(k)} = \Theta(x-x_0)\varkappa_1^{(k-1)}(t), \quad (x,t) \in D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)},$$

однородным условиям Неймана на краях отрезка $[0,1]$ и однородным начальным условиям.

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Omega}_x^{(k)}(x,t) := \int_0^t d\tau \int_{x_0}^1 \frac{\partial}{\partial x} G_1(x,s,t-\tau)\varkappa_1^{(k-1)}(\tau)ds.$$

Эта функция непрерывна всюду в D_T (см. [24], а также оценки функции Грина в [25]) и совпадает всюду в $D_T^{(-)} \cup D_T^{(+)}$ с производной функции (91):

$$\Omega_x^{(k)}(x,t) := \frac{\partial}{\partial x}\int_0^t d\tau\int_{x_0}^1 G_1(x,s,t-\tau)\varkappa_1^{(k)}(\tau)ds.$$

Справедлива цепочка равенств

$$\frac{\Omega^{(k)}(x_0+\Delta x,t)-\Omega^{(k)}(x_0,t)}{\Delta x} = \Omega_x^{(k)}(x_0+\theta\Delta x,t) = \tilde{\Omega}_x^{(k)}(x_0+\theta\Delta x,t), \quad \theta\in(0,1). \tag{92}$$

В силу непрерывности $\tilde{\Omega}_x^{(k)}(x,t)$ существует предел правой части цепочки при $\Delta x \to 0$, следовательно, существует и предел левой части: $\Omega_x^{(k)}(x_0,t) = \tilde{\Omega}_x^{(k)}(x_0,t)$. Гладкость функции $\Omega^{(k)}(x,t)$ во всех остальных точках области D_T следует из выражения (91) и непрерывности функции $\varkappa_1^{(k)}$.

Из непрерывности в точке x_0 производных функций $Y_x^{(k)}(x,t)$ и $\Omega_x^{(k)}(x,t)$ следует непрерывность производной их суммы $\overline{y}_x^{(k)}(x,t)$.

Непрерывность производных $\overline{z}_x^{(k)}(x,t)$, $\underline{y}_x^{(k)}(x,t)$, $\underline{z}_x^{(k)}(x,t)$ доказывается аналогично.

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы 2, с использованием теоремы Леви можно доказать непрерывность предельных функций $\overline{y}(x,t)$, $\overline{z}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$, $\underline{z}(x,t)$ в $\overline{D}^T$, а затем и справедливость предельных равенств при $k \to +\infty$, в частности,

$$\overline{y}(x,t)\int_0^1 G_1(x,s,t)u^0(s)ds + \int_0^t d\tau\int_0^1 G_1(x,s,t-\tau)\mathcal{F}_1(\overline{y},\underline{z},s,\tau)ds. \tag{93}$$

Аналогичные равенства справедливы для функций $\overline{z}(x,t)$, $\underline{y}(x,t)$ и $\underline{z}(x,t)$.

Непрерывность производных $\overline{y}_x(x,t)$, $\overline{z}_x(x,t)$, $\underline{y}_x(x,t)$ и $\underline{z}_x(x,t)$ доказывается точно так же, как это было сделано для функций $\overline{y}^{(k)}(x,t)$.

Из равенств (93) и единственности решения параболической задачи, согласно [5], следует, что пара функций $y_\varepsilon(x,t) = \overline{y}(x,t) = \underline{y}(x,t)$, $z_\varepsilon(x,t) = \overline{z}(x,t) = \underline{z}(x,t)$ является единственным решением задачи (85), удовлетворяющим неравенствам (86).

Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим теперь функции

$$\begin{gathered}\overline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + (\overline{U}(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t}, \overline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + (\overline{V}(x,\varepsilon)-v_\varepsilon(x))e^{-\lambda t},\\ \underline{U}^T(x,t,\varepsilon) = u_\varepsilon(x) + (\underline{U}(x,\varepsilon)-u_\varepsilon(x))e^{-\lambda t}, \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) = v_\varepsilon(x) + (\underline{V}(x,\varepsilon)-v_\varepsilon(x))e^{-\lambda t},\end{gathered} \tag{94}$$

в которые входят верхние и нижние решения $\underline{U}(x,\varepsilon)$, $\underline{V}(x,\varepsilon)$, $\overline{U}(x,\varepsilon)$, $\overline{V}(x,\varepsilon)$ задачи (4) и точное решение $(u_\varepsilon(x), v_\varepsilon(x))$ задачи (4), которое существует, согласно теореме 1. Здесь λ – положительная константа.

В полной аналогии с [11] можно доказать, что при достаточно малом λ функции (94) являются нижним и верхним решениями задачи (85) для любого $T > 0$.

Далее, применяя лемму 6 к решению задачи (85) и учитывая произвольность $T > 0$, заключаем существование единственного решения $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ в смысле определения 1 задачи (1) для начальных функций $u^0(x)$, $v^0(x)$, заданных на промежутках

$$\begin{gathered}\underline{U}^T(x,0,\varepsilon) = \underline{U}(x,\varepsilon) \le u^0(x) \le \overline{U}(x,\varepsilon) = \overline{U}^T(x,0,\varepsilon), \quad x\in[0,1],\\ \underline{V}^T(x,0,\varepsilon) = \underline{V}(x,\varepsilon) \le v^0(x) \le \overline{V}(x,\varepsilon) = \overline{V}^T(x,0,\varepsilon), \quad x\in[0,1].\end{gathered} \tag{95}$$

Кроме того, верны равенства

$$\underline{U}^T(x,t,\varepsilon) \le y_\varepsilon(x,t) \le \overline{U}^T(x,t,\varepsilon), \quad \underline{V}^T(x,t,\varepsilon) \le z_\varepsilon(x,t) \le \overline{V}^T(x,t,\varepsilon), \quad (x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+. \tag{96}$$

Из этих неравенств с учетом выражений (94) следуют предельные равенства

$$\lim_{t\to+\infty}\left|y_\varepsilon(x,t)-u_\varepsilon(x)\right|=0,\quad \lim_{t\to+\infty}\left|z_\varepsilon(x,t)-v_\varepsilon(x)\right|=0.$$

Эти равенства означают асимптотическую устойчивость по Ляпунову стационарного решения задачи (1), а в силу единственности функций $(y_\varepsilon(x,t), z_\varepsilon(x,t))$ из этих предельных равенств и оценок (47), установленных в ходе доказательства теоремы 1, вытекает единственность решения $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ задачи (4) в интервале (47).

Наконец, положив $t=0$ в выражениях (94) с учетом соотношений (95), получаем, что область притяжения стационарного решения не меньше $[\underline{U}(x,\varepsilon),\overline{U}(x,\varepsilon)]\times[\underline{V}(x,\varepsilon),\overline{V}(x,\varepsilon)]$, где функции $\underline{U}$, $\underline{V}$, $\overline{U}$, $\overline{V}$ определяются равенствами (52)–(55).

Теорема 2 доказана.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрен наиболее простой для анализа случай задачи на отрезке. Несмотря на это, полученных результатов уже достаточно для разработки и обоснования различных физических моделей, особенно в тех случаях, когда предпочтительно или попросту неизбежно применение численных методов. Более того, естественным продолжением работы будет ее распространение на двумерные задачи. Кроме того, результаты работы могут быть полезными для разработки эффективных методов численного моделирования задач с большими градиентами (см. [26]–[31]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorova A.E., Levashova N.T., Semina A.E., Mel'nikova A.A.* The application of a distributed model of active media for the analysis of urban ecosystems development // Math. Biology and Bioinformat. 2018. V. 13. № 2. P. 454–465.
2. *Levashova N.T., Sidorova A.E., Semina A.E., Ni Mingkang.* A spatio-temporal autowave model of shanghai territory development // Sustainability. 2019. V. 11. № 13. P. 3658.
3. *Нефедов Н.Н.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями // Дифференц. ур-ния. 1995. Т. 31. № 7. С. 1077–1085.
4. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе уравнений с различными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. № 11. С. 1983–2003.
5. *Pao C.V.* Nonlinear parabolic and elliptic equations. New York: Plenum Press, 1992.
6. *Левашова Н.Т., Нефедов Н.Н., Орлов А.О.* Асимптотическая устойчивость стационарного решения многомерного уравнения реакция-диффузия с разрывным источником // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 4. С. 611–620.
7. *Нефедов Н.Н., Никулин Е.И., Орлов А.О.* О периодическом внутреннем слое в задаче реакция-диффузия с источником модульно-кубичного типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2020. Т. 60. № 9. С. 1513–1532.
8. *Carl S., Motreanu D.* Extremal solutions for nonvariational quasilinear elliptic systems via expanding trapping regions // Monatshefte für Mathematik. 2017. V. 182. № 4. P. 801–821.
9. *Bögelein V., Duzaar F., Korte R., Scheven C.* The higher integrability of weak solutions of porous medium systems // Adv. in Nonlinear Analys. 2018. V. 8. № 1. P. 1004–1034.
10. *Давыдова М.А., Захарова С.А., Левашова Н.Т.* Об одной модельной задаче для уравнения реакция–диффузия–адвекция // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 9. С. 1548–1559.
11. *Мельникова А.А.* Существование и устойчивость периодического решения типа фронта в двухкомпонентной системе параболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 7. С. 1184–1200.
12. *Levashova N.T., Nefedov N.N., Nikolaeva O.A., Orlov A.O., Panin A.A.* The solution with internal transition layer of the reactiondiffusion equation in case of discontinuous reactive and diffusive terms // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. P. 1–15.
https://doi.org/10.1002/mma.5134
13. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Наука,1990.

14. *Бутузов В.Ф., Неделько И.В.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений с разными степенями малого параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 877–899.
15. *Бутузов В.Ф., Левашова Н.Т., Мельникова А.А.* Контрастная структура типа ступеньки в сингулярно возмущенной системе эллиптических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 9. С. 1427–1447.
16. *Fife P.C., McLeod J.B.* The approach of solutions of nonlinear diffusion equations to travelling front solutions // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 65. № 4. P. 335–361.
17. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
18. *Александров А.Д.* Исследования о принципе максимума IV // Изв. вузов. Матем. 1960. № 3. С. 3–15.
19. *Stakgold I., Holst M.* Green’s Functions and Boundary Value Problems. Hoboken, New Jersey: John Wiley Sons, Inc., 2011.
20. *Coppel W.A.* Dichotomies in Stability Theory. Heidelberg: Springer-Verlag GmbH, 1978.
21. *Palmer K.J.* Exponential dichotomies for almostperiodicequations // Proceed. of the Am. Math. Soc. 1987. V. 101. № 2. P. 293–298.
22. *Oleh Omel’chenko, Lutz Recke.* Boundary layer solutions to singularly perturbed problems via the implicit function theorem // Asymptotic Analys. 2009. V. 62. P. 207–225.
23. *De Coster C., Obersnel F., Omari P.A.* A qualitative analysis via lower and upper solutions of first order periodic evolutionary equations with lack of uniqueness // Handbook of differential equations: ordinary differential equations. 2006. V. 3. P. 203–339.
24. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, 1968.
25. *Соболевский П.Е.* Оценки функции Грина уравнений в частных производных второго порядка параболического типа // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 2. Р. 313–316.
26. *O’Riordan E., Quinn J.* Parameter-uniform numerical method for some linear and nonlinear singularly perturbed convection-diffusion boundary turning point problems // BIT Numerical Math. 2011. V. 51. № 2. P. 317–337.
27. *Kopteva N., O’Riordan E.* Shishkin meshes in the numerical solution of singularly perturbed differential equations // Internat. J. of Numerical Analys. and Model. 2010. V. 7. № 3. P. 393–415.
28. *Lukyanenko D.V., Shishlenin M.A., Volkov V.T.* Asymptotic analysis of solving an inverse boundary value problem for a nonlinear singularly perturbed time-periodic reaction-diffusion-advection equation // J. of Inverse and Ill-posed Problems. 2019. V. 27. № 5. P. 745–758.
29. *Lukyanenko D.V., Grigorev V.B., Volkov V.T., Shishlenin M.A.* Solving of the coefficient inverse problem for a nonlinear singularly perturbed two-dimensional reaction-diffusion equation with the location of moving front data // Comput. and Math. with Appl. 2019. V. 77. № 5. P. 1245–1254.
30. *Lukyanenko D.V., Volkov V.T., Nefedov N.N., Yagola A.G.* Application of asymptotic analysis for solving the inverse problem of determining the coefficient of linear amplification in burgers’ equation // Moscow University Phys. Bull. 2019. V. 74. № 2. P. 131–136.
31. *Лукьяненко Д.В., Мельникова А.А.* Использование методов асимптотического анализа для решения одной коэффициентной обратной задачи для системы нелинейных сингулярно возмущенных уравнений типа реакция–диффузия с кубической нелинейностью // Вычислит. методы и программирование: Новые вычислительные технологии. 2019. Т. 20. С. 363–377.