

УДК 517.9

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ В НАГРЕВАЕМЫХ ТРУБАХ С РАСЧЕТОМ ПОГРАНСЛОЯ ПО БГК-МОДЕЛИ<sup>1)</sup>

© 2021 г. Е. А. Забродина<sup>1</sup>, О. В. Николаева<sup>1</sup>, Н. Н. Фимин<sup>1,\*</sup>, В. М. Чечёткин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 125047 Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Россия

\*e-mail: oberon@kiam.ru

Поступила в редакцию 09.11.2020 г.  
Переработанный вариант 09.11.2020 г.  
Принята к публикации 07.04.2021 г.

Рассматривается модельная задача о переносе тепла от неравномерно нагреваемых стенок трубы к основной массе гидродинамического течения или, иными словами, первичные стадии релаксации температуры и давления жидкости в нагреваемой трубе. Проводятся расчеты с помощью программ, использующих уравнения Навье–Стокса, модифицированного Барнетта и кинетического уравнения БГК в различных сочетаниях. Библ. 13. Фиг. 17.

**Ключевые слова:** уравнения Больцмана, уравнения Навье–Стокса, уравнения Барнетта, макропараметры течения, метод Чэпмена–Энскога, уравнение БГК.

DOI: 10.31857/S0044466921110168

### 1. ВВЕДЕНИЕ. ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ БАРНЕТТА И КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БГК

Задачи, связанные с различными аспектами гидродинамического движения в условиях, существенно отличающихся от равновесных и требующих при этом особых условий замыкания (например, при наличии значительных температурных градиентов и внутренних интенсивных источников/стоков тепла — типа фазовых переходов — в течении, а также в условиях присутствия значительной локальной пространственной неоднородности тензора напряжений), требуют использования принципиально иных математических моделей, чем известные и широко используемые подходы, основанные на решении уравнений Эйлера или Навье–Стокса (УНС). В частности, проблемы описания эволюции двухфазных (парожидкостных) систем в охлаждающих контурах АЭС, котлоагрегатах тепловых станций и пр. приводят к мысли о целесообразности введения в рассмотрение (и построения соответствующей вычислительной модели) системы уравнений Барнетта (см. [1]–[5]).

Помимо использования в выделенной зоне гидродинамического расчета приближения Барнетта, весьма привлекательной является возможность применения кинетического подхода в существенно неравновесном слое жидкости, прилегающем к сильно и неравномерно нагретой стенке (либо ко внешней по отношению к нагреваемой аэродинамическим потоком поверхности — как, например, при гиперзвуковом режиме обтекания). Для этого представляется вполне правомерным обратиться к кинетическому уравнению Бхатнагара–Гросса–Крука (БГК). Оно является максимально простым по структуре и в то же время достаточно адекватно передающим физическую картину, имеющую место при взаимодействии молекул среды в пристеночной области (обобщенном слое Кнудсена).

В настоящей работе рассматриваются несколько вариантов численного моделирования течения в трубе с нагреваемыми стенками:

1) введение в рассмотрение рассчитываемого по *модифицированному* (далее это уточнение подразумевается неявно) Барнетту погранслоя при наличии основного потока, описываемого уравнениями Навье–Стокса;

2) наличие погранслоя, полностью рассчитываемого с помощью уравнения БГК при условии основного потока, рассматриваемого в рамках УНС;

<sup>1)</sup> Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 20-11-20165 (В.М. Чечеткин).

3) расчет всей массы движущейся жидкости в трубе по Барнетту;

4) введение в рассмотрение переходного слоя жидкости, расположенного между кинетическим погранслоем (рассчитываемым по кинетической модели БГК) и основной массой потока (рассчитываемым по Навье–Стоксу или Барнетту).

Можно утверждать, что сочетание кинетического расчета с гидродинамическим может быть оправдано в ряде важных случаев, причем основными основаниями для такого комплексного кинетически-гидродинамического подхода являются эффекты существенной неравновесности течения в областях резких градиентов температур, плотностей и при возможном фазовом переходе в жидкости (в этом случае гидродинамика выходит за рамки своей применимости из-за непригодности метода усреднения по всему объему среды, используемому в методах Гильберта, Грэда, Чэпмена–Энскога перехода от кинетического уравнения к системе гидродинамических уравнений). Чрезвычайно важной и сложной задачей при таких сложных расчетах является учет взаимной передачи информации о среде через формальную границу расчетных областей (в каждой из областей моделирование ведется на основании своей методики: БГК–Барнетт, БГК–Навье–Стокс и т.д.).

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БГК

Уравнение БГК для функции распределения молекул пара в пограничном слое может быть записано в следующей форме:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial f(r, \mu, v, \Omega, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \Omega} = \frac{1}{v} I(f)(f_e(f) - f). \quad (1)$$

Оно рассматривается в осесимметричном цилиндрическом слое  $r_0 < r < R_0$ ,  $0 < z < H$ . Предполагается, что решение  $f$  не зависит от азимутальной пространственной координаты.

Функция распределения  $f$  [молекул/(м<sup>3</sup>(м/с)<sup>3</sup>)] зависит от шести переменных: пространственных координат  $r, z$  [м]; модуля скорости молекулы  $v$  [м/с]; времени  $t$  [с]; углов, определяющих единичный вектор  $\Omega(\theta, \varphi)$  направления переноса частиц в сферической системе координат ( $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ ). Предположение об изотропии функции распределения по угловой переменной  $\varphi$  эквивалентно условию  $f(r, z, \mu, \varphi, v, t) = f(r, z, \mu, 2\pi - \varphi, v, t)$  ( $\mu \equiv \cos \theta$ ). Обозначение  $f_e(f)$  используется в том смысле, что локально-равновесное квазимаквелловское распределение  $f_e$  зависит от функции распределения в той же точке посредством параметров  $\rho(f)$ ,  $T(f)$ ,  $\mathbf{V}(f)$ , являющихся моментами функции  $f$  (явный вид  $f_e$  см. ниже). Производная по направлению в уравнении (1) в цилиндрических координатах имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \Omega} = \mu \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\xi}{r} \frac{\partial (rf)}{\partial r} - \frac{\partial (\eta f)}{\partial \varphi}, \quad \xi \equiv \sin \theta \cos \varphi, \quad \eta \equiv \sin \theta \sin \varphi.$$

Интеграл по скоростям от функции распределения (пространственная удельная плотность частиц) записывается в форме

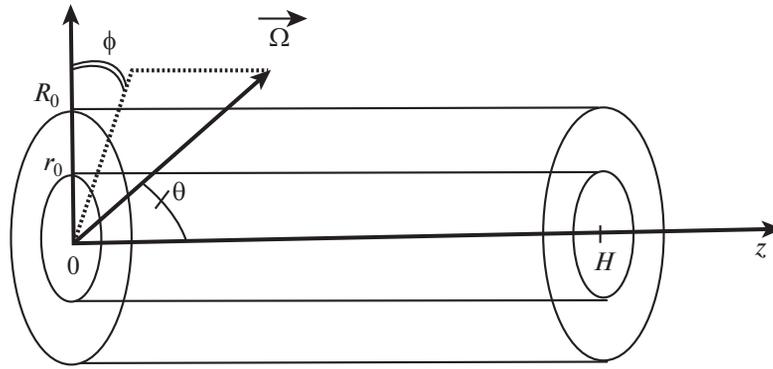
$$\varrho(r, z, t) = 2 \int_0^{\infty} v^2 dv \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi} f(r, z, \mu, \varphi, v, t) d\varphi.$$

Частота взаимодействия молекул  $I(f)$  [с<sup>-1</sup>] принимается в расчетах равной модельной величине (существенно зависящей от скорости частиц и их функции распределения, что отличает используемую модель от классической модели БГК)

$$I_{v,f}^{(0)} = \sqrt{3T(f)k_B/m_0^3} \sigma \rho(f),$$

где  $\sigma = \pi d_0^2$  [м<sup>2</sup>] – эффективное сечение взаимодействия молекул,  $d_0 = 0.3 \times 10^{-9}$  [м] – эффективный диаметр молекулы воды,  $k_B = 1.380648 \times 10^{-23}$  [Дж/К] – постоянная Больцмана,  $m_0 = 3.01510 \times 10^{-26}$  [кг] – масса молекулы воды,  $\rho(f)$  [кг] – локальная массовая плотность частиц:

$$\rho(r, z, t) = 2m_0 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\infty} v^2 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv,$$



Фиг. 1. Расчетная область начально-граничной задачи для уравнения БГК.

величина  $T(f)$  [К] – локальная температура микроканонического ансамбля:

$$T(r, z, t) = \frac{4m_0}{3R\rho(r, z, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty [(\xi v - v_r)^2 + (\mu v - v_z)^2] v^2 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv,$$

$R = k_B/m_0$  – газовая постоянная. Компоненты скорости потока ([м/с]) определяются соотношениями

$$v_z = \frac{2m_0}{\rho(r, z, t)} \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv,$$

$$v_r = \frac{2m_0}{\rho(r, z, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi \xi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r, z, \mu, \varphi, v, t) dv.$$

Локально-равновесное распределение [молекул/(м<sup>3</sup>(м/с)<sup>3</sup>)] в правой части уравнения БГК определяется выражением

$$f_e(f) = f(\mu, \varphi, v, v_r, v_z, \rho, T) = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2} m_0} \exp\left[-\frac{v^2 + v_r^2 + v_z^2 - 2v(\mu v_z + \xi v_r)}{2RT}\right] \times \\ \times (A_1 + A_2(v\xi - v_r) + A_3(v\mu - v_z) + A_4[(v\xi - v_r)^2 + (v\mu - v_z)^2 - 3RT]),$$

где коэффициенты  $A_k|_{k=1,\dots,4}$  находятся из вышеприведенных определений  $\rho(r, z, t)$ ,  $T(r, z, t)$ ,  $v_r$ ,  $v_z$  при замене интегралов в правых частях выражений квадратурными формулами.

Приведем постановку *краевых условий* для уравнений БГК в кольцевой цилиндрической области погранслоя (см. фиг. 1). На границе  $z = H$  задаются значения функции распределения для молекул, вытекающих из открытого торца цилиндра (при  $\mu > 0$ ):

$$f(r, z = H, \mu < 0, \varphi, v, t) = f_e(\mu < 0, \varphi, v, v_r(r, z = H, t), v_z(r, z = H, t), \rho(r, z = H, t), T(r, z = H, t)). \quad (2)$$

На границе  $r = r_0$  задается значение функции распределения для молекул, поступающих из газодинамической области (для которых  $0 < \varphi < \pi/2$ )

$$f(r = r_0, z, \mu, \varphi, v, t) = f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = r_0, z, t), v_z(r = r_0, z, t), \rho(r = r_0, z, t), T(r = r_0, z, t)) \quad (3)$$

при заданных макропараметрах  $v_r(r, z = H, t)$ ,  $v_z(r, z = H, t)$ ,  $\rho(r, z = H, t)$ ,  $T(r, z = H, t)$  и  $v_r(r = r_0, z, t)$ ,  $v_z(r = r_0, z, t)$ ,  $\rho(r = r_0, z, t)$ ,  $T(r = r_0, z, t)$ . Подчеркнем, что условия (2), (3) задают значения функции распределения и тем самым макропараметров только для молекул, влетающих в трубу, но не для молекул, вылетающих из трубы.

На границе  $r = R_0$  (жесткая стенка трубы) при  $\pi/2 < \varphi < \pi$  (такой интервал угла отвечает молекулам, движущимся от стенки) задается следующее условие:

$$f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) = G \cdot f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = R_0, z, t), v_z(r = R_0, z, t), \rho(r = R_0, z, t), T(r = R_0, z, t)),$$

$$G = \left( -\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{\pi/2} \xi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) dv \right) \times$$

$$\times \left( \int_{-1}^1 d\mu \int_{\pi/2}^\pi \xi d\varphi \int_0^\infty v^3 f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r = R_0, z, t), v_z(r = R_0, z, t), \rho(r = R_0, z, t), T(r = R_0, z, t)) \right)^{-1} > 0. \tag{4}$$

Вышеприведенное условие на жесткой стенке трубы обеспечивает выполнение равенства аннуляции соответствующего (радиального) потока молекул:

$$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi \xi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r = R_0, z, \mu, \varphi, v, t) dv = 0$$

(откуда следует соотношение “непротекания”  $v_r(r = R_0, z, t) = 0$ ). Также условие (4) обеспечивает заданные плотность, температуру и продольную скорость для молекул, отраженных от стенки трубы.

На границе  $z = 0$  задается краевое условие (для молекул, втекающих в цилиндр через его открытый торец, чему соответствует условие  $\mu > 0$ ) задается условие

$$f(r, z = 0, \mu > 0, \varphi, v, t) = f_e(\mu > 0, \varphi, v, v_r(r, z = 0, t), v_z(r, z = 0, t), \rho(r, z = 0, t), T(r, z = 0, t)), \tag{5}$$

причем

$$2m_0 \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty v^2 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = \rho(r, z = 0, t),$$

$$\frac{4m_0}{3R\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty v^2 ((\xi v - v_r)^2 - (\mu v - v_z)^2) f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = T(r, z = 0, t),$$

$$\frac{2m_0}{\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^1 \mu d\mu \int_0^\pi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = v_z(r, z = 0, t),$$

$$\frac{2m_0}{\rho(r, z = 0, t)} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^\pi \xi d\varphi \int_0^\infty v^3 f(r, z = 0, \mu, \varphi, v, t) dv = v_r(r, z = 0, t).$$

Эти условия фиксируют макропараметры (плотность, скорости и температуру) для всего ансамбля молекул (как влетающих в цилиндр, так и вылетающих из него).

Приведем постановку *начальных условий* для смешанной задачи для уравнения БГК в погранслое. В начальный момент времени задаются функции

$$\rho(r, z, t = 0), \quad v_r(r, z, t = 0), \quad v_z(r, z, t = 0), \quad T(r, z, t = 0)$$

во всей расчетной области (кольцевого цилиндра), т.е.  $r_0 \leq r \leq R_0, 0 \leq z \leq H$ . Начальное условие для уравнения БГК имеет вид

$$f(r, z, \mu, \varphi, t = 0) = f_e(\mu, \varphi, v, v_r(r, z, t = 0), v_z(r, z, t = 0), \rho(r, z, t = 0), T(r, z, t = 0)). \tag{6}$$

Рассмотрим метод решения поставленной выше начально-граничной задачи (1)–(6) для кинетического уравнения БГК. Для этого проведем аппроксимацию по времени. Интегрируя уравнение (1) по переменной  $t$ , находим

$$\frac{1}{v\Delta t}(f^+ - f^-) + \frac{\partial f^0}{\partial \Omega} = \frac{1}{v} I(f^-)(f_e(f^-) - f^0), \quad I(f^-) = \sqrt{3T(f^-)k_B/m_0^3} \sigma \rho(f^-), \tag{7}$$

где  $f^-(r, z, \mu, \varphi, \nu) = f(r, z, \mu, \varphi, \nu, t^-)$  – решение в начале временного шага при  $t = t^-$ ,  $f^+(r, z, \mu, \varphi, \nu) = f(r, z, \mu, \varphi, \nu, t^+)$  – решение в начале временного шага при  $t = t^+$ ,  $\Delta = t^+ - t^-$ ,

$$f^0(r, z, \mu, \varphi, \nu) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^-}^{t^+} f(r, z, \mu, \varphi, \nu, t) dt$$

есть среднее на временном шаге решение. Заметим, что здесь частота взаимодействий  $I(f^-)$  и локально-равновесное распределение  $f_e(f^-)$  в правой части уравнения берутся для начала временного шага.

Примем кусочно-линейную аппроксимацию функции распределения

$$f(t) = f^+ \quad \text{при} \quad \tau \leq t \leq t^+,$$

$$f(t) = f^- + \frac{t-t^-}{\tau-t^-}(f^+ - f^-) \quad \text{при} \quad t^- < t < \tau,$$

$$\tau = t^- + \frac{2p\Delta t}{1+p}, \quad p \in [0,1],$$

$f^+ = (1+p)f^0 - pf^-$ , параметр  $p \in [0,1]$  (при  $p = 0$  функция  $f(t)$  является кусочно-постоянной, при  $p = 1$  – кусочно-линейной). Подставляя это выражение для  $f^+$  в уравнение (7), получаем

$$\frac{1+p}{v\Delta t} f^0 + \frac{\partial f^0}{\partial \Omega} = \frac{1}{v} I(f^-)(f_e(f^-) - f^0). \tag{8}$$

Значения макропараметров на границе погранслоя с областью гидродинамического расчета

$$v_r(r_0, z, t^-), \quad v_z(r_0, z, t^-), \quad \rho(r_0, z, t^-), \quad T(r_0, z, t^-) \tag{9}$$

берутся из решения уравнений газодинамики в соседней области на предыдущем временном шаге.

Значения макропараметров на открытых торцах трубы и на жесткой стенке

$$v_r(r, z = 0), \quad v_z(r, z = 0), \quad \rho(r, z = 0), \quad T(r, z = 0), \tag{10}$$

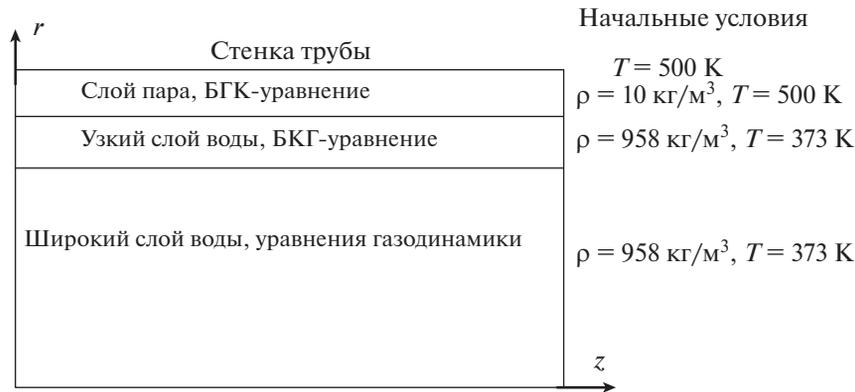
$$v_r(r, z = H), \quad v_z(r, z = H), \quad \rho(r, z = H), \quad T(r, z = H), \tag{11}$$

$$v_r(R, z), \quad v_z(R, z), \quad \rho(R, z), \quad T(R, z) \tag{12}$$

считаются фиксированными во все моменты времени.

В расчетах установлено, что функция распределения молекул в кинетическом погранслое далека от равновесной. Поэтому непосредственная передача данных о состоянии погранслоя к жидкостному течению, в котором проводятся расчеты по гидродинамической программе, невозможна (на границе этих двух расчетных областей должен производиться обмен информацией о сохранении баланса массы, импульса и энергии: 1) со стороны погранслоя в виде квазиравновесной псевдомаксвелловской функции распределения, моменты которой являются локальными макровеличинами  $\rho_{kin}, T_{kin}, v_{kin}$ , передаваемыми в качестве граничных условий в область гидродинамического расчета; 2) со стороны основного потока жидкости – в виде макровеличин  $\rho_{Hydr}, T_{Hydr}, v_{Hydr}$ , формирующих на границе областей со стороны кинетического погранслоя локальную псевдомаксвелловскую функцию). Поэтому введена в рассмотрение дополнительная релаксационная область “над” погранслоем, в которой происходит изотропизация распределения молекул и формируется необходимая при обмене информацией псевдомаксвелловская функция распределения (см. фиг. 2).

Отдельным весьма нетривиальным вопросом является соответствие термодинамических параметров неравновесного микроканонического ансамбля частиц в кинетическом погранслое макропараметрам ( $T, S, W$  и т.п.) канонического ансамбля области основного гидродинамического течения в процессе выравнивания их в переходной релаксационной зоне между расчетными зонами  $r_0 < r < R_0$  и  $0 < r < R_0 - \Delta_K$ .



**Фиг. 2.** Модифицированная постановка задачи расчета кинетического погранслоя, учитывающая введение эффективного релаксационного подслоя, служащего для максвеллизации функции распределения (с последующим переходом к макровеличинам в гидродинамической области расчета).

В качестве выводов из проведенных расчетов можно с уверенностью привести следующие:

1. В релаксационном слое воды реализуется распределение, близкое к максвелловскому, в то время как в кнудсеновском (“паровом”) погранслое распределение существенно анизотропно и близким к максвелловскому не является. Толщина кнудсеновского погранслоя выбиралась  $\Delta_K \sim 100 \langle \ell \rangle$  (где  $\langle \ell \rangle$  – длина среднего пробега в паре молекулы), толщина релаксационного слоя  $\Delta_{\text{Rel}} = 4\Delta_K$ ; по-видимому, установлению релаксации препятствует нагрев стенки, который и формирует анизотропию функции распределения.

2. С начального момента времени возникает тенденция к потоку вещества из воды в паровой погранслои (что, очевидно, связано с существенной исходной разницей в плотности среды в этих областях), происходит постепенное нагревание пара до температуры выше, чем температура стенки.

3. Максимум температуры пара находится у стенки трубы, а максимум его плотности – на центральной линии парового погранслоя.

### 3. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ (НАВЬЕ–СТОКСА И БАРНЕТТА)

Метод Чэпмена–Энскога получения из кинетического уравнения Больцмана цепочки гидродинамических уравнений состоит в представлении функции распределения посредством асимптотического ряда по малому параметру:

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots$$

В этом случае тензор напряжений и тепловой поток можно также представить в виде рядов (в качестве малого параметра  $\epsilon$  используем число Кнудсена  $\text{Kn}$ ):

$$q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}, \quad q_i^{(1)} = -(\lambda \nabla T)_i, \quad q_i^{(2)} = \theta_1 \sum_{k=1}^3 \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \dots,$$

$$\sigma_{ik} = p \delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(1)} + \sigma_{ik}^{(2)}, \quad \sigma_{ik}^{(1)} = -2\mu \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle, \quad \sigma_{ik}^{(2)} = \sigma_{ik}^{(T)} + \sigma_{ik}^{(p,v)}; \quad \langle \mathcal{A}_{ik} \rangle \equiv \frac{1}{2} (\mathcal{A}_{ik} + \mathcal{A}_{ki}) - \frac{1}{3} \delta_{ik} \mathcal{A}_{jj}, \quad (13)$$

$$(\sigma_{ik}^{(j)}, q_i^{(j)})_{j=1,2} \sim \text{Kn}^j, \quad \text{Kn} = \frac{\ell_0}{\Lambda_0} = \frac{\text{Ma}}{\text{Re}}, \quad \text{Ma} = \frac{v_0}{c_0}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_0 v_0 \Lambda_0}{\mu_0},$$

где величины  $v_0, \ell_0, \Lambda_0, \mu_0, p_0, \rho_0, T_0, c_0$  – соответственно, характерные значения: скорости движения среды, средней длины  $\langle \ell \rangle$  свободного пробега молекул (массы  $m$ ), размера течения, коэффициента сдвиговой вязкости  $\mu$ , изотропного давления  $p$ , плотности среды  $\rho$ , температуры среды  $T$  и локальной скорости звука в среде  $c$ ; полагаем, что справедливо уравнение состояния среды  $p = p(\rho, T)$  в аналитической табличной форме.

В вышеприведенных формулах из барнеттовских напряжений выделены температурные:

$$\sigma_{ik}^{(T)} = \xi_3 \mu^2 \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k} \right\rangle + \xi_5 \frac{\mu^2}{T} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\rangle,$$

при этом остальные члены содержат производные от компонентов скорости и давления:

$$\sigma_{ik}^{(p,v)} = \xi_3 \mu^2 \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right\rangle - \xi_5 \mu^2 \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_k} + \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + 2 \sum_j \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\rangle \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \dots$$

Барнеттовские коэффициенты  $\theta_1, \xi_j \sim O(1)$  предполагаются (ограниченными в изменении) функциями переменных  $\mu, T, \mu'_T$  (в свою очередь, зависящих от вида межмолекулярного взаимодействия).

Поскольку для введенного выше коэффициента первой вязкости имеем  $\mu_0 \approx \rho_0 c_0 \lambda_0$ , то справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sigma_{ik}^{(1)} &\sim \text{Kn} \rho_0 c_0 v_0, & \sigma_{ik}^{(p,v)} &\sim \text{Kn}^2 \rho_0 v_0^2, & q_i^{(1)} &\sim \text{Kn} \rho c_0^3, \\ \sigma_{ik}^{(T)} &\sim \text{Kn}^2 \rho_0 c_0^2 \mathcal{X}, & \sigma_{ik}^{(j \geq 3)} &\sim \text{Kn}^3 \rho_0 c_0 v_0 \mathcal{X}, & q_i^{(2)} &\sim \text{Kn}^2 \rho c_0^2 v_0, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{X} \equiv (\delta T)_0 / T_0$  – характерное значение относительного перепада температур в среде (например, в трубах или каналах:  $(\delta T)_0 = T_{\text{bound}} - T_0$ , где в данном случае  $T_{\text{bound}}$  – усредненная по некоторому отрезку канала температура стенок,  $T_0$  – характерное значение температуры в среднем по сечению течения либо на некотором определенном расстоянии от стенки). Если изменения температуры в течении обусловлены исключительно переходом кинетической энергии движущейся среды в тепловую вследствие диссипативных процессов, то  $\mathcal{X} \ll 1$ , и все барнеттовские члены уравнений сохранения малы по сравнению с навье-стоксовскими (соответствующими наличию только первых двух слагаемых в выражениях для  $\sigma_{ik}$  и  $q_i$ ): их отношение порядка  $\text{Kn}^2 \sim \mathcal{X} \ll 1$  (см. [6]). Однако для  $\mathcal{X} \geq 1$  (данное условие выполняется, например, при контакте жидкости в течении с нагретой до достаточной высокой температуры стенкой канала в упомянутых ранее задачах о теплоотводе и вынужденном охлаждении, см., например, [7]–[9]) уже совершенно неправомерно игнорировать наличие как минимум трех слагаемых в вышеприведенных выражениях для  $\sigma_{ik}$  и  $q_i$ . В этом случае температурные напряжения  $\sigma_{ik}^{(T)}$  могут быть того же порядка величины, что и обычные вязкие напряжения  $\sigma_{ik}^{(1)}$ , входящие в уравнения Навье–Стокса. Действительно,  $\sigma_{ik}^{(T)} / \sigma_{ik}^{(1)} \sim \text{Kn} \text{Ma}^{-1} \mathcal{X} = O(1)$ , и малость числа Кнудсена (условие возможности описания течения как движения “сплошной среды” с физической точки зрения и условие формальной применимости метода Чэпмена–Энскога – с математической) может компенсироваться произведением двух последних сомножителей  $\mathcal{X}, \text{Ma}^{-1} \geq 1$  (при этом необходимо учитывать, что характерный размер  $\Lambda_0$ , входящий в определение параметра Кнудсена, должен соответствовать некоторому приграничному слою, а не полному масштабу системы). В то же время (в частности, при рассмотрении критических режимов течения в задачах, связанных с гидродинамикой теплоносителей) справедлива оценка  $\sigma_{ik}^{(p,v)} / \sigma_{ik}^{(1)} \sim \text{Kn} \text{Ma} = o(1)$ .

Отметим, что понятие “пограничного слоя”, в котором сосредоточено основное влияние эффектов учета дополнительных барнеттовских членов в уравнениях гидродинамики, необходимо существенным образом модифицировать: это связано с тем, что уравнения движения в приграничной области не могут быть построены в соответствии с теорией Прандтля из-за наличия интенсивной “термострессовой псевдоконвекции”, обусловленной наличием значительного температурного градиента в окрестности нагреваемой стенки. Исключение уравнения для поперечной компоненты скорости (существование которой обусловлено не гравитационными или какими-либо иными внешними силами, а изменением плотности среды при ее контакте с нагревателем, вследствие чего происходит “оттеснение” внешних “холодных” слоев жидкости/газа от источника тепла) в погранслое в барнеттовском приближении невозможно и основное предположение теории Прандтля о том, что давление в нем “...как бы создается внешним течением” (см. [10]) неправомерно. Более того, в рассматриваемом случае неправомерно использование также классической модели конвективного погранслоя (см. [11]): выделение для отдельного рассмотрения пристенного слоя определенной толщины ( $\delta > \delta_{\text{Prandtl}} \sim \sqrt{\Lambda_0 \mu_0 / v_0}$ , где  $\Lambda_0, \mu_0, v_0$  – ха-

ракетные величины течения) в рассматриваемых условиях представляется рациональным только на условиях принятия некоторого априорного критерия ослабления поперечного конвективного движения среды (с характерной скоростью порядка  $v_{\text{conv}} \sim \mathcal{X}^3 v_\mu$ , где  $v_\mu = \mu_0 / (\rho_0 \Lambda_0)$  – так называемая вязкая скорость течения).

Приведем расчетные уравнения в приближениях Навье–Стокса и (модифицированного) Барнетта в цилиндрической системе координат:

уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho r}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z r)}{\partial z} = 0,$$

уравнения переноса импульса и энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho v_r^2 + p)r)}{\partial r} + \frac{\partial \rho v_z v_r r}{\partial z} &= p + \frac{\partial(r\sigma_{rr})}{\partial r} + r \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} - \sigma_{\varphi\varphi}, \\ \frac{\partial(\rho v_\varphi r)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_z v_\varphi r)}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_r v_\varphi r)}{\partial r} &= -\rho v_r v_\varphi, \\ \frac{\partial(\rho v_z r)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho v_z^2)r}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v_z v_r r)}{\partial r} \frac{\partial(r\sigma_{zr})}{\partial r} + r \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}, \\ \frac{\partial(er)}{\partial t} + \frac{\partial((e + p)v_z r)}{\partial z} + \frac{\partial((e + p)v_r r)}{\partial r} &= \\ = r \cdot \text{div}(\kappa \cdot \text{grad } T) + \frac{\partial(r(v_r \sigma_{rr} + v_z \sigma_{zr}))}{\partial r} + r \frac{\partial(v_r \sigma_{zr} + v_z \sigma_{zz})}{\partial z}. \end{aligned}$$

Компоненты тензора вязких напряжений равны  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^N + \sigma_{ij}^B$ , где первое слагаемое соответствует вязкости уровня приближения Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^N &= 2\mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v} \right), & \sigma_{\varphi\varphi}^N &= 2\mu \left( \frac{1}{r} v_r - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v} \right), \\ \sigma_{zz}^N &= 2\mu \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \nabla \mathbf{v} \right), & \sigma_{zr}^N &= \mu \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), & \nabla \mathbf{v} &\equiv \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r}, \end{aligned}$$

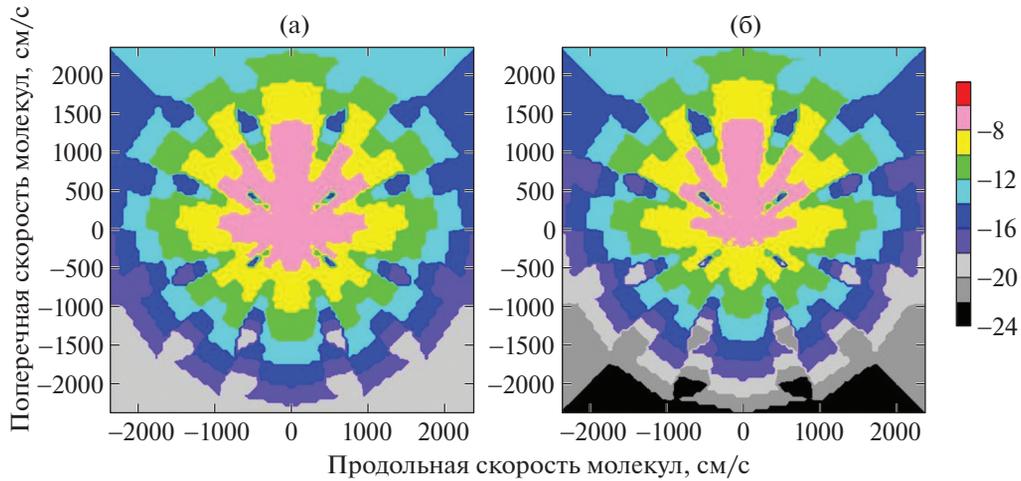
а второе слагаемое соответствует вязкости уровня приближения Барнетта:  $\sigma_{ij}^B = (\mu/p)^2 \cdot \Phi_{ij}$ . Обозначения и размерности переменных в данных формулах следующие:  $t$  – время [с],  $\mathbf{v} = (v_z, v_r, v_\varphi)$  – скорость течения [м/с],  $\mu$  – коэффициент вязкости [Па·с]. Явный вид тензорных коэффициентов  $\Phi_{ij}$  приведен в Приложении к монографии [12].

Уравнение баланса импульса при наличии контакта среды с нагревателем, обеспечивающего наличие однородного ( $T = T_{\text{bound}} = \text{const}$ ) или неоднородного ( $T = T_{\text{bound}}(\mathbf{x}, t)$ ) температурного поля, и локальных пристенных значениях  $\text{Ma} \leq 1$ ,  $\text{Re} \gg 1$  замыкается учетом группы слагаемых  $\sigma_{ik}^{(T)}$  во втором приближении для тензора напряжений. Будем полагать для простоты, что  $f_i^{(\text{out})} \equiv 0$  (отсутствие внешних массовых сил), коэффициент второй вязкости  $\eta \equiv 0$ .

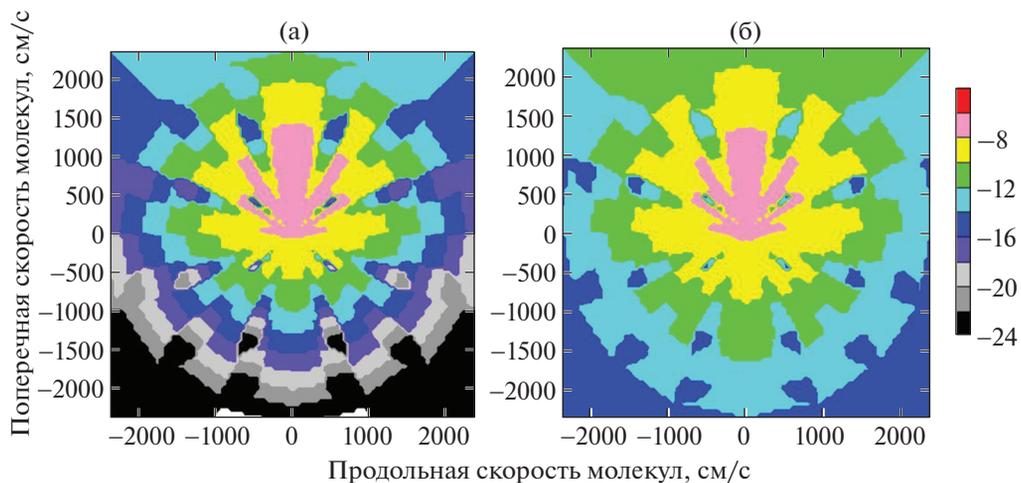
#### 4. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ РАСЧЕТЕ ПОЛНОЙ ОБЛАСТИ

Полная расчетная область – круговой цилиндр (труба) длины  $x_{\text{max}} = 1$  м и радиуса  $R = y_{\text{max}} = 0.005$  м. Внешний нагрев стенок трубы неравномерен и описывается нелинейной функцией с явно выраженным максимумом (см. далее). Расчет во внутренней области осуществляется по газодинамической модели, в погранслое ( $0.004994 < r(\equiv y) < 0.005$ ) – по кинетической модели.

По длине цилиндра (вдоль оси симметрии) 100 ячеек, по радиусу в погранслое 5 ячеек, во внутренней области основного течения 25 ячеек (область 2).



Фиг. 3. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: (а) – для радиуса  $r = 4.995$  мм, (б) – для радиуса  $r = 4.996$  мм ( $z = H/2$ ).

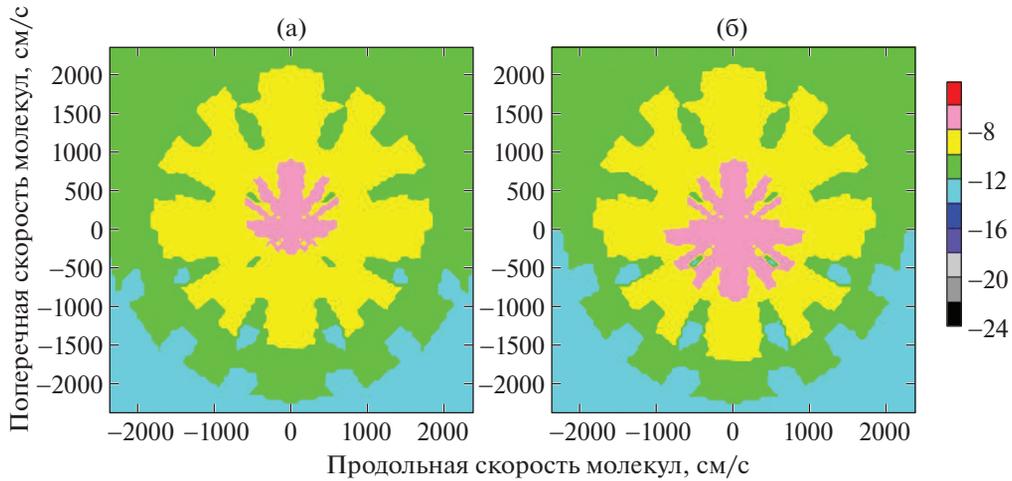


Фиг. 4. Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: (а) – для радиуса  $r = 4.996$  мм, (б) – для радиуса  $r = 4.997$  мм ( $z = H/2$ ).

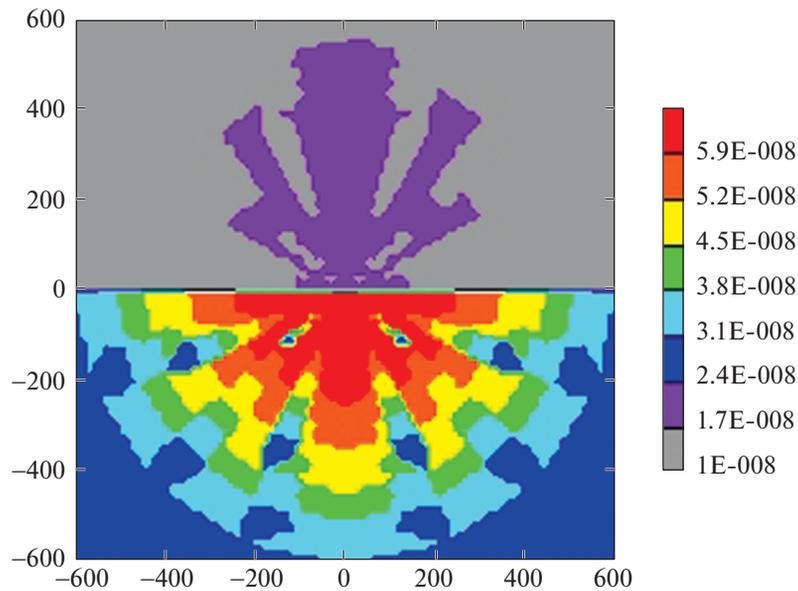
Начальные данные задаются по областям. Продольная скорость  $u$  воды в начальный момент времени зависит от радиальной координаты точки и изменяется от  $u_0 = 50$  м/с на оси симметрии до нуля на внешней границе  $y_{\max}$ :  $u = u_0[1 - (y/y_{\max})^2]$  (пуазейлевский профиль). Плотности пара придавалось для анализа получаемых расчетных данных два значения:  $\rho_0^{(1)} = 10$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_0^{(2)} = 200$  кг/м<sup>3</sup> (последнее значение соответствует состоянию фазового перехода “пар–жидкость”); температура  $T_0 = 373 + (673 - 373)\sin^2(\pi x)$  К. Давление оказывается в диапазоне  $p_0 = 1.011 \times 10^5 - 2.981 \times 10^6$  Па. Во внутренней области основного течения (области гидродинамического расчета,  $0 < y < 0.004994$  м) давление линейно зависит от продольной координаты:

$$p = \frac{p_{x,\min}(x_{\max} - x) + p_{x,\max}x}{x_{\max}}, \quad p_{x,\max} = 1.013 \times 10^5 \text{ Па},$$

$$p_{x,\min} = p_{x,\max} - \Delta p, \quad \Delta p = \frac{4u_0\mu_0}{2} x_{\max}, \quad \mu_0 = 2.7567 \times 10^{-4} \text{ Па с.}$$



**Фиг. 5.** Профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области: (а) – для радиуса  $r = 4.998$  мм, (б) – для радиуса  $r = 4.999$  мм.



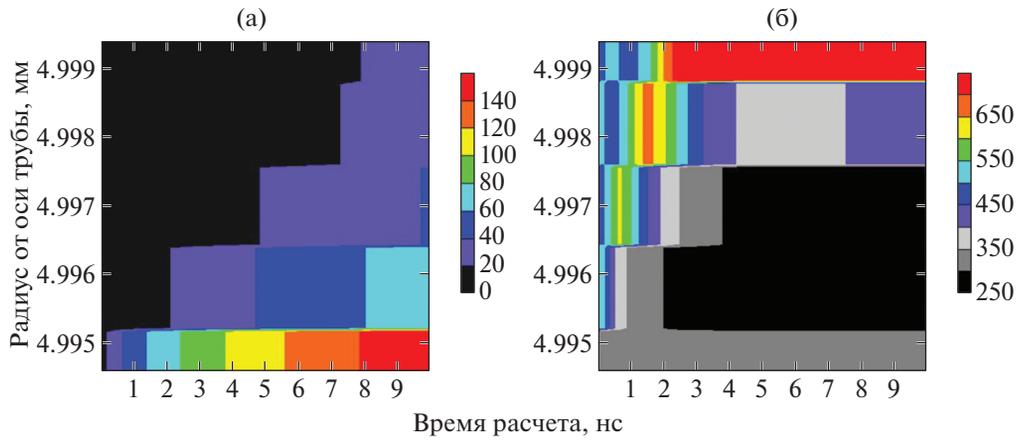
**Фиг. 6.** Функция распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс (у твердой стенки трубы). По оси абсцисс – продольная (тангенциальная) скорость  $v_z$  [см/с], по оси ординат – поперечная (радиальная) скорость  $v_r$  [см/с] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя в поперечном сечении пограничного кинетического слоя.

Начальная температура воды  $T_0 = 373$  К, плотность воды  $\rho_0 = 958.457–958.458$  кг/м<sup>3</sup>.

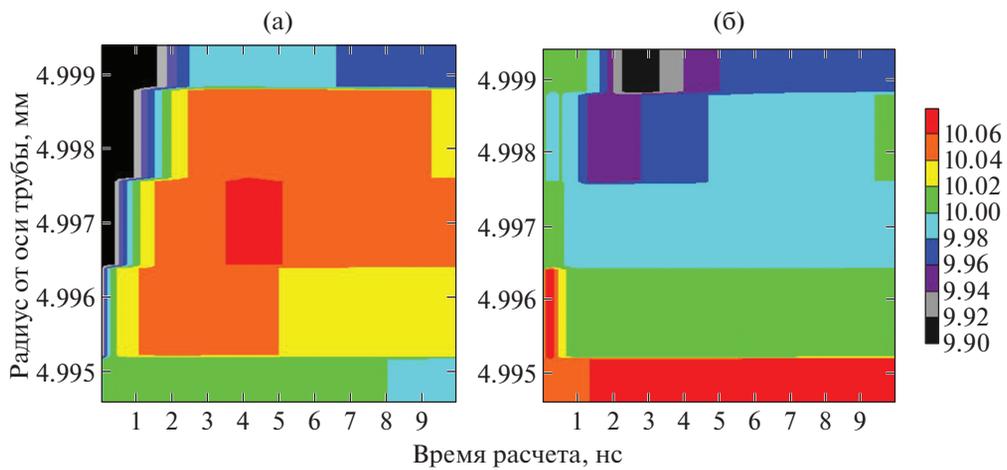
Граничные условия:

1) на внешней границе трубы  $r_{\max} = R_0$  задана температура, равная начальной температуре в прилегающей области в соответствии с приведенной выше формулой:  $p_{\text{wall}} = 1.011 \times 10^5 - 2.981 \times 10^6$  Па. Нормальная и тангенциальная скорости равны нулю;

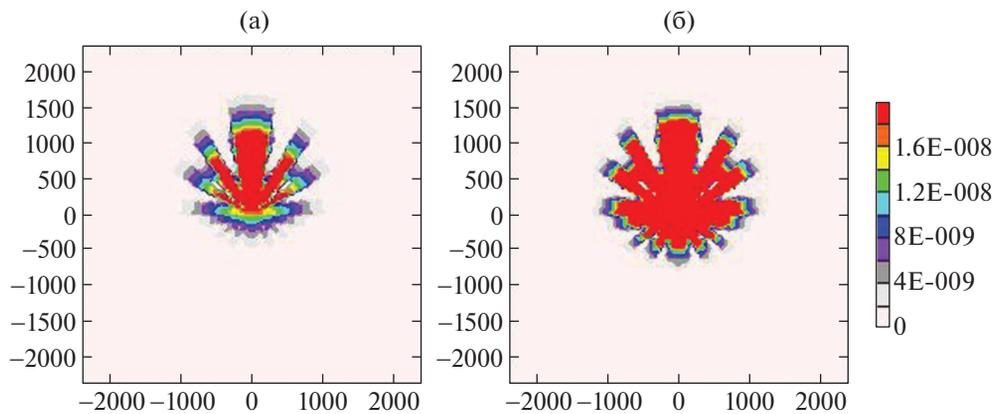
2) на торцевых границах  $x = 0$  (для кольцевой области входа в погранслои и круговой области входа в основное течение) заданы параметры входящего потока, примерно равные начальным величинам из прилегающих внутренних ячеек. Продольная граничная скорость для погранслоя задается 0.1 м/с, для внутренней области 50 м/с;



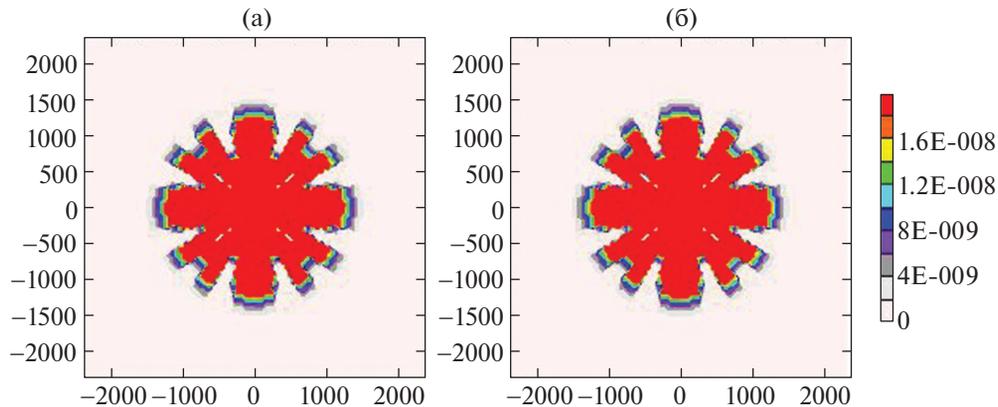
Фиг. 7. (а) – Поперечная (радиальная) скорость  $v_r$  [см/с] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя, (б) – продольная (тангенциальная) скорость  $v_z$  [см/с] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя.



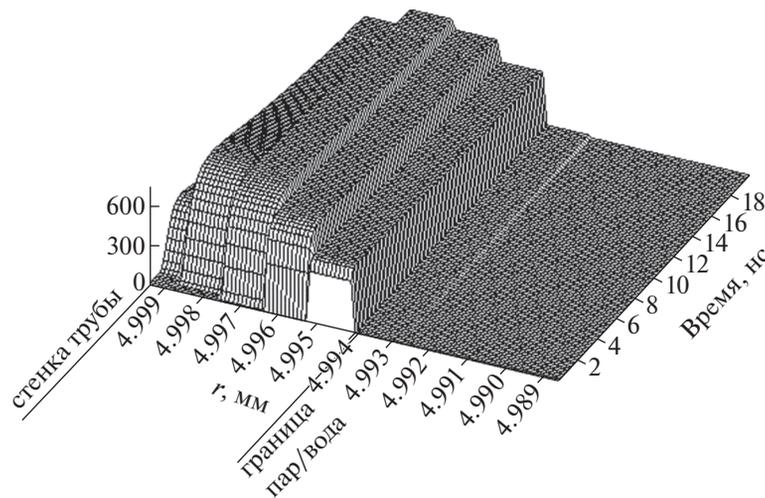
Фиг. 8. (а) – Плотность  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя, (б) – температура [K] в поперечном сечении пограничного кинетического слоя.



Фиг. 9. Функции распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс в кинетическом погранслое: (а) – на расстоянии  $0.1\Delta_K$ , (б) – на расстоянии  $0.9\Delta_K$  от твердой стенки,  $\Delta_K$  – толщина кнудсеновского погранслоя. Обозначения осей те же, что на фиг. 6.



**Фиг. 10.** Функции распределения молекул воды в среднем по высоте поперечном сечении трубы на момент времени 10 нс в релаксационном слое: (а) – на расстоянии  $0.1\Delta_{\text{Rel}}$ , (б) – на расстоянии  $0.9\Delta_{\text{Rel}}$  от твердой стенки,  $\Delta_{\text{Rel}} = 4\Delta_K$  – толщина релаксационного слоя. Обозначения осей те же, что на фиг. 6.



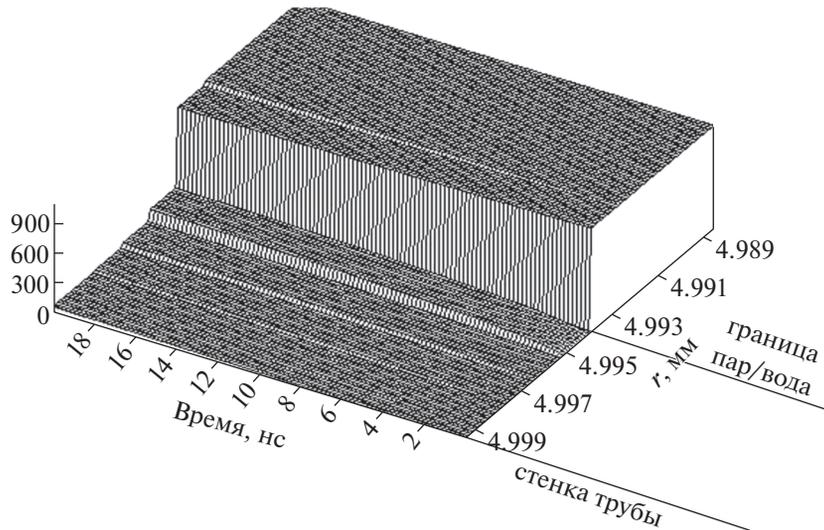
**Фиг. 11.** Поперечная скорость в кинетическом погранслое  $v_r$  [м/с] в среднем по высоте поперечном сечении трубы.

3) на торцевых границах  $x = x_{\text{max}}$  заданы “нулевые производные” по нормали от всех газодинамических величин.

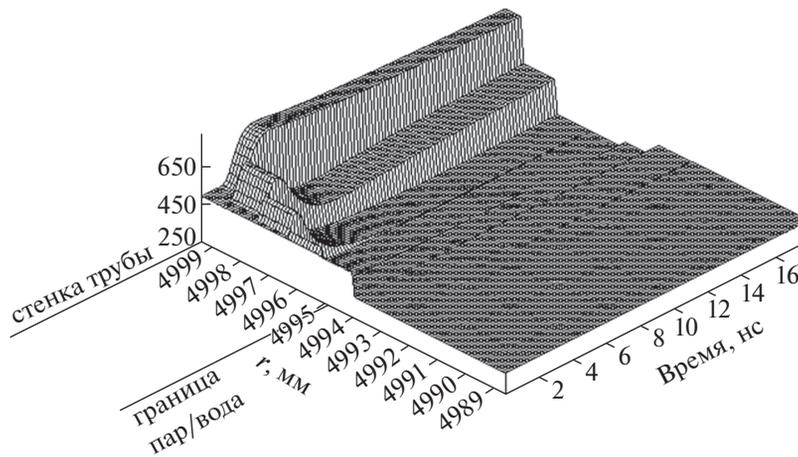
Область погранслоя рассчитывается по уравнению БГК. Внутренняя область – по газодинамической системе (модифицированного Барнетта или Навье–Стокса) с учетом вязкости и теплопроводности. Газодинамическая область разбита на две подобласти на радиусе  $0.004988$  м, так что толщина дополнительной релаксационной подобласти, прилегающей к погранслою, равна толщине погранслоя и имеет также 5 ячеек по радиусу. В нижней подобласти 25 ячеек по радиусу. Граница между подобластями внутренняя эйлерова, не требующая дополнительных граничных условий. В расчете использовалось уравнение состояния воды из [13].

Более подробно рассмотрим расчеты с начальной плотностью пара  $\rho_0^{(2)}$  в погранслою.

На фиг. 3–5 показаны профили функции распределения молекул по скоростям в расчетной области по мере приближения вдоль радиуса к нагреваемой стенке при  $t = 10$  нс. Видно существенное увеличение степени анизотропии профиля функции распределения, т.е. отклонения от равномерного распределения по скоростям. На фиг. 6 показана функция распределения на стенке, она представляет собой квазимаквелловское распределение, практически сразу преобразующееся в существенно неоднородное по скоростям (см. фиг. 5).



Фиг. 12. Плотность в кинетическом погранслое  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] в среднем по высоте поперечном сечении трубы.



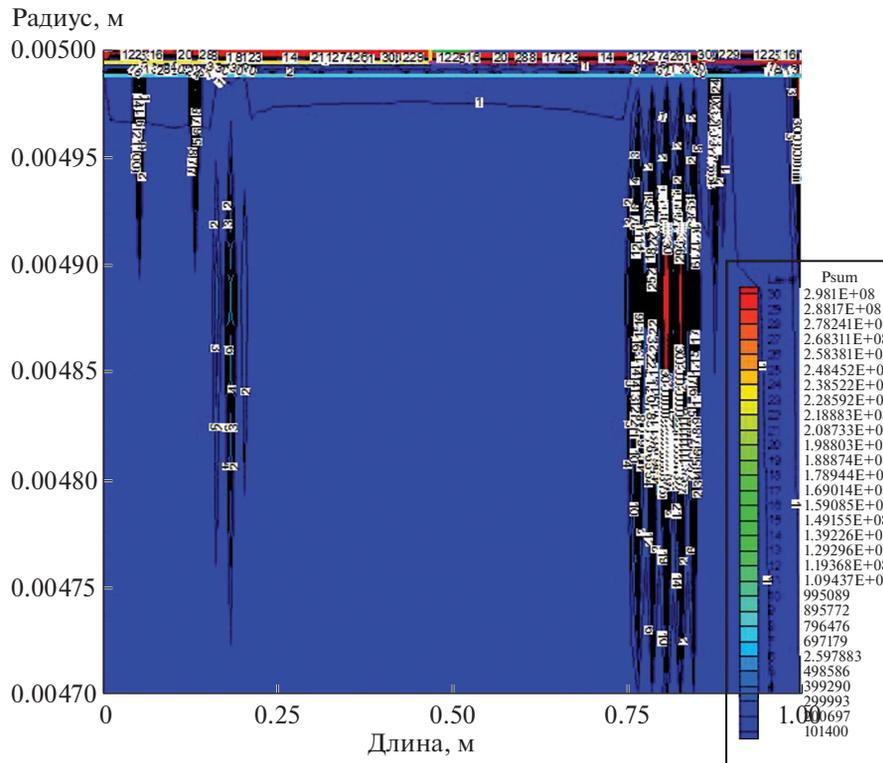
Фиг. 13. Температура в кинетическом погранслое  $T$  [K] в среднем по высоте поперечном сечении трубы.

На фиг. 7 показаны профили радиальной и тангенциальной скорости массового течения в поперечном сечении пограничного кинетического слоя в зависимости от времени. Видно, что радиальная скорость существенно растет со временем у верхнего края кинетического погранслоя, в то время как тангенциальная скорость еще быстрее растет около стенки. На фиг. 8 показаны срезы плотности и температуры в поперечном сечении пограничного кинетического слоя в зависимости от времени и радиуса. По ним приближенно можно судить о динамике пространственного изменения макропараметров. Зависимость  $\rho(r, t)$  можно считать куполовидной, в то время как температура  $T(r, t)$  фактически аппроксимируется почти равномерным по времени увеличением температуры слоя, максимально далекого от стенки (чрезвычайно быстрая перекачка энергии через кинетический погранслой).

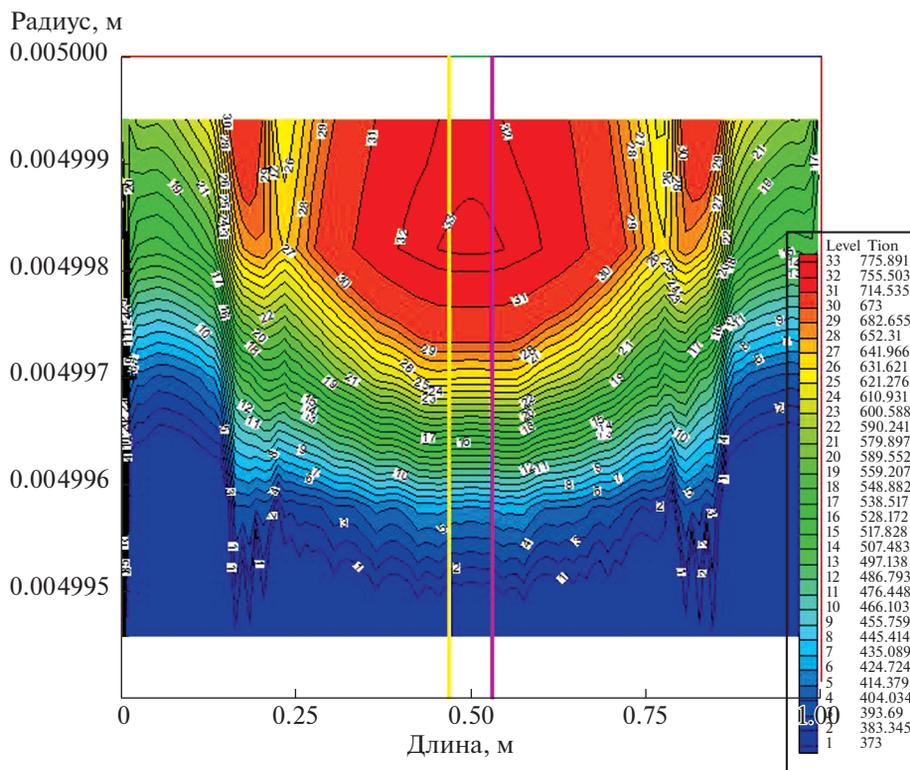
На фиг. 9 и 10 показана изотропизация функций распределения в релаксационном подслое (над кинетическим погранслоем) при переходе к гидродинамической области.

На фиг. 11–13 показана в динамике зависимость радиальной скорости, плотности и температуры (интегральных величин) в погранслое в зависимости от радиуса и времени.

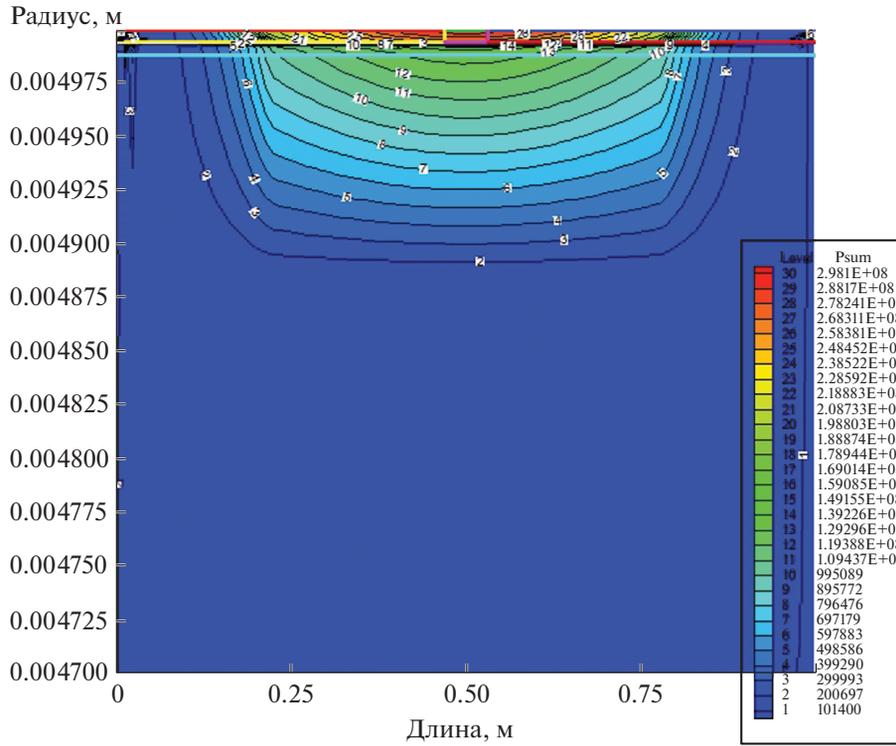
На фиг. 14, 15 и 16, 17 – сравнение давления и температуры в рассчитываемом по гидродинамическим формулам погранслое для случаев приближения Барнетта и для Навье–Стокса.



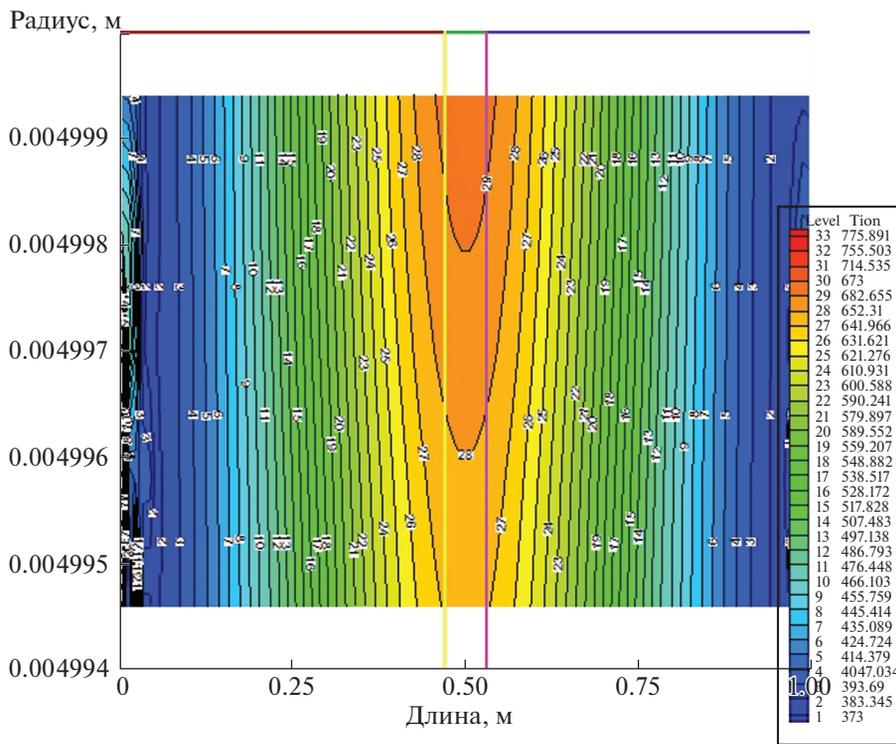
**Фиг. 14.** Давление в области гидродинамического (модифицированный Барнетт) расчета на время  $t_{1000} = 0.806 \times 10^{-8}$  с (1000-й шаг по времени) при начальной плотности среды погранслоя  $\rho_0^{(1)} = 10 \text{ кг/м}^3$ .



**Фиг. 15.** Температура в погранслое на момент времени  $t_{1000} = 10^{-8}$  с (при начальной плотности среды погранслоя  $\rho_0^{(1)} = 10 \text{ кг/м}^3$ ). В основной гидродинамической области – расчет по модифицированному Барнетту.



Фиг. 16. Давление в погранслое на момент времени  $t_{1000} = 10^{-8}$  с (начальная плотность среды погранслоя  $\rho_0^{(1)} = 10 \text{ кг/м}^3$ ).



Фиг. 17. Температура в погранслое на момент времени  $t_{1000} = 10^{-8}$  с (начальная плотность среды погранслоя  $\rho_0^{(1)} = 10 \text{ кг/м}^3$ ).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан и реализован универсальный алгоритм расчета течений в каналах и трубах при наличии значительного теплового потока от стенки, учитывающий возможность введения кинетического расчета в погранслое. Установлено, что течение в погранслое существенно зависит от формы уравнения среды в основной области расчета и метода учета вязкости там же. При этом успешно внедрен программный подход перехода от области кинетических расчетов по БГК-методике к области гидродинамических расчетов по модифицированному Барнетту или по Навье–Стоксу. Полученная реализация сочетания гидродинамических расчетов в основной области и погранслое основана на введении релаксационной подобласти, размер которой зависит от размеров погранслоя и степени различия квазимаквелловских граничных условий и формы функции внешнего нагрева стенки. Изменение начальных условий для плотности и температуры погранслоя в достаточно широком диапазоне величин (до порядка) не выявили изменений кинетики в слое и возможности его сочетаемости с гидродинамической областью. Было высказано предположение о частичном несовпадении термодинамических величин канонического ансамбля жидкости и микроканонического ансамбля в погранслое (связанное с появлением вихревых структур и фазовым переходом в жидкости). В расчетах это предположение явного подтверждения не нашло, хотя тенденции были намечены – для точных заключений требуется продолжение расчетов на существенно большие времена.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Burnett D.* The distribution of molecular velocities and the mean motion in a non-uniform gas // *Proc. Lond. Math. Soc.* 1936. V. 40. P. 382–435.
2. *Chapman S., Cowling T.G.* The mathematical theory of non-uniform gases. Cambridge: Cambridge Univer. Press, 1970.
3. *Enskog D.* The numerical calculation of phenomena in fairly dense gases // *Arkiv Mat. Astr. Fys.* 1921. T. 16. P. 1–60.
4. *Chapman S.* On the law of distribution of molecular velocities, and on the theory of viscosity and thermal conduction, in a non-uniform simple monatomic gas // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 1916. V. 216. P. 279–348.
5. *Chapman S.* On the kinetic theory of a gas. Part II: A composite monatomic gas: diffusion, viscosity, and thermal conduction // *Phil. Trans. R. Soc. A.* 1918. V. 217. P. 115–197.
6. *Коган М.Н., Галкин В.С., Фридлиндер О.Г.* О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды // *Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа.* 1970. № 2. С. 13–21.
7. *Кузнецов Ю.Н.* Теплообмен в проблеме безопасности ядерных реакторов. М.: Энергоатомиздат, 1989.
8. *Петухов Б.С., Генин Л.Г., Ковалев С.А.* Теплообмен в ядерных энергетических установках. М.: Атомиздат, 1974.
9. *Стырикович М.А., Полонский В.С., Циклаури Г.В.* Тепломассообмен и гидродинамика в двухфазных потоках атомных электрических станций. М.: Наука, 1982.
10. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.
11. *Лойцянский Л.Г.* Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
12. *Николаева О.В., Забродина Е.А., Фимин Н.Н., Чечёткин В.М.* Гидродинамические течения в нагреваемых трубах. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2020.
13. Revised Release on the IAPWS Formulation 1995 for the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance for General and Scientific Use. The International Association for the Properties of Water and Steam (President: Professor Tamara Petrova. Moscow, Russia, 2014).