УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.9

ВОПРОС СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОГО БЕСКОНЕЧНОГО СТЕРЖНЯ В ПОЛЕ С СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ[1)]

© 2021 г. Л. А. Бекларян[1,], А. Л. Бекларян[2,**]**

[1] *117418 Москва, Нахимовский пр-т, 47, ЦЭМИ РАН, Россия*

[2] *101000 Москва, Мясницкая ул., 20, НИУ Высшая школа экономики, Россия*

**e-mail: lbeklaryan@outlook.com*

***e-mail: abeklaryan@hse.ru*

Поступила в редакцию 22.12.2020 г.
Переработанный вариант 07.04.2021 г.
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Установлено существование семейства ограниченных солитонных решений для конечно разностного волнового уравнения с квадратичным потенциалом. Доказательство проводится в рамках формализма, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между солитонными решениями бесконечномерной динамической системы и решениями семейства функционально-дифференциальных уравнений точечного типа. Для рассматриваемого класса уравнений ключевым является также и наличие ряда симметрий. Библ. 18. Фиг. 3.

Ключевые слова: волновое уравнение, солитонные решения, нелинейный потенциал.

DOI: 10.31857/S0044466921120061

ВВЕДЕНИЕ

Для уравнений математической физики, являющихся уравнениями Эйлера–Лагранжа соответствующих вариационных задач, важный класс решений – это решения типа бегущей волны (солитонные решения) (см. [1], [2]). В ряде моделей такие решения хорошо приближаются решениями типа бегущей волны для конечно-разностных аналогов исходных уравнений, которые, взамен непрерывной среды, описывают взаимодействие сгустков среды, помещенных в вершинах решетки (см. [1], [3]). Возникающие системы относятся к классу бесконечномерных динамических систем. К наиболее широко рассматриваемым классам подобных задач относятся бесконечномерные системы с потенциалами Френкеля–Конторовой (периодические и медленно растущие потенциалы) и Ферми–Паста–Улама (потенциалы экспоненциального роста), широкий обзор которых приведен в [4].

В теории пластической деформации изучается бесконечномерная динамическая система

$$m\ddot{y}_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + \phi(y_i), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где потенциал $\phi(\cdot)$ задается гладкой периодической функцией. Уравнение (1) является системой с потенциалом Френкеля–Конторовой (см. [3]). Такая система является конечно-разностным аналогом нелинейного волнового уравнения, моделирует поведение счетного числа шаров массы m, помещенных в целочисленных точках числовой прямой, где каждая пара соседних шаров соединена между собой упругой пружиной, и описывает распространение продольных волн в бесконечном однородном абсолютно упругом стержне.

Определение 1. $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ называется решением системы (1), если для любого $i \in \mathbb{Z}$ функция $y_i(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, а ее производная является абсолютно непрерывной функцией, и такая функция почти всюду удовлетворяет уравнению (1).

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-01-00147).

Изучение таких систем с различными потенциалами является одним из интенсивно развивающихся направлений в теории динамических систем. Для них центральной задачей является изучение солитонных решений (решений типа бегущей волны) как одного из наблюдаемых классов волн.

Определение 2. Будем говорить, что решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ системы (1), определенное для всех $t \in \mathbb{R}$, имеет *тип бегущей волны* (*является солитонным решением*), если существует $\tau > 0$, не зависящая от t и i такая, что при всех $i \in \mathbb{Z}$ и $t \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t).$$

Константу τ будем называть *характеристикой* бегущей волны.

Таким образом, для рассматриваемого конечно-разностного аналога волнового уравнения изучение солитонных решений сводится к исследованию пространства решений краевой задачи

$$m\ddot{y}_i(t) = y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t) + \phi(y_i(t)), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$y_i(t+\tau) = y_{i+1}(t), \quad \tau > 0, \tag{3}$$

с линейными нелокальными краевыми условиями.

Фазовым пространством системы уравнений (2) является пространство бесконечных последовательностей

$$\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}^2 = \overline{\prod_{q\in\mathbb{Z}}}\mathbb{R}_q^2, \quad \mathbb{R}_q^n = \mathbb{R}^2, \quad \varkappa \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}^2, \quad \varkappa = \{\mathbf{x}_i\}_{i\in\mathbb{Z}}, \quad \mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2})' \tag{4}$$

со стандартной тихоновской топологией. В пространстве $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}^2$ определим семейство гильбертовых подпространств $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}2\mu}^2$, $\mu \in (0,1)$:

$$\mathcal{K}_{\mathbb{Z}2\mu}^2 = \left\{\varkappa : \varkappa \in \mathcal{K}_{\mathbb{Z}}^2;\ \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|x_i\|_{R^2}^2 \mu^{2|i|} < +\infty\right\}$$

с нормой

$$\|\varkappa\|_{\mathbb{Z}2\mu} = \left[\sum_{i\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{x}_i\|_{R^2}^2 \mu^{2|i|}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Определим линейный оператор $\mathbb{A}$, оператор сдвига $\mathbb{T}$ и нелинейный оператор $\mathbb{F}$, действующие непрерывно из пространства $\mathcal{K}_{\mathbb{Z}}^2$ в себя по следующему правилу: для любых $i \in \mathbb{Z}$, $\varkappa \in \mathcal{K}^2$

$$(\mathbb{A}\varkappa)_i = (x_{i2}, m^{-1}[x_{(i+1)1} - 2x_{i1} + x_{(i-1)1}])', \quad (\mathbb{T}\varkappa)_i = (\varkappa)_{i+1}, \quad (\mathbb{F}(\varkappa))_i = (0, m^{-1}\phi(x_{i1}))'.$$

Заметим, что оператор сдвига $\mathbb{T}$ *перестановочен* с операторами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{F}$, что свойственно моделям, описывающим процессы в однородных средах.

Система (2)–(3), задающая солитонные решения, может быть переписана в следующей операторной форме:

$$\dot{\varkappa} = \mathbb{A} + \mathbb{F}(), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$\varkappa(t+\tau) = \mathbb{T}\varkappa(t), \tag{6}$$

являющейся краевой задачей с линейными нелокальными краевыми условиями. Краевые условия (6) означают, что *сдвиг решения по времени равен сдвигу по пространству*.

Одним из методов исследования таких систем является конструктивное построение решений, использующее явный вид потенциала и, далее, методами теории возмущений установление факта существования солитонных решений и для близких потенциалов. Другим, часто применяемым способом, является использование наличия симметрий у исходных уравнений. Важным является не только вопрос существования солитонных решений, но и вопрос их единственности. Для этого одним из подходов служит локализация решений в пространстве бесконечно дифференцируемых или аналитических функций. Как правило, в пространстве бесконечно дифференцируемых функций удается показать существование решения, а в пространстве аналитических функций показать их единственность (см. [4]).

В настоящей работе используются возможности иного подхода и созданного на его основе формализма (см. [5]–[8]). Используется локализация солитонных решений заданием их асимптотики как по пространству (параметризированное семейство бесконечномерных фазовых пространств в форме гильбертовых пространств $\mathcal{K}^2_{\mathbb{Z}2\mu}$, $\mu \in (0, 1)$), так и по времени. Такой подход основан на существовании взаимно однозначного соответствия солитонных решений для бесконечномерных динамических систем с решениями семейства индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа (см. [5]–[12]).

В случае рассматриваемой задачи солитонные решения (решения системы (2)–(3)) находятся во взаимно однозначном соответствии с решениями однопараметрического семейства индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1}[z_1(t-\tau) - 2z_1(t) + z_1(t+\tau) + \Phi(z_1(t))], \tag{8}$$

где параметром семейства является $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Связь между этими решениями имеет следующий вид:

$$z_1(t) = y_0(t), \quad z_2(t) = \dot{y}_0(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Для изучения вопросов существования и единственности солитонных решений предлагается локализация решений индуцированных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа в пространствах функций, мажорируемых функциями заданного экспоненциального роста с показателем экспоненты в качестве параметра:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}^n_\mu C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ z(\cdot) : z(\cdot) \in C^{(k)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| z^{(r)}(t)\mu^{|t|} \right\|_{R^n} < +\infty \right\}, \\ \left\| z(\cdot) \right\|^{(k)}_\mu = \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| z^{(r)}(t)\mu^{|t|} \right\|_{R^n}, \quad k = 0, 1, \ldots, \quad \mu \in (0, +\infty).\end{gathered} \tag{10}$$

Такой подход оказывается особенно успешным для систем с потенциалами Френкеля–Конторовой. При минимальных ограничениях на потенциал $\phi(\cdot)$ в виде наличия условия Липщица (квазилинейные потенциалы) отмеченная задача была исследована в монографии [8]. Соответствующую константу Липщица для потенциала $\phi(\cdot)$ будем обозначать через L_ϕ.

Рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

$$C_\phi \tau(2\mu^{-1} + 1) = \ln \mu^{-1}, \tag{11}$$

где

$$C_\phi = \max\{1; 2m^{-1}\sqrt{L^2_\phi + 2}\}.$$

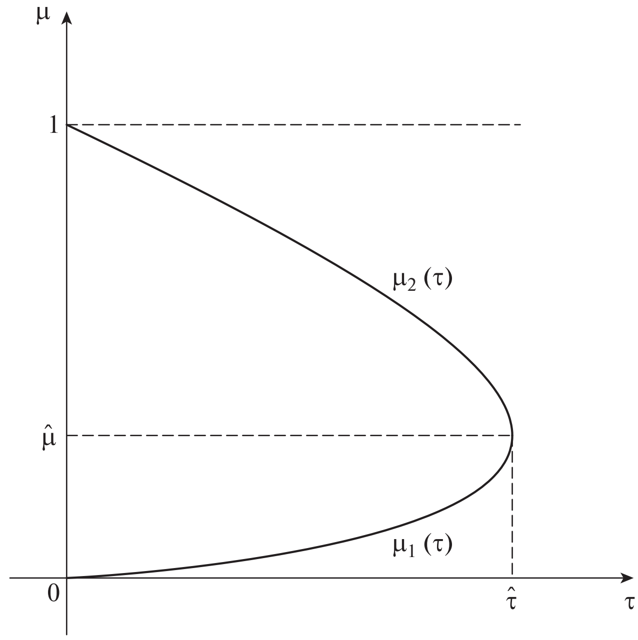
Из уравнения (11) определяется неотрицательная функция $\tau(\mu)$, $\mu \in [0, 1]$, со свойством $\tau(0) = \tau(1) = 0$ и с единственной точкой экстремума (максимума) $\hat{\mu} \in (0, 1)$. Функция $\tau(\mu)$ на полуинтервале $[0, \hat{\mu})$ – монотонно возрастающая, а на полуинтервале $(\hat{\mu}, 1]$ – монотонно убывающая. Введем обозначение $\hat{\tau} = \tau(\hat{\mu})$. Для величины $\hat{\tau}$ имеет место некоторая абсолютная оценка $\hat{\tau} \le (2C_\phi)^{-1}$ и, в частности, $\hat{\tau} \le 1/2$. На интервале $[0, \hat{\tau})$ зависимость μ от τ задается двумя ветвями функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$, представленными на фиг. 1.

Сформулируем теорему существования и единственности решения для индуцированного функционально-дифференциального уравнения (7)–(8).

Теорема 1 (см. [8]). *Пусть потенциал Φ удовлетворяет условию Липщица с константой L_Φ. Тогда при любых начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$, $\bar{t} \in \mathbb{R}$ и характеристиках $\tau > 0$, удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

в пространстве $\mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^\tau \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ для системы функционально-дифференциальных уравнений (7)–(8) существует и причем единственное решение $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, такое, что оно удовлетворяет начальным условиям $z_1(\bar{t}) = a$, $z_2(\bar{t}) = b$. Такое решение, как элемент пространства $\mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$, непрерывно зависит от начальных данных $a, b \in \mathbb{R}$, а также массы m, характеристики τ и потенциала $\Phi(.)$.



Фиг. 1. Графики функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$.

Теорема 1 не только гарантирует существование решения, но и задает ограничение его возможного роста по времени t. Очевидно, что при каждом $0 < \tau < \hat{\tau}$ пространства $\mathcal{L}^2_{(\mu_2(\tau)-\varepsilon)}C^{(0)}(\mathbb{R})$ при малых $\varepsilon > 0$ намного уже, чем пространства $\mathcal{L}^2_{(\mu_1(\tau)+\varepsilon)}C^{(0)}(\mathbb{R})$. Теорема гарантирует существование решения в более узких пространствах и единственность в более широких пространствах.

Теорема 1 допускает переформулировку в терминах решений типа бегущей волны (солитонных решений) для исходного волнового уравнения (в терминах системы (2)–(3)).

Теорема 2 (см. [8]). *Пусть потенциал* Φ *удовлетворяет условию Липщица с константой* L_Φ. *Тогда при любых начальных данных* $\overline{i} \in \mathbb{Z}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $\overline{t} \in \mathbb{R}$ *и характеристиках* $\tau > 0$, *удовлетворяющих условию*

$$0 < \tau < \hat{\tau},$$

для исходной системы дифференциальных уравнений (2) *существует единственное решение* $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ *типа бегущей волны* (*солитонное решение*) *с характеристикой* τ *такое, что оно удовлетворяет начальным условиям* $y_{\overline{i}}(\overline{t}) = a$, $\dot{y}_{\overline{i}}(\overline{t}) = b$; *для любого параметра* $\mu \in (\mu_1(\tau), \mu_2(\tau))$ *значения вектор-функции*

$$\omega(t) = \{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$$

при любом $t \in \mathbb{R}$ *принадлежат пространству* $\mathcal{K}^2_{\mathbb{Z}2\mu}$, *а функция*

$$\rho(t) = \|\omega(t)\|_{2\mu}$$

принадлежит пространству $\mathcal{L}^1_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$. *Такое решение непрерывно зависит от начальных данных* $a, b \in \mathbb{R}$, *а также массы* m, *характеристики* τ *и потенциала* $\Phi(.)$.

Описание процессов в неоднородных средах и с квазилинейным потенциалом сталкивается с трудностями качественно нового типа. Условие коммутативности правой части системы в операторной форме и оператора сдвига нарушается, вследствие чего пространство солитонных решений оказывается тривиальным. Вместе с тем в рамках развиваемого формализма удается получить “правильное” расширение понятия бегущей волны (солитонного решения) в виде решений типа квазибегущих волн (см. [13], [14]).

Предметом изучения настоящей работы являются ограниченные солитонные решения.

Определение 3. Будем говорить, что солитонное решение $\{y_i(\cdot)\}_{-\infty}^{+\infty}$ системы (1) является ограниченным, если $y_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограниченная функция.

Для рассматриваемой системы с нелинейным потенциалом суть предлагаемого подхода в том, что по исходной системе с нелинейным потенциалом Φ для каждого $\Delta > 0$ определяется вспомогательная система с периодическим потенциалом Φ_Δ периода 2Δ и свойством $\Phi_\Delta|_{[-\Delta,\Delta]} = \Phi|_{[-\Delta,\Delta]}$. Потенциал для такой вспомогательной системы уже является квазилинейным, и к такой системе применимы утверждения теорем 1 и 2, а также ряд утверждений, являющихся следствием наличия симметрий. Если такая вспомогательная система имеет ограниченные солитонные решения и их фазовый портрет полностью расположен в интервале $[-\Delta, \Delta]$, то такие решения будут ограниченными солитонными решениями также и для исходной системы. Реализации такого подхода и посвящена данная работа. Раздел 1 посвящен выводу следствий из существующих симметрий для рассматриваемой системы, на основании которых в разд. 2 доказывается основной результат о существовании ограниченных солитонных решений для конечно-разностного аналога волнового уравнения.

1. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ С КВАДРАТИЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Будем изучать солитонные решения (решения системы (2)–(3)) с квадратичным потенциалом $\Phi(\xi) = \alpha\xi^2 + \beta$, $\alpha > 0$, $\beta < 0$:

$$m\ddot{y}_i(t) = y_{i-1}(t) - 2y_i(t) + y_{i+1}(t) + \alpha(y_i(t))^2 + \beta, \quad y_i \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

$$y_i(t + \tau) = y_{i+1}(t), \quad \tau > 0. \tag{13}$$

В рамках такой задачи выявляется ряд универсальных свойств, присущих для систем с нелинейным потенциалом общего вида.

Соответствующее индуцированное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа имеет вид

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1}[z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \alpha z_1^2(t) + \beta]. \tag{15}$$

Справедливо соответствие: ограниченному солитонному решению (решению системы (12)–(13)) соответствует решение индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с ограниченной первой координатой $z_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, и наоборот.

Замечание 1. Точки $\left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0\right)'$, $\left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0\right)'$ являются единственными неподвижными точками для индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом.

Для изучения иных решений индуцированного функционально-дифференциального уравнения с условием ограниченности по первой координате построим семейство вспомогательных функционально-дифференциальных уравнений точечного типа.

Для любого $\Delta > 0$ определим периодический потенциал Φ_Δ с периодом 2Δ и свойством $\Phi_\Delta|_{[-\Delta,\Delta]} = \Phi|_{[-\Delta,\Delta]}$. Константа Липшица для такой периодической функции Φ_Δ равна $L_{\Phi_\Delta} = 2\alpha\Delta$ и является монотонно возрастающей по параметру $\Delta > 0$. Рассмотрим вспомогательное функционально-дифференциальное уравнение точечного типа

$$\dot{z}_1(t) = z_2(t), \quad (z_1, z_2)' \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

$$\dot{z}_2(t) = m^{-1}\left[z_1(t - \tau) - 2z_1(t) + z_1(t + \tau) + \Phi_\Delta(z_1(t))\right]. \tag{17}$$

По аналогии с уравнением (11) рассмотрим трансцендентное уравнение относительно двух переменных $\tau \in (0, +\infty)$ и $\mu \in (0, 1)$

$$C_{\Phi_\Delta}\tau(2\mu^{-1} + 1) = \ln \mu^{-1}, \tag{18}$$

где

$$C_{\Phi_\Delta} = \max\{1; 2m^{-1}\sqrt{L^2_{\Phi_\Delta} + 2}\}$$

и C_{Φ_Δ} является монотонно возрастающей по параметру $\Delta > 0$.

Решение уравнения (18) описывается функциями $\mu_{\Delta 1}(\tau)$, $\mu_{\Delta 2}(\tau)$. Качественное поведение функций $\mu_{\Delta 1}(\tau)$, $\mu_{\Delta 2}(\tau)$ такое же, как поведение функций $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$ на фиг. 1, а величина $\hat{\tau}$ заменяется соответствующей величиной $\hat{\tau}_\Delta$, которая является монотонно убывающей по параметру $\Delta > 0$.

Для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) также верна теорема 1, в которой следует потенциал Φ заменить на Φ_Δ, функции $\mu_1(\tau)$, $\mu_2(\tau)$ заменить на функции $\mu_{\Delta 1}(\tau)$, $\mu_{\Delta 2}(\tau)$, а величину $\hat{\tau}$ на $\hat{\tau}_\Delta$. Всякое решение $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, вспомогательного функционально-дифференциального уравнения (16)–(17) со свойством ограниченности по первой координате $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$, является решением индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом и тем же условием ограниченности по первой координате. Таким образом, в силу сформулированного выше правила согласования, нам достаточно установить существование решений вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17), удовлетворяющих свойству ограниченности по первой координате $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$.

Замечание 2. При параметре Δ, $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ точки

$$\left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \quad \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются единственными стационарными решениями для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17).

В [15] для функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квазилинейной правой частью получена теорема существования ограниченного решения. В ней представлены условия нового типа, использующие средние по некоторому периоду для правых частей функционально-дифференциального уравнения точечного типа. Такие условия являются новыми и для обыкновенных дифференциальных уравнений. На их основе получен результат о существовании ограниченного солитонного решения для систем с квазилинейным потенциалом, а также осуществлена численная реализация таких солитонных решений (см. [16], [17]). В рамках такого подхода в [18] получена теорема существования ограниченного решения для функционально-дифференциального уравнения точечного типа и с сильно нелинейной правой частью.

Вместе с тем условия из работы [18] оказываются неприменимыми при изучении ряда систем и, в частности, для рассматриваемого конечно-разностного аналога волнового уравнения с нелинейным потенциалом. Причина в том, что у таких систем и индуцированных ими функционально-дифференциальных уравнений точечного типа имеется ряд симметрий, которые препятствуют выполнению нужных условий из отмеченной работы. В свою очередь, наличие симметрий, поведение векторного поля для определенного выше вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17), а также наличие теоремы 1 позволяют установить существование решений, удовлетворяющих свойству ограниченности по первой координате $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$, как для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа, так и для исходного индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15). Опишем такие симметрии.

Лемма 1. *Решения* $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, *вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17) *инвариантны относительно сдвига по времени.*

Доказательство. Это свойство инвариантности является следствием автономности рассматриваемой системы дифференциальных уравнений.

Лемма 2. *Если* $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, *является решением вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17)*, то* $(z_1(t) + 2k\Delta, z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, *при каждом фиксированном* $k \in \mathbb{Z}$ *также являются решениями.*

Доказательство. Это свойство инвариантности является следствием периодичности потенциала Φ_Δ с периодом 2Δ и может быть получено непосредственной проверкой.

Лемма 3. *Если* $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, *является решением вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17), *то* $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, *где* $\hat{z}_1(t) = z_1(-t)$, $\hat{z}_2(t) = -z_2(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, *также является решением*.

Доказательство. Это свойство инвариантности может быть получено непосредственной проверкой.

Лемма 4. *Пусть* $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$, *а* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ – *решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17), *для которого существует точка* $\hat{t}$ *со свойством* $z_2(\hat{t}) = 0$. *Тогда фазовый портрет такого решения симметричен относительно горизонтальной оси* $z_2 = 0$. *Более того, для такого решения каждая пара отмеченных симметричных точек задается в терминах самого решения следующим образом*: $(z_1(\hat{t} + t), z_2(\hat{t} + t))'$, $(z_1(-\hat{t} - t), -z_2(-\hat{t} - t))'$, $t \in R$.

Доказательство. Пусть решение $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет всем условиям из леммы, т.е. найдется такое $\hat{t}$, что $z_2(\hat{t}) = 0$. Так как решения инвариантны относительно сдвига по времени (лемма 1), то, не нарушая общности, можем положить $\hat{t} = 0$. По лемме 3 $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, где $\hat{z}_1(t) = z_1(-t)$, $\hat{z}_2(t) = -z_2(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, также является решением. Заметим, что при этом $\hat{z}_1(0) = z_1(0), \hat{z}_2(0) = -z_2(0) = 0$. Тогда по теореме существования и единственности решения в пространстве функций $\mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ следует, что решения $(z_1(t), z_2(t))'$, $(\hat{z}_1(t), \hat{z}_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, совпадают. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ из условия $z_1(t) = \hat{z}_1(t)$, $z_2(t) = \hat{z}_2(t)$ следует, что $z_1(t) = z_1(-t)$, $z_2(t) = -z_2(-t)$. Полученные условия доказывают лемму, и фазовый портрет такого решения будет симметричен относительно горизонтальной оси $z_2 = 0$.

Лемма 5. *Пусть* $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$, *а* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ – *решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17) *такое, что* $z_2(0) = 0$. *Такое решение является периодическим, но не стационарным, тогда и только тогда, когда найдется* $\hat{t} \neq 0$, *для которого* $z_2(\hat{t}) = 0$. *Минимальное значение таких* $\hat{t}$ *равно полупериоду решения*.

Доказательство. Если решение является периодическим, то значение периода обозначим через $2\hat{t}$. По лемме 4 справедливы условия $z_2(t) = -z_2(-t)$, $t \in [0, \hat{t}]$. Так как $\hat{t}$ равно значению минимального полупериода, то для всех $t \in [0, \hat{t})$ должны выполняться условия $z_2(t) = -z_2(-t) \neq 0$. Тогда из непрерывности решения и условия симметрии решения относительно оси $z_2 = 0$ следует, что $z_2(\hat{t}) = 0$.

Доказательство проведем в обратную сторону. Пусть найдется точка $\hat{t}$, для которой выполняется условие $z_2(\hat{t}) = 0$. В силу условия симметрии $z_2(t) = -z_2(-t)$, $t \in [0, \hat{t}]$, из теоремы 4 следует, что имеет место условие $z_2(\hat{t}) = -z_2(-\hat{t})$. С другой стороны, имеет место и другое условие симметрии $z_1(\hat{t}) = z_1(-\hat{t})$, что ведет к выполнению равенства $(z_1(\hat{t}), z_2(\hat{t})) = (z_1(-\hat{t}), z_2(-\hat{t}))$. Следовательно, такое решение является периодическим, а минимальное значение таких $\hat{t}$ равно полупериоду решения.

Лемма 6. *Пусть* $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$, *а* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ – *решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17) *такое, что* $z_2(0) = 0$. *Тогда справедливо одно из условий*:

(а) *либо решение периодическое с полупериодом* $\hat{t}$, *для которого выполняется одно из условий*: $z_1(\hat{t}) \le z_1(t) \le z_1(0)$ *при* $t \in [0, \hat{t}]$ *или* $z_1(0) \le z_1(t) \le z_1(\hat{t})$ *при* $t \in [0, \hat{t}]$;

(б) *либо решение не периодическое и выполняется одно из условий:* $z_1(t) \le z_1(0)$, $t \in \mathbb{R}$, *при* $t \in (-\infty, 0)$ *функция* $z_1(.)$ *монотонно возрастающая, при* $t \in (0, \infty)$ *функция* $z_1(.)$ *монотонно убывающая;* $z_1(0) \le z_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *при* $t \in (-\infty, 0)$ *функция* $z_1(.)$ *монотонно убывающая, при* $t \in (0, \infty)$ *функция* $z_1(.)$ *монотонно возрастающая*.

Доказательство. В силу первого уравнения (16), для рассматриваемого решения при прохождении замкнутой верхней полуплоскости $z_2 \ge 0$ фазового пространства имеется монотонно возрастающее поведение координаты $z_1(t)$. С другой стороны, при прохождении замкнутой нижней полуплоскости $z_2 \le 0$ фазового пространства имеется монотонно убывающее поведение координаты $z_1(t)$. В силу леммы 4 (наличие симметрии для такого решения) и леммы 5, решение имеет следующее поведение. Первый случай: решение является периодическим. При положительных моментах времени полупериода ($t \in [0,\hat{t}]$) решение находится в замкнутой нижней полуплоскости $z_2 \le 0$ и выполняется первое двойное неравенство. Если при $t \in [0,\hat{t}]$ решение находится в замкнутой верхней полуплоскости $z_2 \ge 0$, то выполняется второе двойное неравенство. Второй случай: а) при отрицательных моментах времени ($t < 0$) решение находится в замкнутой верхней полуплоскости $z_2 \ge 0$, а при положительных моментах времени ($t > 0$) решение находится в замкнутой нижней полуплоскости $z_2 \le 0$; б) с точностью до наоборот. Так как в условиях а) в замкнутой верхней полуплоскости имеет место ограничение $z_2 \ge 0$, то, в силу первого уравнения (16), оно будет монотонно возрастающим и будет выполняться соотношение $z_1(t) \le z_1(0)$ при $t > 0$. Точно так же в замкнутой нижней полуплоскости имеет место ограничение $z_2 \le 0$. Поэтому, в силу первого уравнения (16), оно будет монотонно убывающим и будет выполняться ограничение $z_1(t) \le z_1(0)$ при $t < 0$. Следовательно, в условиях а) первая координата решения удовлетворяет ограничению $z_1(t) \le z_1(0)$ при $t \in \mathbb{R}$. Точно так же в условиях б) можно показать, что первая координата решения удовлетворяет ограничению $z_1(t) \ge z_1(0)$ при $t \in \mathbb{R}$ и соответствующим условиям монотонности.

Предложение 1. *Пусть заданы* $\Delta \ge \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ *и* $\tau \in (0,\tau_\Delta)$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau),\mu_{\Delta 2}(\tau))$. *Тогда не существует периодического не стационарного решения* $(z_1(.),z_2(.))' \in \mathscr{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ *вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17) *с начальным условием* $(z_1(0),z_2(0))' = (a,0)'$.

Доказательство. Заметим, что любые два периодических решения либо не имеют точек пересечения для внутренних областей, которые они выделяют, либо эти области вложены одна в другую. Для любого стационарного решения не существует последовательности периодических (но не стационарных) решений $(z_1^r(.),z_2^r(.))'$, $r = 1, 2, \ldots$, с начальными условиями $(z_1^r(0),z_2^r(0))' = (a^r,0)'$, которые сгущаются к стационарному решению. Это следует из теоремы существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных условий.

Пусть существует периодическое (но не стационарное) решение $(z_1(.),z_2(.))'$ с начальными условиями $(z_1(0),z_2(0))' = (a,0)'$. Тогда найдется не периодическое решение $(\hat{z}_1(.),\hat{z}_2(.))'$ с начальными условиями $(\hat{z}_1(0),\hat{z}_2(0))' = (\hat{a},0)'$. Более того, найдутся последовательности периодических решений $(z_1^r(.),z_2^r(.))'$, $r = 1, 2, \ldots$, с начальными условиями $(z_1^r(0),z_2^r(0))' = (a^r,0)'$ и последовательность не периодических решений $(z_1^l(.),z_2^l(.))'$, $l = 1, 2, \ldots$, с начальными условиями $(z_1^l(0),z_2^l(0))' = (a^l,0)'$ такие, что последовательности начальных данных сгущаются к одному и тому же начальному данному $(a,0)'$. Такое свойство противоречит теореме существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных условий. Предложение доказано.

Лемма 7. *Пусть* $\Delta \ge \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$, $\tau \in (0,\hat{\tau}_\Delta)$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta,1}(\tau),\mu_{\Delta,2}(\tau))$, *а* $(z_1(.),z_2(.))' \in \mathscr{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ – *решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17) *с начальным условием* $(z_1(0),z_2(0))' = (a,0)'$. *Тогда*

1) *при любом* $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *выполняется условие* $\dot{z}_2(0) < 0$; *для* $t \in (-\infty,0)$ *выполнены оценки* $z_2(t) > 0$, $z_1(t) < a$, *и первая координата* $z_1(t)$ *монотонно возрастает; для* $t \in (0,\infty)$ *выполнены оценки* $z_2(t) < 0$, $z_1(t) < a$ *и первая координата* $z_1(t)$ *монотонно убывает*;

2) *при любом* $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *выполняется условие* $\dot{z}_2(0) > 0$*; для* $t \in (-\infty, 0)$ *выполнены оценки* $z_2(t) < 0$, $z_1(t) > a$, *и первая координата* $z_1(t)$ *монотонно убывает; для* $t \in (0, \infty)$ *выполнены оценки* $z_2(t) > 0$, $z_1(t) > a$, *и первая координата* $z_1(t)$ *монотонно убывает.*

Доказательство. По лемме 2 решения инвариантны относительно сдвига на 2Δ по первой координате z_1. Поэтому нам достаточно рассмотреть решения с начальными значениями $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$, $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$. В силу уравнения (17) и леммы 4, для рассматриваемого решения выполнено соотношение

$$\begin{gathered}\dot{z}_2(0) = m^{-1}[z_1(-\tau) - 2z_1(0) + z_1(\tau) + \Phi_\Delta(z_1(0))] = m^{-1}[z_1(-\tau) - 2a + z_1(\tau) + \Phi_\Delta(a)] = \\ = m^{-1}[2z_1(\tau) - 2a + \Phi_\Delta(a)].\end{gathered} \tag{19}$$

В силу непрерывной зависимости решения системы (16)–(17) от начальных данных и характеристики τ (теорема 1), для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ решения на интервале $[0, 2\tau]$ будут равномерно ограниченными для всех

$$a \in \left[\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta + \delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - \delta\right] \cup \left[-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + \delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - \delta\right], \quad \tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta). \tag{20}$$

Из системы (16)–(17) следует, что

$$\ddot{z}_1(t) = m^{-1}[z_1(t-\tau) - 2z_1(t) + z_1(t+\tau) + \Phi_\Delta(z_1(t))] \tag{21}$$

и, учитывая равномерную ограниченность $z_1(t)$, $t \in [0, 2\tau]$, получаем соотношение $|z_1(\tau) - a| = o(\tau^2)$. Подставив полученное соотношение в равенство (19), получим представление $\dot{z}_2(0) = m^{-1}[o(\tau^2) + \Phi_\Delta(a)]$.

Пусть $a \in \left[-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + \delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - \delta\right]$. При таких a значение потенциала $\Phi_\Delta(a)$ отрицательное. Поэтому при достаточно малых характеристиках τ выполняется неравенство $\dot{z}_2(0) < 0$. Из последнего неравенства и начального условия $z_2(0) = 0$ следует, что при малых $t > 0$ выполняется условие $z_2(t) < 0$, а при малых $t < 0$ – условие $z_2(t) > 0$. По предложению 1 не существует периодического решения, отличного от стационарного. Тогда, в силу симметрии из леммы 4, будут выполняться более сильные соотношения $z_2(t) < 0$ при $t > 0$, $z_2(t) > 0$ при $t < 0$, а в силу уравнения (16), будут выполняться также и соотношения: $z_1(t) < a$ при $t > 0$ и монотонно убывает, $z_1(t) < a$ при $t < 0$ и монотонно возрастает.

Если условие $\dot{z}_2(0) < 0$ будет выполняться при всех характеристиках $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$, то, в силу произвольности малой величины $\delta > 0$, пункт 1) леммы доказан. Покажем, что это так. Пусть найдется $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$, при котором для решения выполняется условие $\dot{z}_2(0) = 0$, а $\underline{\tau}$ – нижняя грань таких значений. Очевидно, что $\underline{\tau} \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$. Из равенства (19) и отрицательности значения потенциала будет следовать условие $z_1(\underline{\tau}) > a$. В силу симметрии из леммы 4, а также отсутствия не стационарных периодических решений (предложение 1), будут выполняться более сильные соотношения: $z_1(t) > a$ при $t > 0$ и монотонно возрастает, $z_1(t) > a$ при $t < 0$ и монотонно убывает. Это противоречит непрерывной зависимости решения системы (16)–(17) от начальных данных и характеристики τ (теорема 1), которая нарушается при значении характеристики, равной $\underline{\tau}$.

Точно так же доказывается пункт 2).

В действительности мы можем получить более сильную оценку для производной $\dot{z}_2(0)$.

Следствие 1. *Пусть* $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$, $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta,1}(\tau), \mu_{\Delta,2}(\tau))$, *а* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ *— решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17) *с начальным условием* $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$. *Тогда*

1) *при любом* $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *выполняется условие* $\dot{z}_2(0) < \Phi_\Delta(a)$;

2) *при любом* $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *выполняется условие* $\dot{z}_2(0) > \Phi_\Delta(a)$.

Доказательство. Докажем п. 1). Для рассматриваемых a по предложению 2 имеет место оценка $z_1(0) < a$. Тогда из соотношения (19) и отрицательности потенциала $\Phi_\Delta(a)$ будет следовать оценка $\dot{z}_2(0) < \Phi_\Delta(a)$.

Докажем п. 2). Для рассматриваемых a по предложению 2 имеет место оценка $z_1(0) > a$. Тогда из соотношения (19) и положительности потенциала $\Phi_\Delta(a)$ будет следовать оценка $\dot{z}_2(0) > \Phi_\Delta(a)$.

Теперь мы можем описать качественное поведение решений $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с начальными данными $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$, $a \in \mathbb{R}$.

Предложение 2. *Пусть заданы* $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ *и* $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$, *а* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ *— решение вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (16)–(17) *с начальными условиями* $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$. *Тогда*

1) *при любом* $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *решение по первой координате* z_1 *не покидает интервал* $\left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, *и выполняются соотношения*

$$\lim_{t \to \pm\infty} z_1(t) = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \qquad \lim_{t \to \pm\infty} z_2(t) = 0.$$

Граница области фазовых кривых таких решений состоит из двух сепаратрис $(\overline{z}_1(.), \overline{z}_2(.))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $(\underline{z}_1(.), \underline{z}_2(.))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$ *со свойствами*

$$\lim_{t \to \pm\infty} (\overline{z}_1(t), \overline{z}_2(t))' = \left(\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \qquad \lim_{t \to \pm\infty} (\underline{z}_1(t), \underline{z}_2(t))' = \left(\mp\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)'.$$

2) *при любом* $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, *решение по первой координате* z_1 *не покидает интервал* $\left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta\right)$, *и выполняются соотношения*

$$\lim_{t \to \pm\infty} z_1(t) = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, \qquad \lim_{t \to \pm\infty} z_2(t) = 0.$$

Граница области фазовых кривых таких решений состоит из двух сепаратрис $(\overline{z}_1(.), \overline{z}_2(.))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $(\underline{z}_1(.), \underline{z}_2(.))' \in \mathcal{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{Z})$ *и выполняются условия*

$$\lim_{t \to -\infty} (\overline{z}_1(t), \overline{z}_2(t))' = \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, 0\right)', \qquad \lim_{t \to +\infty} (\overline{z}_1(t), \overline{z}_2(t))' = \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)',$$

$$\lim_{t \to -\infty} (\underline{z}_1(t), \underline{z}_2(t))' = \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2k\Delta, 0\right)', \qquad \lim_{t \to +\infty} (\underline{z}_1(t), \underline{z}_2(t))' = \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} + 2(k-1)\Delta, 0\right)'.$$

Доказательство. По лемме 2 решения инвариантны относительно сдвига на 2Δ по первой координате z_1. Поэтому нам достаточно рассмотреть решения с начальными значениями $(z_1(0), z_2(0)) = (a, 0)$, $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$. Так как точка $-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ является стационарной точкой для рассматриваемой системы, то нам достаточно рассмотреть начальные значения $(a, 0)$, где $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$.

Сформулируем ряд утверждений относительно качественного поведения решений.

(i) *Пусть решение с начальными условиями* $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$, $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ (*либо* $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$*), по первой координате* z_1 *не покидают интервала, которому принадлежит* a. *Тогда для такого решения справедливы утверждения доказываемого предложения.*

Доказательство утверждения (i). Рассматриваемое решение будет удовлетворять всем условиям монотонности из леммы 6. Тогда предел для первой координаты $z_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, будет существовать. Если для такого решения вторая координата $z_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, окажется ограниченной, то утверждения о конечности предела по первой координате и предельных переходах будет следовать из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа и теоремы о продолжении решения до не продолжаемого, основанной на ней.

Покажем ограниченность координаты $z_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Мы уже отмечали, что функция $z_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, монотонна на полупрямых $t \in (-\infty, 0)$, $t \in (0, +\infty)$ и, соответственно, конечные пределы $\lim_{t\to\pm\infty} z_1(t) = A$ существуют. При больших $|t| > N$ величина $[z_1(t-\tau) - 2z_1(t) + z_1(t+\tau)]$ будет сколь угодно малой. Если $A \neq -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$, то потенциал $\Phi_\Delta(z_1(t))$ не равен нулю и, в силу системы (16)–(17), условие $\lim_{t\to\pm\infty} z_1(t) = A$ нарушается. Следовательно, $A = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$. В таком случае при больших $|t| > N$ правая часть уравнения (17) будет сколь угодно малой. Следовательно, в силу уравнения (16), при $|t| > N$ значения $z_2(t)$ будут не только ограниченными, но будут удовлетворять также и условию $\lim_{t\to\pm\infty} z_2(t) = 0$.

Наличие сепаратрис с отмеченными свойствами является следствием теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных данных.

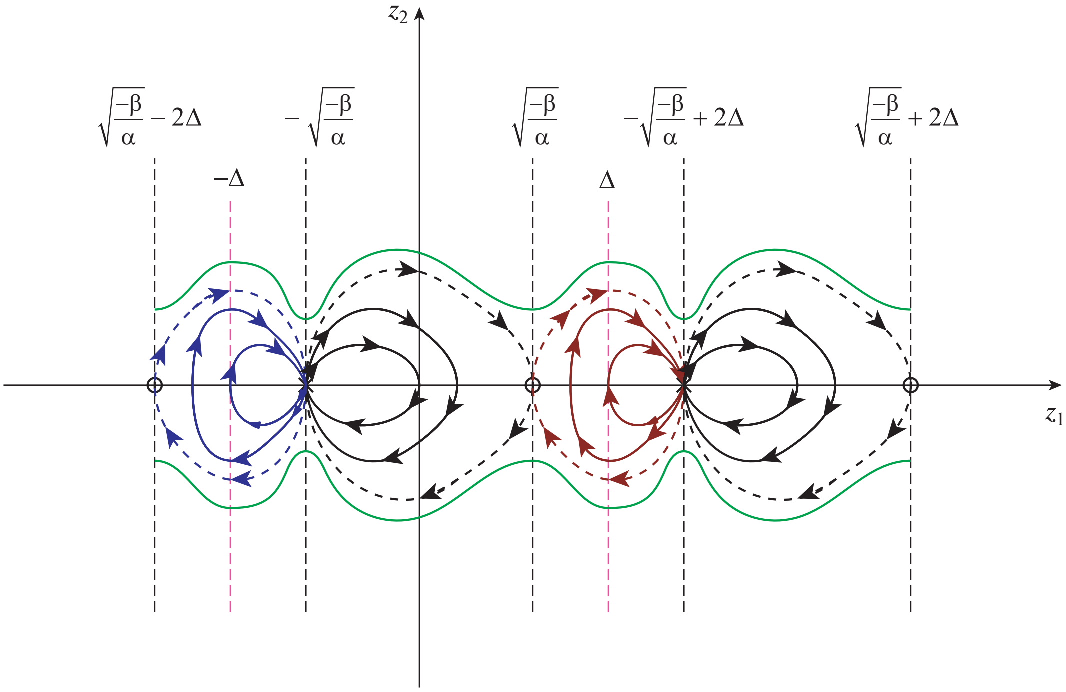
Качественное поведение решений, описанное в предложении 2, показано на фиг. 2.

Утверждение (i) доказано.

Остается показать, что решения с начальными условиями $(z_1(0), z_2(0)) = (a, 0)$, $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ (либо $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$), по первой координате z_1 не покидают интервала, которому принадлежит a.

Для решений с начальными условиями $(a, 0)'$, где a принадлежит одному из рассматриваемых интервалов, сформулируем результат о структуре решений, если известен характер одного из рассматриваемых решений.

(ii) *Пусть задано решение* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ *с начальными условиями* $(z_1(0), z_2(0))' = (\tilde{a}, 0)'$, $\tilde{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ (*либо* $\tilde{a} \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$). *Если решение по первой координате* z_1 *не покидает интервал, которому принадлежит* $\tilde{a}$, *тогда для любого* $a \in \left[\tilde{a}, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ (*либо* $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \tilde{a}\right]$) *решение с начальными условиями* $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ *по первой координате* z_1 *также не покидают интервал, которому принадлежит* $\tilde{a}$. *Если решение по первой координате* z_1 *покидает интервал, которому при-*



Фиг. 2. Качественная картина ограниченных по первой координате z_1 решений вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квазилинейной правой частью.

надлежит $\tilde{a}$, *тогда для любого* $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, \tilde{a}\right]$ *(либо* $a \in \left[\tilde{a}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$*) решение с начальными условиями* $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ *также по первой координате* z_1 *покидают интервал, которому принадлежит* $\tilde{a}$.

Доказательство утверждения (ii) следует из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Сформулируем результат о структуре решений, для которых первая координата начальных условий $(a, 0)'$ принадлежит одному из рассматриваемых интервалов в зависимости от характера какого-либо индивидуального решения, для которого первая координата начальных условий принадлежит другому интервалу.

(iii) *Пусть задано решение* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ *с начальными условиями*

$$(z_1(0), z_2(0))' = (\tilde{a}, 0)', \quad \tilde{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \quad \left(\tilde{a} \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)\right).$$

Если решение по первой координате z_1 *покидает интервал, которому принадлежит* $\tilde{a}$, *тогда для любого* $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ $\left(a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)\right)$ *решение с начальными условиями* $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ *по первой координате* z_1 *не покидают интервал, которому принадлежит* a.

Доказательство утверждения (iii) следует из теоремы существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Теперь мы можем окончательно сформулировать результат о структуре решений с начальными данными $(a, 0)'$, где a принадлежит рассматриваемым интервалам.

(iv) *Всякое решение* $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathcal{L}^2_\mu C^{(0)}(\mathbb{R})$ *с начальными условиями*

$$(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)', \quad a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \quad \left(a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)\right)$$

не покидает интервал, которому принадлежит a.

Доказательство утверждения (iv). Для определенности будем полагать, что $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$. Предположим, что при каком-либо $\tilde{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ решение по первой координате z_1 покидает рассматриваемый интервал. В утверждении (ii) описан характер такого решения. Через $\underline{a}$ обозначим минимальное среди таких $\tilde{a}$.

Если $\underline{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$, то по утверждению (ii) при каждом $\tilde{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, \underline{a}\right)$ решение по первой координате z_1 также покидает интервал $\left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$, а при каждом $\tilde{a} \in \left[\underline{a}, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ решение по первой координате z_1 не покидает интервал $\left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$, их поведение описано в пункте (i) и изображено на фиг. 1. В таком случае для решения с начальными условиями $(z_1(0), z_2(0))' = (\underline{a}, 0)'$ нарушается непрерывная зависимость от начальных условий. Следовательно, $\underline{a} = -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ и при всех $\tilde{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ решение по первой координате z_1 покидает рассматриваемый интервал.

По утверждению (iii) для любого $a \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ решения с начальными условиями $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ по первой координате z_1 не покидают интервал, которому принадлежит a. В таком случае для решений с начальными условиями $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$, $a \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$, в окрестности стационарного решения $\left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0\right)'$ нарушается теорема существования и единственности решения, а также непрерывной зависимости от начальных условий. Следовательно, ни при каком $\tilde{a} \in \left(\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}} - 2\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ решение по первой координате z_1 не покидает рассматриваемый интервал. Точно так же доказывается, что ни при каком $\tilde{a} \in \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$ решение по первой координате z_1 не покидает рассматриваемый интервал. Утверждение (iv) доказано.

Завершим доказательство предложения. По п. (iv) решения с начальными условиями $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ по первой координате z_1 не покидает интервал, которому принадлежит a. Тогда, в силу п. (i), для таких решений справедливы все утверждения доказываемого предложения.

Дадим комментарий к фиг. 2. График по координате z_1 является 2Δ-периодичным и симметричным относительно оси z_1. Малыми кругами обозначены стационарные решения, имеющие гиперболический тип. Крестиками обозначены стационарные решения, являющиеся стоками и истоками для одних и тех же решений и имеющие также гиперболический тип. Штриховыми линиями обозначены сепаратрисы, а зеленым цветом обозначены решения, неограниченные по первой координате z_1.

2. ВОПРОСЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ПОТЕНЦИАЛЕ. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

На основе утверждений предложения 2 сформулируем результат о существовании ограниченного по первой координате z_1 решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения.

Теорема 3. *Пусть заданы* $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ *и* $\tau \in (0, \hat{\tau}_\Delta)$. *Тогда при любых* $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$ *существует решение* $(z_1(.), z_2(.))'$ *индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа* (14)–(15) *с квадратичным потенциалом и начальными условиями* $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$, *фазовый портрет которого ограничен в* $\mathbb{R}^2$. *Более того, такое решение единственное и по первой координате* z_1 *удовлетворяет условию ограниченности* $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$.

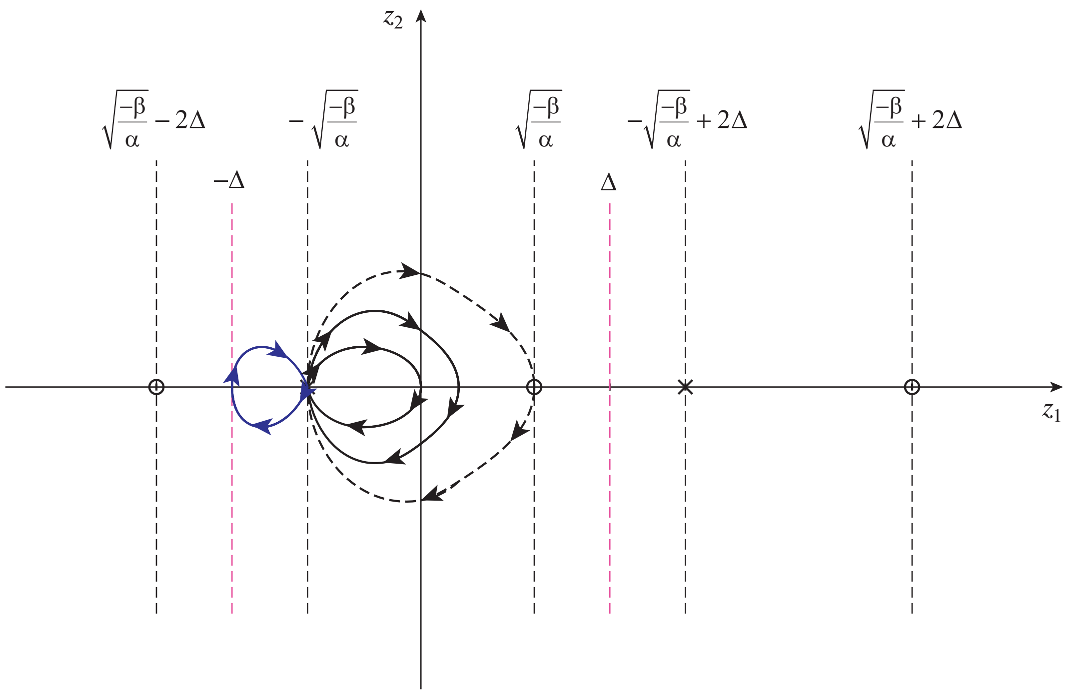
Доказательство. По теореме существования и единственности решения для рассматриваемого функционально-дифференциального уравнения точечного типа для соответствующего вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) с начальными условиями $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$, $a \in \left[-\Delta, -\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right) \cup \left(-\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right)$, существует решение $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathscr{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$, и такое решение единственное. По предложению 2 такое решение удовлетворяет условию ограниченности $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$. В случае $a = \pm\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ точки $\left(\pm\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}, 0\right)$ задают фазовые портреты стационарных решений и также удовлетворяют условию ограниченности $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно, что такие решения будут одновременно и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом. Более того, из фиг. 2 следует, что фазовый портрет для таких решений ограничен в $\mathbb{R}^2$.

С другой стороны, всякое решение индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом, фазовый портрет которого ограничен в $\mathbb{R}^2$ и удовлетворяет условию ограниченности $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$, является решением и вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17). Более того, такое решение принадлежит пространству $(z_1(.), z_2(.))' \in \mathscr{L}_\mu^2 C^{(0)}(\mathbb{R})$, $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$, при любом $\mu \in (0, 1)$ и, в частности, при любом $\mu^\tau \in (\mu_{\Delta 1}(\tau), \mu_{\Delta 2}(\tau))$. Тогда по теореме существования и единственности решения для вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (16)–(17) такое решение единственное.

Дадим комментарий к фиг. 3. На фиг. 3 по сравнению с фиг. 2 сохранены только те ограниченные по координате z_1 решения, которые принадлежат цилиндру $\{(z_1, z_2) : z_1 \in [-\Delta, \Delta]\}$, так как только такие решения вспомогательного функционально-дифференциального уравнения точечного типа являются одновременно и решениями индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа.

Теперь мы можем привести эквивалентную переформулировку теоремы 3 о существовании решения индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (системы (16)–(17)), ограниченного по первой координате. Такая переформулировка примет форму основного результата о существовании ограниченных солитонных решений для исходного волнового уравнения (для системы (12)–(13)).

Теорема 4. *Пусть задано* $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$. *Тогда для системы* (12)–(13) *с квадратичным потенциалом при каждом фиксированном* τ, $0 < \tau < \hat{\tau}_\Delta$, *и* $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$ *существует ограниченное солитонное решение* $\{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$, *с характеристикой* τ *и начальными данными* $(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)'$, *для которого фазовый портрет* $(y_0(t), \dot{y}_0(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, *ограничен в* $\mathbb{R}^2$. *Такое решение единственное. Более того, условие ограниченности такого солитонного решения имеет вид* $|y_0(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$.



Фиг. 3. Качественная картина ограниченных по первой координате z_1 решений для индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа с квадратичной нелинейностью правой части.

Доказательство. По теореме 3 для $\Delta \geq \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}$ и τ, $0 < \tau < \hat{\tau}_\Delta$, а также каждого начального данного $(a, 0)'$, $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$, существует с ограниченным фазовым портретом в $\mathbb{R}^2$ решение $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом, с начальным условием $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ и условием ограниченности по первой координате $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$. Такое решение единственное. В силу соотношений (9), решению $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, с начальными данными $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$, $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$, соответствует солитонное решение $\{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$, системы (12)–(13) с характеристикой τ, начальными условиями $(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)'$, и имеют место соотношения $z_1(t) = y_0(t)$, $z_2(t) = \dot{y}_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Из последних соотношений следует ограниченность фазового портрета $(y_0(t), \dot{y}_0(t))'$, $t \in \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$, а также условие ограниченности $|y_0(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$.

Справедливы рассуждения и в обратную сторону. Пусть при τ, $0 < \tau < \hat{\tau}_\Delta$, и $a \in \left[-\Delta, \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\right]$ для системы (12)–(13) с квадратичным потенциалом существует ограниченное солитонное решение $\{(y_i(t), \dot{y}_i(t))'\}_{-\infty}^{+\infty}$, $t \in \mathbb{R}$, с характеристикой τ, начальными данными $(y_0(0), \dot{y}_0(0))' = (a, 0)'$ и условием ограниченности $|y_0(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$, для которого фазовый портрет $(y_0(t), \dot{y}_0(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, ограничен в $\mathbb{R}^2$. В силу соотношений (9), $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, является решением индуцированного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (14)–(15) с квадратичным потенциалом и отклонением τ, с начальным условием $(z_1(0), z_2(0))' = (a, 0)'$ и условием ограниченности по первой координате $|z_1(t)| \leq \Delta$, $t \in \mathbb{R}$, для которого фазовый портрет $(z_1(t), z_2(t))'$, $t \in \mathbb{R}$, ограничен в $\mathbb{R}^2$. По теореме 3 такое решение единственное.

Большинство приведенных предварительных результатов получено без учета конкретного вида нелинейного потенциала. Поэтому представленный подход носит универсальный характер и может быть применен к изучению широкого класса систем с нелинейным потенциалом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984. С. 262.
2. *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. М.: МЦНМО, 2005.
3. *Френкель Я.И., Конторова Т.А.* О теории пластической деформации и двойственности // Ж. эксперимент. и теор. физ. 1938. Т. 8. С. 89–97.
4. *Пустыльников Л.Д.* Бесконечномерные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения и теория КАМ // Успехи матем. наук. 1997. Т. 52. № 3. С. 551–604.
5. *Бекларян Л.А.* Краевая задача для дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом // Докл. АН СССР. 1986. С. 291. № 1. С. 19–22.
6. *Бекларян Л.А.* Дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом как бесконечномерная динамическая система // ВЦ АН СССР. Сообщ. по приклад. матем. 1989. С. 18.
7. *Beklaryan L.A.* Functional differential equations // J. of Math. Sci. 2006. V. 135. № 2.
8. *Бекларян Л.А.* Введение в теорию функционально-дифференциональных уравнений. Групповой подход. М: Факториал Пресс, 2007.
9. *Keener J.P.* Propacation and its failure in coupled systems of discrete excitable cells // SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47. № 3. P. 556–572.
10. *Zinner B.* Existence of traveling wavefront solutions for the discrete Nagumo equation // J. of Different. Equat. 1992. V. 96. P. 1–27.
11. *Maller-Paret J.* The global structure of traveling waves in spatially discrete dynamical systems. Brown University, August, 1997.
12. *Maller-Paret J., Cahn J.W., Van Vleck E.S.* Traveling wave solutions for systims of ODEs on two-dimentiontional spatial lattice // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 59. № 2. P. 455–493.
13. *Бекларян Л.А.* О квазибегущих волнах // Матем. сб. 2010. Т. 201. № 12. С. 1731–1775.
14. *Бекларян Л.А.* Квазибегущие волны как естественное расширение класса бегущих волн // Вестн. Тамбовского гос. ун-та. 2014. Т. 19. № 2. С. 331–340.
15. *Бекларян Л.А.* Новый подход в вопросе существования ограниченных решений для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа // Изв. РАН. Сер. матем. 2020. Т. 84. № 2. С. 3–42.
16. *Beklaryan1 L.A., Beklaryan A.L.* On the existence of periodic and bounded solutions for functional differential equations of pointwise type with a strongly nonlinear right-hand side // Lobachevskii J. of Math. 2020. V. 41. № 11. P. 2136–2142.
17. *Beklaryan1 L.A., Beklaryan A.L.* Approximation of solutions of functional differential equations of pointwise type by solutions of the induced optimization problem // Open Computer Sci. 2020. V. 1. № 11. P. 1–15.
18. *Beklaryan A.L.* Numerical methods for constructing solutions of functional differential equations of pointwise type // Adv. in Systems Sci. and Appl. 2020. V. 20. № 2. P. 56–70.