ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 12, с. 2040–2049

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.958

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С СИНГУЛЯРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ[1)]

А. М. Денисов

119991 Москва, Ленинские горы, 1, стр. 52, ВМК МГУ, Россия

e-mail: den@cs.msu.ru

Поступила в редакцию 18.11.2020 г.
Переработанный вариант 16.01.2021 г.
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением, соответствующим либо малому коэффициенту теплоемкости, либо малому коэффициенту теплопроводности, рассматриваются обратные задачи, состоящие в определении или граничного, или начального условия, или источника по дополнительной информации о решении уравнения. Изучается возможность использования разложения решения уравнения по малому параметру для приближенного решения обратных задач. Библ. 20.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сингулярное возмущение, обратные задачи, приближенное решение.

DOI: 10.31857/S0044466921120085

ВВЕДЕНИЕ

Обратные задачи для уравнения теплопроводности представляют собой класс обратных задач для уравнений математической физики, весьма важный как с практической, так и с теоретической точки зрения. К настоящему времени они детально изучены во многих работах (см., например, [1]–[7] и имеющуюся там библиографию). Одно из направлений исследования обратных задач для уравнения теплопроводности связано с использованием сингулярного возмущения для приближенного решения обратных задач. Этот подход, названный методом квазиобращения, был предложен в [8]. Он состоит в замене исходного дифференциального уравнения сингулярно возмущенным дифференциальным уравнением, решение которого при малых значениях параметра используется для построения приближенного решения обратной задачи. Метод квазиобращения получил в дальнейшем развитие в [9]–[16] и ряде других работ.

В данной работе для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением, соответствующим либо малому коэффициенту теплоемкости, либо малому коэффициенту теплопроводности, рассматриваются обратные задачи, состоящие в определении или граничного, или начального условия, или источника по дополнительной информации о решении уравнения. В отличие от указанных выше работ она посвящена изучению возможности применения разложения решения уравнения теплопроводности по малому параметру для приближенного решения обратных задач. Таким образом, вопрос формулируется следующим образом. Можно ли, используя конечное число членов разложения, построить приближенное решение обратной задачи, которое при малых значениях параметра будет близко к точному решению обратной задачи? Оказывается, что, если в разложении по малому параметру ограничиться только одним членом, а именно применять для построения приближенного решения только нулевой член разложения, то ответ будет очень простым и положительным. Если же с целью повышения точности использовать большее число членов разложения, то приближенное решение определяется как решение сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения, и результат будет либо положительным, либо отрицательным для различных обратных задач. Так как общие тенденции прослеживаются для случая, когда приближенное решение строится с использованием только двух членов в разложении по малому параметру, то основные результаты излагаются для него. Возника-

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2019-1621.

ющие при этом задачи являются простыми с точки зрения общей теории сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [17]–[20]). Однако важно то, что их характер полностью определяется исходной постановкой соответствующей обратной задачи. Таким образом, предлагаемый подход представляет собой пример взаимосвязи теории обратных задач и теории сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений.

1. ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением

$$\varepsilon^2 u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \tag{1.4}$$

где ε – положительный малый параметр, $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < \pi,\ 0 < t \le T\}$. Далее, чтобы подчеркнуть зависимость решения задачи (1.1)–(1.4) от параметра, будем обозначать его $u(x,t;\varepsilon)$.

Предположим, что функция $\mu \in C^{m+1}[0,T]$ и $\mu^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m$. Из метода разделения переменных следует формула для решения задачи (1.1)–(1.4):

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \int_0^t \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{(2\varepsilon)^2}(t-\tau)\right] \mu'(\tau) d\tau \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right). \tag{1.5}$$

Интегрируя по частям, получим следующее разложение функции $u(x,t;\varepsilon)$ по малому параметру:

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{2k} \mu^{(k)}(t) f_k(x) + \varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x,t;\varepsilon). \tag{1.6}$$

Сформулируем обратную задачу.

Обратная задача 1. Пусть функция $\mu(t)$ неизвестна. Требуется определить $\mu(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (1.1)–(1.4)

$$u(x_0,t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.7}$$

где x_0 – заданное число, а $g(t;\varepsilon)$ – заданная функция.

Возникает следующий вопрос. Можно ли получить приближенное решение обратной задачи 1, используя представление (1.6), отбросив в нем остаточный член $\varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x,t;\varepsilon)$?

Начнем с самого простого случая $m = 0$, тогда $\mu \in C^1[0,T]$, $\mu(0) = 0$. Учитывая формулу (1.6) и условие (1.7), определим приближенное решение обратной задачи 1 $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)$ следующим образом:

$$\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T. \tag{1.8}$$

Используя формулу (1.5), получаем, что

$$v_1(x,t;\varepsilon) = -\varepsilon^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \int_0^t \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{(2\varepsilon)^2}(t-\tau)\right] \mu'(\tau) d\tau \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Для $v_1(x,t;\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\max_{\bar{Q}_T} |v_1(x,t;\varepsilon)| \le c_1 = \|\mu'\|_{C[0,T]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16}{\pi(2n+1)^3}.$$

Здесь и далее через c_i обозначаются положительные постоянные, не зависящие от ε. Из формул (1.5), (1.8) следует, что

$$\max_{[0,T]} |\mu(t) - \tilde{\mu}_0(t;\varepsilon)| = \max_{[0,T]} \left|\varepsilon^2 v_1(x_0,t;\varepsilon)\right| \le c_1 \varepsilon^2.$$

Эта оценка позволяет считать, что при малых ε функция $\tilde{\mu}_0(t;\varepsilon) = g(t,\varepsilon)$ является приближенным решением обратной задачи 1. Конечно, сказанное выше очевидно с физической точки зрения. При маленькой теплоемкости температура в точке x_0 близка к температуре в точке $x = 0$.

Рассмотрим теперь случай $m = 1$: $\mu \in C^2[0,T]$, $\mu(0) = \mu'(0) = 0$. Для функции $u(x,t;\varepsilon)$ справедливо представление

$$u(x,t;\varepsilon) = \mu(t) + \varepsilon^2\mu'(t)f_1(x) + \varepsilon^4 v_2(x,t;\varepsilon), \tag{1.9}$$

где $f_1(x) = x^2/2 - \pi x$,

$$v_2(x,t;\varepsilon) = \varepsilon^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi(2n+1)^3}\int_0^t \exp\left[-\frac{(2n+1)^2}{(2\varepsilon)^2}(t-\tau)\right]\mu''(\tau)d\tau\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right).$$

Очевидно, что

$$\max_{\bar{Q}_T}|v_2(x,t;\varepsilon)| \le c_2.$$

Принимая во внимание представление (1.9), определим приближенное решение $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ обратной задачи 1, как решение задачи Коши для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения

$$\varepsilon^2\tilde{\mu}_1'(t;\varepsilon)f_1(x_0) + \tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.10}$$

$$\tilde{\mu}_1(0;\varepsilon) = 0. \tag{1.11}$$

Рассмотрим разность $z(t;\varepsilon) = \tilde{\mu}_1(t;\varepsilon) - \mu(t)$. Эта функция является решением задачи Коши

$$\begin{gathered} z'(t;\varepsilon) + (\varepsilon^2 f_1(x_0))^{-1}z(t;\varepsilon) = \varepsilon^2(f_1(x_0))^{-1}v_2(x_0,t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \\ z(0;\varepsilon) = 0. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Корень характеристческого уравнения для дифференциального уравнения (1.12) положителен при любом $x_0 \in (0,\pi]$. Поэтому $z(t;\varepsilon)$ не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ и функцию $\tilde{\mu}_1(t;\varepsilon)$ нельзя считать приближенным решением обратной задачи 1.

Таким образом, использование разложения (1.6) при $m = 0$ (формула (1.8)) дает приближенное решение обратной задачи 1. Но при использовании этого разложения для $m = 1$ решение задачи Коши (1.10), (1.11) не является приближенным решением обратной задачи при малых ε.

Отметим, что использование разложения (1.6) для приближенного решения обратной задачи 1 при $m > 1$ также не даст положительного результата. Действительно, приближенное решение $\tilde{\mu}_m(t;\varepsilon)$ обратной задачи 1 в этом случае определяется как решение задачи Коши

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{2k}f_k(x_0)\tilde{\mu}_m^{(k)}(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{1.13}$$

$$\tilde{\mu}_m^{(k)}(0;\varepsilon) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{1.14}$$

Функции $f_k(x)$ являются решениями краевой задачи

$$f_k''(x) = f_{k-1}(x), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{1.15}$$

$$f_k(0) = f_k'(\pi) = 0, \tag{1.16}$$

$k = 1, 2, \ldots, m$, $f_0(x) = 1$.

Функция Грина $G(x,s)$ краевой задачи (1.15), (1.16) отрицательна при всех положительных x и s. Следовательно, произведение $f_k(x)f_{k-1}(x)$ отрицательно для всех $x \in (0,\pi]$ и $k = 1, 2, \ldots, m$. Это означает, что однородное дифференциальное уравнение, соответствующее уравнению (1.13), при любом значении $x_0 \in (0,\pi]$ будет иметь решение экспоненциально растущее при ε, стремящемся к нулю. А значит, решение задачи Коши (1.13), (1.14) не будет стремиться к точному решению обратной задачи 1.

2. ЗАДАЧА С ОБРАТНЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{2.3}$$

Решение этой задачи будем обозначать $u(x,t;\varepsilon)$. Предположим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\varphi \in C^{2m+3}[0,\pi], \quad \varphi^{2k}(0) = \varphi^{2k}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m+1. \tag{2.4}$$

Хорошо известно, что решение задачи (2.1)–(2.3) имеет вид

$$u(x,t;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \varphi(s)\sin nsds\exp(-\varepsilon^2 n^2 t)\sin nx. \tag{2.5}$$

Применив формулу Тейлора и использовав условия (2.4), получим, что для функции $u(x,t;\varepsilon)$ справедливо представление

$$u(x,t;\varepsilon) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{2k}\frac{t^k}{k!}\varphi^{(2k)}(x) + \varepsilon^{2(m+1)}v_{m+1}(x,t;\varepsilon). \tag{2.6}$$

Сформулируем обратную задачу – задачу с обратным направлением времени.

Обратная задача 2. Пусть функция $\varphi(x)$ неизвестна. Требуется определить $\varphi(x)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (2.1)–(2.3):

$$u(x,T;\varepsilon) = g(x;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{2.7}$$

Рассмотрим вопрос о применении разложения по малому параметру (2.6) для приближенного решения обратной задачи 2.

Пусть $m = 0$. Определим приближенное решение обратной задачи $\tilde{\varphi}_0(x;\varepsilon)$ так:

$$\tilde{\varphi}_0(x;\varepsilon) = g(x;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{2.8}$$

Из формул (2.6)–(2.8) следует, что

$$\max_{[0,\pi]}\left|\tilde{\varphi}_0(x;\varepsilon) - \varphi(x)\right| = \max_{[0,\pi]}\left|\varepsilon^2 v_1(x,T;\varepsilon)\right| \le c_3\varepsilon^2. \tag{2.9}$$

Оценка (2.9) означает, что при малых ε функцию $\tilde{\varphi}_0(x;\varepsilon)$ можно рассматривать в качестве приближенного решения обратной задачи 2.

Пусть $m = 1$. Учитывая разложение (2.6), определим приближенное решение обратной задачи 2 $\tilde{\varphi}_1(x;\varepsilon)$ как решение краевой задачи

$$\varepsilon^2 T\tilde{\varphi}_1''(x;\varepsilon) + \tilde{\varphi}_1(x;\varepsilon) = g(x;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2.10}$$

$$\tilde{\varphi}_1(0;\varepsilon) = \tilde{\varphi}_1(\pi;\varepsilon) = 0. \tag{2.11}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям* (2.4) *при* $m = 1$ *и* $\left|\sin(\varepsilon^{-1}T^{-1/2}\pi)\right| \ge a > 0$. *Тогда*

$$\max_{[0,\pi]}\left|\tilde{\varphi}_1(x;\varepsilon) - \varphi(x)\right| \le c_4\varepsilon^3. \tag{2.12}$$

Доказательство. Записав представление (2.6) для $m = 1$, $t = T$ и использовав условие (2.7), получим, что функция $\varphi(x)$ является решением краевой задачи

$$\varepsilon^2 T\varphi''(x;\varepsilon) + \varphi(x;\varepsilon) = g(x;\varepsilon) - \varepsilon^4 v_2(x,T;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{2.13}$$

$$\varphi(0;\varepsilon) = \varphi(\pi;\varepsilon) = 0. \tag{2.14}$$

Рассмотрим функцию $z(x;\varepsilon) = \tilde{\varphi}_1(x;\varepsilon) - \varphi(x)$. Из уравнений (2.10), (2.13) и условий (2.11), (2.14) следует, что функция $z(x;\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$z''(x;\varepsilon) + (\varepsilon^2 T)^{-1} z(x;\varepsilon) = \varepsilon^2 T^{-1} v_2(x,T;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi,$$
$$z(0;\varepsilon) = z(\pi;\varepsilon) = 0.$$

Решение этой задачи определяется формулой

$$z(x;\varepsilon) = \varepsilon^2 T^{-1} \int_0^\pi G(x,s;\varepsilon) v_2(s,T;\varepsilon) ds, \tag{2.15}$$

где

$$G(x,s;\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon T^{1/2} [\sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} \pi)]^{-1} \sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} x) \sin[\varepsilon^{-1} T^{-1/2} (s-\pi)], & x \le s, \\ \varepsilon T^{1/2} [\sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} \pi)]^{-1} \sin(\varepsilon^{-1} T^{-1/2} s) \sin[\varepsilon^{-1} T^{-1/2} (x-\pi)], & s \le x. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$v_2(x,T;\varepsilon) = \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^\infty n^4 e^{-\xi_n} \varphi_n \sin nx,$$

где

$$\varphi_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(s) \sin nsds, \quad \xi_n \ge 0.$$

Введем обозначения

$$\varphi_n^{(4)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi^{(4)}(s) \sin nsds.$$

Из условий теоремы следует, что $\varphi_n^{(4)} = n^4 \varphi_n$. Тогда

$$\max_{[0,\pi]} |v_2(x,T;\varepsilon)| = \max_{[0,\pi]} \left| \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^\infty e^{-\xi_n} \varphi_n^{(4)} \sin nx \right| \le c_5.$$

Из этой оценки и формулы (2.15) следует неравенство (2.12), и теорема 1 доказана.

Сделав дополнительное предположение о гладкости функции $\varphi(x)$, можно улучшить оценку (2.12).

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того,* $\varphi^{(6)}(x)$ *непрерывна на* $[0,\pi]$. *Тогда*

$$\max_{[0,\pi]} |\tilde{\varphi}_1(x;\varepsilon) - \varphi(x)| \le c_6 \varepsilon^4. \tag{2.16}$$

Доказательство. При сделанных предположениях существует частная производная

$$\frac{\partial v_2}{\partial x}(x,T;\varepsilon) = \frac{T^2}{2} \sum_{n=1}^\infty n^5 e^{-\xi_n} \varphi_n \cos nx.$$

Так как $\varphi^{(6)}(x)$ непрерывна на $[0,\pi]$, то

$$n^5 \varphi_n = -\frac{1}{n} \int_0^\pi \varphi^{(6)}(s) \sin nsds.$$

Следовательно,

$$\max_{[0,\pi]} \left| \frac{\partial v_2}{\partial x}(x,T;\varepsilon) \right| \le c_7. \tag{2.17}$$

Интегрируя по частям интегралы, входящие в формулу (2.15), и используя неравенство (2.17), получаем, что справедлива оценка (2.16).

В предыдущих доказательствах использовалось условие $\left|\sin(\varepsilon^{-1}T^{-1/2}\pi)\right| \geq a > 0$, обеспечивающее ограниченность функции Грина. От него можно отказаться, сделав дополнительное предположение относительно функции $\varphi(x)$, а именно, считая, что известно значение $\varphi'(0) = \varphi_{01}$.

Определим в этом случае приближенное решение обратной задачи 2 $\hat{\varphi}_1(x;\varepsilon)$ как решение задачи Коши

$$\varepsilon^2 T\hat{\varphi}_1''(x;\varepsilon) + \hat{\varphi}_1(x;\varepsilon) = g(x;\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\hat{\varphi}_1(0;\varepsilon) = 0, \quad \hat{\varphi}_1'(0;\varepsilon) = \varphi_{01}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *удовлетворяет условиям* (2.5) *с* $m = 1$, $\varphi^{(6)}(x)$ *непрерывна на* $[0,\pi]$ *и* $\varphi'(0) = \varphi_{01}$. *Тогда*

$$\max_{[0,\pi]}\left|\hat{\varphi}_1(x;\varepsilon) - \varphi(x)\right| \leq c_8\varepsilon^4.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\hat{z}(x;\varepsilon) = \hat{\varphi}_1(x;\varepsilon) - \varphi(x)$, являющуюся решением задачи Коши

$$\hat{z}''(x;\varepsilon) + (\varepsilon^2 T)^{-1}\hat{z}(x;\varepsilon) = \varepsilon^2 T^{-1} v_2(x,T;\varepsilon), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$
$$\hat{z}(0;\varepsilon) = \hat{z}'(0;\varepsilon) = 0.$$

Для решения этой задачи справедлива формула

$$\hat{z}(x;\varepsilon) = \varepsilon^3 T^{-1/2}\int_0^x \sin[\varepsilon^{-1}T^{-1/2}(x-s)]v_2(s,T;\varepsilon)ds.$$

Интегрируя по частям и используя оценку (2.17), получаем, что

$$\max_{[0,\pi]}\left|\hat{z}(x;\varepsilon\right|) \leq c_5\varepsilon^4,$$

и теорема 2 доказана.

3. ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИСТОЧНИКА

В этом разделе для уравнения теплопроводности с сингулярным возмущением рассматриваются две обратные задачи, состоящие в определении одной из функций, входящих в источник, при условии, что другая функция известна.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности с источником:

$$u_t(x,t) = \varepsilon^2 u_{xx}(x,t) + f(x)p(t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi. \tag{3.3}$$

Решение задачи (3.1)–(3.3) определяется формулой

$$u(x,t;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \int_0^t \exp[-n^2\varepsilon^2(t-\tau)]p(\tau)d\tau \sin nx, \tag{3.4}$$

где

$$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(s)\sin nsds.$$

Предположим, что функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$f \in C^{2m+3}[0,\pi], \quad f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m+1, \tag{3.5}$$

а $p \in C[0,T]$.

Проинтегрировав по частям интегралы, входящие в формулу (3.4), получим следующее представление:

$$u(x,t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{2k} f^{(2k)}(x) p_k(t) + \varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x,t;\varepsilon), \tag{3.6}$$

где

$$p_k(t) = \int_0^t \frac{(t-\tau)^k}{k!} p(\tau) d\tau, \quad k = 0, 1, \ldots, m,$$

а

$$v_{m+1}(x,t;\varepsilon) = (-1)^{m+1} \sum_{n=1}^{\infty} f_n n^{2(m+1)} \int_0^t \exp[-n^2\varepsilon^2(t-\tau)] p_m(\tau) d\tau \sin nx.$$

Сформулируем обратную задачу.

Обратная задача 3. Пусть функция $p(t)$ задана, а $f(x)$ неизвестна. Требуется определить $f(x)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (3.1)–(3.3):

$$u(x,T;\varepsilon) = g(x;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{3.7}$$

Рассмотрим вопрос о возможности построения приближенного решения этой обратной задачи на основе использования представления (3.6).

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (3.5) при $m = 0$. Предположим также, что

$$p_0(T) = \int_0^T p(\tau) d\tau \ne 0. \tag{3.8}$$

Учитывая представление (3.6), определим приближенное решение обратной задачи 3 следующим образом:

$$\tilde{f}_0(x) = (p_0(T))^{-1} g(x;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi. \tag{3.9}$$

Оценим разность $f(x) - \tilde{f}_0(x)$. Из (3.6)–(3.9) следует, что

$$\max_{[0,\pi]} \left| f(x) - \tilde{f}_0(x) \right| \le \varepsilon^2 \left| p_0(T) \right|^{-1} \max_{[0,\pi]} \left| v_1(x,T;\varepsilon) \right| \le c_9 \varepsilon^2. \tag{3.10}$$

Из оценки (3.10) следует, что функцию $\tilde{f}_0(x)$ можно считать приближенным решением обратной задачи 3.

Перейдем к построению приближенного решения в случае $m = 1$. Определим приближенное решение обратной задачи $\tilde{f}_1(x)$ как решение краевой задачи

$$\varepsilon^2 p_1(T) \tilde{f}_1''(x) + p_0(T) \tilde{f}_1(x) = g(x;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi, \tag{3.11}$$

$$\tilde{f}_1(0) = \tilde{f}_1(\pi) = 0. \tag{3.12}$$

При анализе задачи (3.11), (3.12) нужно рассматривать три случая: $p_1(T)p_0(T) > 0$, $p_1(T)p_0(T) < 0$ и $p_1(T)p_0(T) = 0$.

Очевидно, что первый случай аналогичен случаю $m = 1$ в обратной задаче 2. Поэтому для него ограничимся формулировкой теоремы, которая доказывается также как следствие теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть* $p_1(T)p_0(T) > 0$, *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям* (3.5) *при* $m = 1$, $f^{(6)}(x)$ *непрерывна на* $[0,\pi]$ *и*

$$\left| \sin\left(\pi \sqrt{p_0(T)(\varepsilon^2 p_1(T))^{-1}} \right) \right| \ge a > 0.$$

Тогда

$$\max_{[0,\pi]} \left| f(x) - \tilde{f}_1(x) \right| \le c_{10} \varepsilon^4.$$

Рассмотрим второй случай: $p_1(T)p_0(T) < 0$.

Теорема 4. *Пусть* $p_1(T)p_0(T) < 0$, *а функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям* (3.5) *при* $m = 1$. *Тогда*

$$\max_{[0,\pi]} \left| f(x) - \tilde{f}_1(x) \right| \le c_{11} \varepsilon^4.$$

Доказательство. Введем функцию $z(x;\varepsilon) = \tilde{f}_1(x) - f_1(x)$ и число $b^2 = -(p_1(T))^{-1}p_0(T)$. Функция $z(x;\varepsilon)$ является решением краевой задачи

$$z''(x;\varepsilon) - \varepsilon^{-2}b^2 z(x;\varepsilon) = \varepsilon^2(p_1(T))^{-1}v_2(x,T;\varepsilon), \quad 0 \le x \le \pi,$$
$$z(0;\varepsilon) = z(\pi;\varepsilon) = 0.$$

Решив эту задачу, получим

$$z(x;\varepsilon) = \varepsilon^3\left(bp_1(T)\frac{b}{\varepsilon}\pi\right)^{-1} \times$$
$$\times\left[\int_0^x \operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}(x-\pi)\operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}sv_2(s,T;\varepsilon)ds + \int_x^\pi \operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}x\operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}(s-\pi)v_2(s,T;\varepsilon)ds\right].$$

Из условий теоремы следует, что

$$\max_{[0,\pi]}|v_2(x,T;\varepsilon)| \le c_{12}.$$

Тогда

$$\max_{[0,\pi]}|z(x;\varepsilon)| \le \varepsilon^3 c_{12}\left(b|p_1(T)|\frac{b}{\varepsilon}\pi\right)^{-1} \times$$
$$\times \max_{[0,\pi]}\left[\int_0^x \operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}(\pi - x)\operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}sds + \int_x^\pi \operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}x\operatorname{sh}\frac{b}{\varepsilon}(\pi - s)ds\right] \le c_{11}\varepsilon^4,$$

и теорема 4 доказана.

Перейдем к третьему случаю $p_1(T)p_0(T) = 0$. Возможны три варианта. В первом $p_1(T) = 0$, $p_0(T) \ne 0$. Тогда

$$\max_{[0,\pi]}|f(x) - \tilde{f}_1(x)| \le c_{13}\varepsilon^4.$$

Во втором $p_0(T) = 0$, $p_1(T) \ne 0$ и

$$\max_{[0,\pi]}|f(x) - \tilde{f}_1(x)| \le c_{14}\varepsilon^2.$$

Третий случай $p_1(T) = p_0(T) = 0$ для построения приближенного решения на основе уравнения (3.11) является бессодержательным.

Перейдем к задаче определения источника, в которой неизвестной является функция, зависящая от времени.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\varepsilon^2 u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + f(x)p(t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{3.13}$$
$$u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.14}$$
$$u_x(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{3.15}$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{3.16}$$

Будем предполагать, что функции $f(x)$ и $p(t)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$f \in C^1[0,\pi], \quad f(0) = f'(\pi) = 0, \tag{3.17}$$
$$p \in C^{m+1}[0,T], \quad p^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m. \tag{3.18}$$

Из метода разделения переменных следует формула для решения задачи (3.13)–(3.16)

$$u(x,t;\varepsilon) = (\varepsilon)^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} f_n\int_0^t \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2(t-\tau)\right]p(\tau)d\tau\sin\frac{2n+1}{2}x,$$

где

$$f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(s)\sin\frac{2n+1}{2}sds.$$

Интегрируя по частям, получим следующее представление:

$$u(x,t;\varepsilon) = \sum_{k=0}^{m} \varepsilon^{2k} F_k(x) p^{(k)}(t) + \varepsilon^{2(m+1)} v_{m+1}(x,t;\varepsilon), \tag{3.19}$$

где

$$F_k(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{2(k+1)} \sin\frac{2n+1}{2}x,$$

а

$$v_{m+1}(x,t;\varepsilon) = (\varepsilon)^{-2}(-1)^{m+1} \times$$
$$\times \sum_{n=0}^{\infty} f_n \left(\frac{2}{2n+1}\right)^{2(m+1)} \int_0^t \exp\left[-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 (t-\tau)\right] p^{(m+1)}(\tau) d\tau \sin\frac{2n+1}{2}x.$$

Для функций $F_k(x)$ справедливы также формулы

$$F_0(x) = -\int_0^\pi G(x,s) f(s) ds, \quad F_{k+1}(x) = \int_0^\pi G(x,s) F_k(s) ds, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

где $G(x,s)$ – функция Грина краевой задачи

$$y''(x) = F(x), \quad 0 \le x \le \pi,$$
$$y(0) = y'(\pi) = 0.$$

Сформулируем обратную задачу.

Обратная задача 4. Пусть функция $f(x)$ задана, а $p(t)$ неизвестна. Требуется определить $p(t)$, если задана дополнительная информация о решении задачи (3.13)–(3.16):

$$u(x_0,t;\varepsilon) = g(t,\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.20}$$

где x_0 – известная фиксированная точка $x_0 \in (0,\pi]$.

Рассмотрим вопрос о возможности построения приближенного решения обратной задачи 4 на основе использования разложения (3.19).

Пусть $F_0(x_0) \ne 0$ и функция $p(t)$ удовлетворяет условиям (3.18) при $m = 0$. Определив приближенное решение обратной задачи 4 следующим образом: $p_0(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon)(F_0(x_0))^{-1}$, получим, что

$$\max_{[0,T]} |p_0(t;\varepsilon) - p(t)| \le \varepsilon^2 |F_0(x_0)|^{-1} \max_{[0,T]} |v_1(x_0,t;\varepsilon)| \le c_{15}\varepsilon^2.$$

Из этой оценки следует, что функцию $p_0(t;\varepsilon)$ можно считать приближенным решением обратной задачи 4.

Пусть функция $p(t)$ удовлетворяет условиям (3.18) при $m = 1$. Определим в этом случае приближенное решение обратной задачи 4 $p_1(t;\varepsilon)$ как решение задачи Коши

$$\varepsilon^2 F_1(x_0) p_1'(t;\varepsilon) + F_0(x_0) p_1(t;\varepsilon) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.21}$$

$$p_1(0;\varepsilon) = 0. \tag{3.22}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть функция* $p(t)$ *удовлетворяет условиям* (3.18) *при* $m = 1$, *а* $f(x)$ *такова, что выполнены условия* (3.17) *и* $F_1(x_0)F_0(x_0) > 0$. *Тогда*

$$\max_{[0,T]} |p_1(t;\varepsilon) - p(t)| \le c_{16}\varepsilon^4.$$

Доказательство. Введем функцию $z(x;\varepsilon) = p_1(t;\varepsilon) - p(t)$. Из представления (3.19), условия (3.20), уравнения (3.21) и условия (3.22) следует, что $z(t;\varepsilon)$ является решением задачи Коши

$$z'(t;\varepsilon) + F_0(x_0)(\varepsilon^2 F_1(x_0))^{-1} z(t;\varepsilon) = \varepsilon^2 (F_1(x_0))^{-1} v_2(x_0,t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.23}$$

$$z(0;\varepsilon) = 0. \tag{3.24}$$

Для функции $v_2(x_0,t;\varepsilon)$ справедлива оценка

$$\max_{[0,T]}|v_2(x_0,t;\varepsilon)| \le c_{17}. \tag{3.25}$$

Решение задачи (3.23), (3.24) определяется формулой

$$z(x;\varepsilon) = \varepsilon^2(F_1(x_0))^{-1}\int_0^t \exp[-F_0(x_0)(\varepsilon^2 F_1(x_0))^{-1}(t-\tau)]v_2(x_0,\tau;\varepsilon)d\tau.$$

Из этой формулы и оценки (3.25) следует утверждение теоремы.

Замечание 1. Легко видеть, что при $F_1(x_0)F_0(x_0) < 0$ решение задачи (3.21), (3.22) не сходится к $p(t)$ при $\varepsilon \to 0$.

Замечание 2. Так как функция Грина $G(x,s)$ отрицательна при положительных x и s, то для выполнения условия $F_1(x_0)F_0(x_0) > 0$ необходимо, чтобы функция $f(x)$ меняла знак на отрезке $[0,\pi]$.

Замечание 3. Из представления (3.19) следует, что при $m > 1$ приближенное решение обратной задачи 4 определяется как решение задачи Коши

$$\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^{2k}F_k(x_0)p_m^{(k)}(t) = g(t;\varepsilon), \quad 0 \le t \le T, \tag{3.26}$$

$$p_m^{(k)}(0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Очевидно, что условие неположительности действительных частей корней характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (3.26), накладывает сильные ограничения на функцию $f(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука, Сиб. отд., 1980.
2. *Романов В.Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
3. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностр., 1988.
4. *Денисов А.М.* Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994.
5. *Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.V.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. New York: Marcel Dekker, 2000.
6. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer, 2006.
7. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.
8. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970.
9. *Иванов В.К.* Задача квазиобращения для уравнения теплопроводности в равномерной метрике // Дифференц. ур-ния. 1972. Т. 8. № 4. С. 652–658.
10. *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004.
11. *Короткий А.И., Цепелев И.А., Исмаил-заде А.Е.* Численное моделирование обратных ретроспективных задач тепловой конвекции с приложениями к задачам геодинамики // Изв. Уральского ун-та. 2008. № 58. С. 78–87.
12. *Табаринцева Е.В., Менихес Л.Д., Дрозин А.Д.* О решении граничной обратной задачи методом квазиобращения // Вестник ЮУГУ. Сер. Математика. Механика, Физика. 2012. Вып. 6. С. 8–13.
13. *Денисов А.М.* Асимптотика решений обратных задач для гиперболических уравнений с малым параметром при старшей производной // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53. № 5. С. 744–752.
14. *Belov Yu.Ya., Kopylova V.G.* Determination of source function in composite type system of equations // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2014. Т. 7. Вып. 3. С. 275–288.
15. *Denisov A.M., Solov'eva S.I.* Numerical determination of the initial condition in cauchy problem for hyperbolic equation with a small parameter// Comp. Math. and Model. 2018. V. 29. № 1. P. 1–9.
16. *Денисов А.М., Соловьева С.И.* Численное решение обратных задач для гиперболического уравнения с малым параметром при старшей производной // Дифференц. ур-ния. 2018. Т. 54. № 7. С. 919–928.
17. *Тихонов А.Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Матем. сборник. 1948. Т. 22. № 2. С. 193–204.
18. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
19. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981.
20. *Mishchenko E.F., Kolesov Yu.S., Kolesov A.Yu., Rozov N.Kh.* Asymptotic methods in singularly perturbed systems. New York: Consult. Bureau, Plenum Publ. Corp., 1994.