ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2021, том 61, № 12, с. 1974–1985

ОБЩИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

УДК 517.988

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ КЛАССА ИТЕРАТИВНО РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ МЕТОДОВ ГАУССА–НЬЮТОНА С АПОСТЕРИОРНЫМ ОСТАНОВОМ[1)]

© 2021 г. М. М. Кокурин

424001 Йошкар-Ола, пл. Ленина, 1, Марийский государственный университет, Россия

e-mail: kokurin@nextmail.ru

Поступила в редакцию 16.12.2020 г.
Переработанный вариант 16.12.2020 г.
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Исследуется класс итеративно регуляризованных методов Гаусса–Ньютона для решения нерегулярных нелинейных уравнений с гладкими операторами в гильбертовом пространстве. Останов итераций производится по апостериорному способу, близкому к принципу невязки В.А. Морозова. Обосновано регуляризующее свойство итераций и получена оценка точности получаемого приближения при выполнении условия истокопредставимости искомого решения. Оценка дана в терминах погрешности оператора без привлечения структурных условий на этот оператор. Библ. 14.

Ключевые слова: операторное уравнение, нерегулярный оператор, гильбертово пространство, методы Гаусса–Ньютона, итеративная регуляризация, апостериорный останов, оценка точности.

DOI: 10.31857/S0044466921120097

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$F(x) = 0_{H_2}, \quad x \in H_1, \tag{1}$$

с дифференцируемым по Фреше оператором $F : H_1 \to H_2$, где H_1, H_2 — гильбертовы пространства, 0_{H_2} — нулевой элемент пространства H_2. Пусть x^* — искомое решение уравнения (1). Однозначная разрешимость уравнения (1) далее не предполагается. Считаем, что оператор F дифференцируем по Фреше, и производная F' удовлетворяет на шаре

$$\Omega_R(x^*) = \{x \in H_1 : \|x - x^*\|_{H_1} \le R\}$$

условию Липшица

$$\|F'(x) - F'(y)\|_{L(H_1,H_2)} \le L\|x - y\|_{H_1}, \quad x, y \in \Omega_R(x^*).$$

Таким образом, для подходящей константы M выполняется

$$\|F'(x)\|_{L(H_1,H_2)} \le M, \quad x \in \Omega_R(x^*).$$

Например, можно положить $M = \|F'(\overline{x})\|_{L(H_1,H_2)} + 2LR$ с произвольной $\overline{x} \in \Omega_R(x^*)$.

При наших предположениях, не требующих регулярности оператора F в окрестности решения, задача (1) является в общем случае некорректной. Регулярность оператора F по определению означает, что оператор $F'(x)$, либо $F'^*(x)F'(x)$ непрерывно обратим для всех точек x из некоторой окрестности x^*.

В виде нерегулярного операторного уравнения (1) записывается широкий спектр нелинейных интегральных уравнений и прикладных обратных задач (см., например, [1], [2] и имеющиеся там

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 20-11-20085).

ссылки). На практике вместо точного оператора F часто бывает известна лишь его аппроксимация $F_\delta : H_1 \to H_2$. Будем предполагать, что оператор F_δ также непрерывно дифференцируем по Фреше и

$$\left\|F'_\delta(x) - F'_\delta(y)\right\|_{L(H_1,H_2)} \le L\|x - y\|_{H_1},$$
$$\left\|F'_\delta(x)\right\|_{L(H_1,H_2)} \le M, \quad x, y \in \Omega_R(x^*). \tag{2}$$

Кроме того, потребуем выполнения оценок

$$\|F_\delta(x^*)\|_{H_2} \le \delta, \quad \left\|F'_\delta(x) - F'(x)\right\|_{L(H_1,H_2)} \le \delta, \quad x \in \Omega_R(x^*) \tag{3}$$

с известным уровнем погрешности $\delta > 0$.

Для получения устойчивой аппроксимации точки x^* по данным (δ, F_δ) могут быть использованы различные классы итерационных процессов (см. [3]–[5]). В настоящей работе объектом исследования является группа итеративно регуляризованных методов типа Гаусса–Ньютона (см. [3, с. 127]):

$$x_{n+1} = \xi - \Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n), \alpha_n)F'^*_\delta(x_n)[F_\delta(x_n) - F'_\delta(x_n)(x_n - \xi)]. \tag{4}$$

Здесь $x_0 \in \Omega_R(x^*)$ — начальное приближение, $\xi \in H_1$ — параметр процесса, служащий наряду с x_0 аппроксимацией решения x^*, $\{\alpha_n\}$ — управляющая последовательность параметров регуляризации, удовлетворяющая условиям

$$0 < \alpha_{n+1} \le \alpha_n, \quad \sup_{n=0,1,\ldots} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} \equiv r < +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{5}$$

Функция $\Theta(\lambda, \alpha)$, называемая порождающей функцией группы методов (4), при каждом $\alpha \in (0, \alpha_0]$ как вещественнозначная функция аргумента λ должна допускать аналитическое продолжение в открытое множество, содержащее отрезок $[0, M^2]$. Наложим на нее следующие условия:

$$\exists C_1 > 0 : \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad \max_{\lambda \in [0, M^2]} \left|\Theta(\lambda, \alpha)\sqrt{\lambda}\right| \le \frac{C_1}{\sqrt{\alpha}}; \tag{6}$$

$$\exists p^* \ge 1 : \forall p \in [0, p^*], \quad \exists C_2 = C_2(p) > 0 : \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad \max_{\lambda \in [0, M^2]} |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|\lambda^p \le C_2\alpha^p. \tag{7}$$

Пусть для некоторого семейства $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha \in (0,\alpha_0]}$ положительно ориентированных контуров на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, такого что

$$\sup_{\alpha \in (0,\alpha_0]} \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha} |\lambda| < \infty, \quad \sup_{\alpha \in (0,\alpha_0]} \sup_{\lambda \in \Gamma_\alpha, \mu \in [0, M^2]} \frac{|\lambda| + \mu}{|\lambda - \mu|} < \infty,$$

выполняется соотношение

$$\sup_{\alpha \in (0,\alpha_0]} \int_{\Gamma_\alpha} \frac{|1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda|}{|\lambda|} |d\lambda| < +\infty.$$

В дополнение к этим условиям, изложенным в [3, с. 114], потребуем, чтобы выполнялось

$$\forall \nu \in (0, M^2), \quad \exists C_3 = C_3(\nu) : \forall \alpha \in (0, \alpha_0], \quad \forall \lambda \in [\nu, M^2], \quad |1 - \Theta(\lambda, \alpha)\lambda| \ge C_3\alpha^{p^*}. \tag{8}$$

Похожее условие использовалось ранее в [6, p. 80]. Здесь и далее константы C_1, C_2, ... не зависят от n, δ.

Перечисленным выше условиям удовлетворяет, например, функция (см. [3, с. 122])

$$\Theta(\lambda, \alpha) = \frac{1}{\lambda}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\lambda + \alpha}\right)^m\right], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

с константой $p^* = m$. Итерационный процесс (4), (9) реализуется следующим образом: $x_{n+1} = x_{n+1}^{(N)}$, где $x_{n+1}^{(0)} = \xi$ и точки внутреннего итерационного процесса $\{x_{n+1}^{(k)}\}_{k=1}^{N}$ определяются рекуррентно из уравнений

$$(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n) + \alpha_n E_1)x_{n+1}^{(k+1)} = \alpha_n x_{n+1}^{(k)} + F_\delta'^*(x_n)[F_\delta'(x_n)x_n - F_\delta(x_n)], \\ k = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{10}$$

В частном случае $m = 1$ имеем хорошо известный итеративно регуляризованный метод Гаусса–Ньютона

$$x_{n+1} = \xi - (F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n) + \alpha_n E_1)^{-1}F_\delta'^*(x_n)[F_\delta(x_n) - F_\delta'(x_n)(x_n - \xi)].$$

Здесь и далее E_j — единичный оператор в пространстве H_j, $j = 1, 2$. Заметим, что итерационный процесс (10) заключается в применении к линеаризованному уравнению

$$F_\delta'(x_n)(x - x_n) + F_\delta(x_n) = 0_{H_2}, \quad x \in H_1,$$

m раз итерированного метода Тихонова (см. [7, с. 20]).

Известно, что в случае $\delta > 0$ процессы вида (4), вообще говоря, расходятся при $n \to \infty$. Поэтому для получения приближения к x^*, адекватного уровню погрешности δ, требуется останов итераций на шаге с подходящим номером $n = N$. Различают априорные и апостериорные правила останова. В первом случае количество выполняемых итераций $N = N(\delta)$ назначается до начала расчетов. Во втором случае момент останова счета определяется непосредственно в процессе реализации итераций, так что номер $N = N(\delta, F_\delta)$ кроме погрешности δ зависит и от приближенного оператора F_δ. При выполнении условия истокопредставимости

$$\xi - x^* = (F'^*(x^*)F'(x^*))^p v, \quad v \in H_1, \tag{11}$$

с показателем $p \in [1/2, p^*]$ и подходящем априорном правиле останова $N = N(\delta)$ для методов класса (4) имеет место оценка (см. [3, с. 128])

$$\|x_{N(\delta)} - x^*\|_{H_1} = O(\delta^{2p/(2p+1)}), \quad 1/2 \le p \le p^*. \tag{12}$$

Упомянутое правило описывается условием $\alpha_{N(\delta)}^{p+1/2} \sim \delta$. Существенным недостатком таких правил останова является то обстоятельство, что в них номер $N = N(\delta, p)$ помимо δ зависит еще и от параметра истокопредставимости p, который в прикладных задачах обычно неизвестен.

Преимущества апостериорных правил связаны с возможностью более гибкой настройки итерационного процесса на конкретную задачу за счет использования дополнительной информации о ней, доставляемой оператором F_δ. Наиболее известный апостериорный критерий останова (принцип невязки В.А. Морозова) имеет вид

$$\|F_\delta(x_{N(\delta, F_\delta)})\|_{H_2} < \tau\delta \le \|F_\delta(x_n)\|_{H_2}, \quad 0 \le n \le N(\delta, F_\delta) - 1, \quad \tau > 1. \tag{13}$$

Гибкость апостериорных правил вида (13) проявляется в том, что эти правила не требуют задания параметра истокопредставимости p и в то же время при подходящих дополнительных условиях обеспечивают выполнение оптимальной по порядку оценки точности (12). Таким образом, итерационный процесс с таким правилом останова обладает свойством самонастройки на задачу с решением из определенного класса истокопредставимости. Наиболее завершенный вид теория решения нерегулярных уравнений с апостериорными правилами выбора параметра регуляризации имеет в случае линейных уравнений (см. [7, гл. 2, 3]). В нелинейном случае обозначенный выше результат до сих пор удавалось получить (см. [8]–[10]) лишь при наложении на оператор F дополнительных структурных условий вида

$$F'(x) = L(x, \bar{x})F'(\bar{x}), \\ \|E_2 - L(x, \bar{x})\|_{L(H_2, H_2)} \le d\|x - \bar{x}\|_{H_1}, \quad d > 0; \quad x, \bar{x} \in \Omega_R(x^*). \tag{14}$$

Если отказаться от условий типа (14), то уже для установления сходимости $\lim\limits_{\delta\to 0}\|x_{N(\delta,F_\delta)} - x^*\|_{H_1} = 0$ требуется модификация первоначального критерия (13). Один из возможных способов (см. [3, с. 131], [11]) состоит в выборе момента останова из условия

$$\|F_\delta(x_{N(\delta,F_\delta)})\|^2_{H_2} < \tau\delta \le \|F_\delta(x_n)\|^2_{H_2}, \quad 0 \le n \le N(\delta, F_\delta) - 1; \quad \tau > 1. \tag{15}$$

В этом случае устанавливается, что номер $N(\delta, F_\delta)$ корректно определен и выполняется оценка точности

$$\|x_{N(\delta,F_\delta)} - x^*\|_{H_1} = O(\alpha^p_{N(\delta,F_\delta)}). \tag{16}$$

Оценка (16) (см. также аналогичную оценку (3.8) в [12]) оставляет открытым вопрос о точности приближения $x_{N(\delta,F_\delta)}$, выраженной непосредственно в терминах уровня шума δ. Целью настоящей работы является получение такой оценки для итерационного процесса (4). При этом вместо (13), (15) используется следующее модифицированное правило останова:

$$\sqrt{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}\,\|F_\delta(x_{N(\delta,F_\delta)})\|_{H_2} < \tau\delta \le \sqrt{\alpha_n}\,\|F_\delta(x_n)\|_{H_2}, \quad 0 \le n \le N(\delta, F_\delta) - 1. \tag{17}$$

Без использования дополнительных предположений относительно оператора F ниже в теореме 3 устанавливается оценка точности

$$\|x_{N(\delta,F_\delta)} - x^*\|_{H_1} = O(\delta^{2p/(2p^*+1)}), \quad (p^*+1)/2 \le p \le p^*. \tag{18}$$

Как показывает сравнение (18) с оценкой (12), обеспечиваемой априорным правилом останова, получаемая оценка охватывает более узкий отрезок изменения показателей истокопредставимости p. Кроме того, оценка (18) уступает по порядку оценке (12) при $p < p^*$ и совпадает с ней лишь в случае $p = p^*$. Тем не менее (18) не предполагает не только каких-либо условий на нелинейность оператора F, но и наличия априорной информации о значении p помимо условия $p \ge (p^*+1)/2$.

Структура работы следующая. В разд. 2 устанавливаются корректность правила останова (17) и сходимость получаемых аппроксимаций к решению задачи (1). Раздел 3 посвящен доказательству основного утверждения работы, устанавливающего оценку точности аппроксимаций, доставляемых итерациями (4), (17), в терминах уровня погрешности δ.

2. СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИЙ

В этом разделе при определенных дополнительных условиях будут установлены корректность правила останова (17) и сходимость порождаемых приближений $x_{N(\delta,F_\delta)}$ к решению x^*. Ниже нам понадобится вытекающее из (2) представление

$$\begin{gathered} F_\delta(y) = F_\delta(x) + F'_\delta(x)(y-x) + G(x,y), \quad x, y \in \Omega_R(x^*); \\ \|G(x,y)\|_{H_2} \le \frac{1}{2}L\|x-y\|^2_{H_1}. \end{gathered} \tag{19}$$

Пусть при некотором $1/2 \le p \le p^*$ выполняется условие (11), последовательность итерационных точек $\{x_n\}$ строится согласно (4), $x_0 \in \Omega_R(x^*)$. Используя (19), получаем (см. [3, с. 130]), что если $x_n \in \Omega_R(x^*)$, то с подходящими постоянными $C_4, \ldots, C_7$ выполняется

$$\|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} \le \frac{C_4}{\sqrt{\alpha_n}}\|x_n - x^*\|^2_{H_1} + C_5\|v\|_{H_1}\alpha_n^p + C_6\|v\|_{H_1}\|x_n - x^*\|_{H_1} + C_7\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_n}}. \tag{20}$$

Вначале покажем, что условие (17) корректно определяет номер $N(\delta, F_\delta) \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что

$$\sqrt{\alpha_0}\,\|F_\delta(x_0)\|_{H_2} > \tau\delta. \tag{21}$$

Предположим, что номер $N(\delta, F_\delta)$, удовлетворяющий (17), не существует. Возможны два случая.

1. Для всех $n = 1, 2, \ldots$ выполняется $x_n \in \Omega_R(x^*)$ и $\sqrt{\alpha_n}\,\|F_\delta(x_n)\|_{H_2} > \tau\delta$.

2. Найдется номер $K \in \mathbb{N}$ такой, что $x_n \in \Omega_R(x^*)$, $\sqrt{\alpha_n}\,\|F_\delta(x_n)\|_{H_2} > \tau\delta$ для всех $n = 1, 2, \dots, K$, но $x_{K+1} \notin \Omega_R(x^*)$.

Заметим, что в силу (2)

$$\|F_\delta(x) - F_\delta(y)\|_{H_2} \le M\,\|x - y\|_{H_1}, \quad x, y \in \Omega_R(x^*).$$

Поэтому $\sup\limits_{n=0,1,\dots} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} < \infty$, и случай 1 противоречит условию $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ из (5).

Далее укажем условия на параметры процесса (4), (17), при выполнении которых случай 2 также не реализуется. Пусть выполняется условие

$$2\sqrt{\alpha_0} \le \tau. \tag{22}$$

Тогда для произвольного номера $1 \le n \le K$ с учетом (5) имеем

$$\frac{\tau\delta}{\sqrt{\alpha_n}} \le \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} \le M\,\|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta \le M\,\|x_n - x^*\|_{H_1} + \frac{\tau\delta}{2\sqrt{\alpha_n}}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_n}} \le \frac{2M}{\tau}\|x_n - x^*\|_{H_1}. \tag{23}$$

Объединяя оценки (20) и (23), получаем

$$\|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} \le \frac{C_4}{\sqrt{\alpha_n}}\|x_n - x^*\|_{H_1}^2 + C_5\,\|v\|_{H_1}\,\alpha_n^p + \left(C_6\,\|v\|_{H_1} + \frac{2C_7M}{\tau}\right)\|x_n - x^*\|_{H_1}. \tag{24}$$

Предположим, что с некоторой постоянной $l > 0$ выполняется

$$\|x_0 - x^*\|_{H_1} \le l\alpha_0^p \le R. \tag{25}$$

Покажем, что при некоторых дополнительных предположениях тогда будет справедливо

$$\|x_n - x^*\|_{H_1} \le l\alpha_n^p, \quad 0 \le n \le K + 1. \tag{26}$$

Доказательство проведем по индукции. При $n = 0$ искомое утверждение совпадает с (25). Пусть теперь неравенство (26) верно для некоторого номера $0 \le n \le K$. Убедимся, что тогда

$$\|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} \le l\alpha_{n+1}^p. \tag{27}$$

Из (24) и (5) в силу предположения индукции получаем

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\|_{H_1} &\le \left[C_4 l\alpha_n^{p-1/2} + \frac{C_5\|v\|_{H_1}}{l} + \left(C_6\,\|v\|_{H_1} + \frac{2C_7M}{\tau}\right)\right] l\alpha_n^p \le \\ &\le \left[C_4 l\alpha_0^{p-1/2} + \frac{C_5\|v\|_{H_1}}{l} + \left(C_6\,\|v\|_{H_1} + \frac{2C_7M}{\tau}\right)\right] r^p l\alpha_{n+1}^p. \end{aligned} \tag{28}$$

Дополнительно к сделанным ранее предположениям будем считать выполненным условие

$$\left[C_4 l\alpha_0^{p-1/2} + \frac{C_5\|v\|_{H_1}}{l} + \left(C_6\,\|v\|_{H_1} + \frac{2C_7M}{\tau}\right)\right] r^{p^*} \le 1. \tag{29}$$

Поскольку $r \ge 1$, требуемая оценка (27) непосредственно следует из (28), (29). Этим шаг индукции завершен. Из (26) с учетом (5) и (25) теперь следует, что $x_{K+1} \in \Omega_R(x^*)$. Мы убедились, что случай 2) также не реализуется. Одновременно доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (21), (22), (25), (29). *Тогда условие* (17) *корректно определяет номер* $N(\delta, F_\delta) \in \mathbb{N}$. *При этом имеет место оценка*

$$\|x_n - x^*\|_{H_1} \le l\alpha_n^p, \quad 1 \le n \le N(\delta, F_\delta). \tag{30}$$

Замечание 1. Условие (29) выполняется, если величина l выбрана достаточно малой, а параметр τ достаточно большим так, что

$$\left(C_4 l \alpha_0^{p-1/2} + \frac{2C_7 M}{\tau}\right) r^{p^*} \le \frac{1}{2}.$$

При этом на элемент v в условии истокопредставимости (11) следует наложить требование

$$\|v\|_{H_1} < \frac{l}{2(C_5 + C_6 l) r^{p^*}}.$$

Исследуем теперь сходимость приближений $x_{N(\delta,F_\delta)} = x_{N(\delta,F_\delta)}(F_\delta)$ к решению x^* при $\delta \to 0$. Примем техническое предположение о том, что шар $\Omega_R(x^*)$ не содержит отличных от x^* решений уравнения (1). Для простоты будем считать, что задана дискретная последовательность приближенных операторов $\{F_{\delta_q}\}$ с соответствующими уровнями погрешности $\{\delta_q\} \to 0$. Тогда получаем последовательность приближений $\{x_{N(\delta_q, F_{\delta_q})}(F_{\delta_q})\}$.

Зафиксируем $x_0 \in \Omega_R(x^*)$ и будем обозначать через $x_n(\widetilde{F})$ результат n шагов процесса (4) с $F_\delta = \widetilde{F}$. Пусть $x_n^{(q)} = x_n(F_{\delta_q})$, $x_n^* = x_n(F)$. Ниже нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть положительная числовая последовательность* $\{\delta_q\}$, $\lim\limits_{q\to\infty} \delta_q = 0$, *и последовательность* $\{F_{\delta_q}\}$ *дифференцируемых по Фреше операторов удовлетворяют соотношениям* (2) *и* (3) *с* $\delta = \delta_q$, $F_\delta = F_{\delta_q}$ *при любом* q. *Тогда для любого номера* $n \in \mathbb{N}$, *при котором* $x_k^{(q)} \in \Omega_R(x^*)$ *для всех* $k \le n$ *и* $q \in \mathbb{N}$, *справедливо*

$$\lim_{q\to\infty} \left\| x_n^{(q)} - x_n^* \right\|_{H_1} = 0. \tag{31}$$

Доказательство проведем по индукции. Пусть для некоторого номера n, удовлетворяющего условию леммы, соотношение (31) верно. Тогда $x_n^* \in \Omega_R(x^*)$. Отметим, что для номера $n = 0$ сказанное справедливо. Тогда

$$\begin{gathered}
x_{n+1}^{(q)} - x_{n+1}^* = (\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})(x_n^{(q)} - \xi) - \\
- \Theta(F'^*(x_n^*) F'(x_n^*), \alpha_n) F'^*(x_n^*) F'(x_n^*)(x_n^* - \xi)) - \\
- (\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}(x_n^{(q)}) - \Theta(F'^*(x_n^*) F'(x_n^*), \alpha_n) F'^*(x_n^*) F(x_n^*)) = \\
= \Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})(x_n^{(q)} - x_n^*) + (\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) - \\
- \Theta(F'^*(x_n^*) F'(x_n^*), \alpha_n) F'^*(x_n^*) F'(x_n^*))(x_n^* - \xi) - \\
- \Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}(x_n^{(q)}) - F'^*(x_n^*) F(x_n^*)) - \\
- (\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) - \Theta(F'^*(x_n^*) F'(x_n^*), \alpha_n)) F'^*(x_n^*) F(x_n^*).
\end{gathered} \tag{32}$$

В силу непрерывности функций $\Theta(\lambda, \alpha_n)$ и $\Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda$ при $\lambda \in [0, M^2]$ операторы $\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)$ и $\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}(x_n^{(q)})$ равномерно ограничены по q. Кроме того,

$$\begin{gathered}
\left\| F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) F_{\delta_q}(x_n^{(q)}) - F'^*(x_n^*) F(x_n^*) \right\|_{H_1} \le \left\| F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})(F_{\delta_q}(x_n^{(q)}) - F_{\delta_q}(x_n^*)) \right\|_{H_1} + \\
+ \left\| F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})(F_{\delta_q}(x_n^*) - F(x_n^*)) \right\|_{H_1} + \left\| (F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)}) - F_{\delta_q}'^*(x_n^*)) F(x_n^*) \right\|_{H_1} + \left\| (F_{\delta_q}'^*(x_n^*) - F'^*(x_n^*)) F(x_n^*) \right\|_{H_1} \le
\end{gathered}$$

$$\le M^2 \left\| x_n^{(q)} - x_n^* \right\|_{H_1} + M(\delta_q + \delta_q \left\| x_n^* - x^* \right\|_{H_1}) + LM \left\| x_n^{(q)} - x_n^* \right\|_{H_1} \left\| x_n^* - x^* \right\|_{H_1} +$$
$$+ M\delta_q \left\| x_n^* - x^* \right\|_{H_1} \to 0 \quad (q \to \infty).$$

Отсюда

$$\lim_{q\to\infty} \left\| \Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})(x_n^{(q)} - x_n^*) \right\|_{H_1} = 0, \tag{33}$$

$$\lim_{q\to\infty} \left\| \Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n)(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}(x_n^{(q)}) - F'^*(x_n^*)F(x_n^*)) \right\|_{H_1} = 0. \tag{34}$$

Кроме того, нетрудно видеть, что последовательность операторов $\{F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)})\}$ равномерно сходится к оператору $F'^*(x_n^*)F'(x_n^*)$, поэтому (см. [13, с. 626]) имеет место сходимость в операторной норме

$$\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}) \to \Theta(F'^*(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n)F'^*(x_n^*)F'(x_n^*), \tag{35}$$

$$\Theta(F_{\delta_q}'^*(x_n^{(q)})F_{\delta_q}'(x_n^{(q)}), \alpha_n) \to \Theta(F'^*(x_n^*)F'(x_n^*), \alpha_n) \tag{36}$$

при $q \to \infty$. Объединяя (32)–(36), приходим к соотношению

$$\lim_{q\to\infty} \left\| x_{n+1}^{(q)} - x_{n+1}^* \right\|_{H_1} = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Последовательность моментов останова $\{N(\delta_q, F_{\delta_q})\}$ ограничена, так что $N(\delta_q, F_{\delta_q}) \le \overline{N}$, $q \in N$. В этом случае найдется такой номер K_0, что $\{N(\delta_q, F_{\delta_q}) : q \ge K_0\}$ есть объединение конечного числа бесконечных стационарных подпоследовательностей вида $\{N(\delta_{q_j^{(l)}}, F_{\delta_{q_j^{(l)}}}) \equiv N_l\}_{j=1}^\infty$, где $N_l \ne N_m$ при $l \ne m$. Как следует из (17) и (3), для каждого l справедливо

$$\frac{\tau\delta_{q_j^{(l)}}}{\sqrt{\alpha_{N_l}}} > \left\| F_{\delta_{q_j^{(l)}}}(x_{N_l}(F_{\delta_{q_j^{(l)}}})) \right\|_{H_2} \ge \left\| F(x_{N_l}(F_{\delta_{q_j^{(l)}}})) \right\|_{H_2} - \delta_{q_j^{(l)}} - \delta_{q_j^{(l)}} \left\| x_{N_l}(F_{\delta_{q_j^{(l)}}}) - x^* \right\|_{H_1}.$$

В этом двойном неравенстве при любом l левая часть стремится при $j \to \infty$ к нулю, а правая часть в силу леммы 1 к величине $\left\| F(x_{N_l}^*) \right\|_{H_2}$. Отсюда следует $F(x_{N_l}^*) = 0_{H_2}$. Поскольку по предположению точка x^* является единственным решением уравнения (1) в шаре $\Omega_R(x^*)$, мы имеем $x_{N_l}^* = x^*$ для каждого l.

2. В последовательности номеров $\{N(\delta_q, F_{\delta_q})\}$ имеется неограниченная монотонно возрастающая подпоследовательность $\{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})\}$. В этом случае, согласно (5), имеем

$$\lim_{s\to\infty} \alpha_{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})} = 0. \tag{37}$$

Тогда из (30) и (37) следует

$$\lim_{s\to\infty} \left\| x_{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})} - x^* \right\|_{H_1} = 0. \tag{38}$$

Итак, мы показали, что если подпоследовательность номеров $N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})$ имеет предел, конечный или бесконечный, то вдоль этой подпоследовательности выполняется (38). Легко видеть, что отсюда следует и

$$\lim_{q\to\infty} \left\| x_{N(\delta_q, F_{\delta_q})} - x^* \right\|_{H_1} = 0. \tag{39}$$

В самом деле, в противном случае для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется возрастающая последовательность $\{q_s\} \subset N$ такая, что

$$\left\| x_{N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})} - x^* \right\|_{H_1} > \varepsilon.$$

Выделив из последовательности номеров $N(\delta_{q_s}, F_{\delta_{q_s}})$ подпоследовательность, имеющую конечный или бесконечный предел, придем к противоречию с доказанным выше. Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и заданы последовательности* $\{F_{\delta_q}\}$, $\{\delta_q\}$ *такие, что для каждого* q *выполняется* (3) *с* $F_\delta = F_{\delta_q}$, $\delta = \delta_q$. *Тогда справедливо* (39).

Перейдем к оценке точности приближений, доставляемых итерациями (4), (17).

3. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ

Из (30) вытекает оценка

$$\left\| x_{N(\delta, F_\delta)} - x^* \right\|_{H_1} \le l\alpha^p_{N(\delta, F_\delta)}. \tag{40}$$

В этом разделе получим оценку для $\left\| x_{N(\delta, F_\delta)} - x^* \right\|_{H_1}$ непосредственно в терминах уровня погрешности δ. В силу теоремы 2

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| x_{N(\delta, F_\delta)} - x^* \right\|_{H_1} = 0. \tag{41}$$

Дополнительно предположим, что условие истокопредставимости (11) выполнено с параметром $(p^* + 1)/2 \le p \le p^*$.

Пусть $0 \le n \le N(\delta, F_\delta) - 1$. Из (4) следует, что

$$x_{n+1} = x_n - \{[E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)](x_n - \xi) + \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta(x_n)\}. \tag{42}$$

Кроме того,

$$F_\delta(x_{n+1}) = F_\delta(x_n) + F_\delta'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + G_n,$$

где $G_n = G(x_n, x_{n+1})$ и, согласно (19),

$$\|G_n\|_{H_2} \le \frac{1}{2} L \|x_{n+1} - x_n\|^2_{H_1}. \tag{43}$$

Отсюда получаем

$$F_\delta(x_{n+1}) = F_\delta(x_n) - F_\delta'(x_n)\{[E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)](x_n - \xi) +$$

$$+ \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta(x_n)\} + G_n = F_\delta(x_n) - F_\delta'(x_n)[E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)] \times$$

$$\times (x_n - \xi) - F_\delta'(x_n)\Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta(x_n) + G_n.$$

Используя тождество $A\Theta(A^*A, \alpha) = \Theta(AA^*, \alpha)A$, справедливое для произвольного оператора $A \in L(H_1, H_2)$ и $\alpha > 0$ (см. [7, с. 34]), запишем

$$F_\delta(x_{n+1}) = [E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta(x_n) -$$

$$- [E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta'(x_n)(x_n - \xi) + G_n.$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}[E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta'(x_n)(x_n - \xi) = \\ = [E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta(x_n) - F_\delta(x_{n+1}) + G_n.\end{gathered} \tag{44}$$

Из (2) следует, что спектры операторов $F_\delta'(x)F_\delta'^*(x)$, $x \in \Omega_R(x^*)$, принадлежат отрезку $[0, M^2]$ вещественной оси. Зафиксируем $\nu \in (0, M^2)$ и обозначим через

$$P_n = \chi(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)), \qquad \chi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in [\nu, M^2], \\ 0, & \lambda \notin [\nu, M^2], \end{cases}$$

ортопроектор из H_2 на собственное подпространство оператора $F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)$, отвечающего части его спектра в отрезке $[\nu, M^2]$.

Подействуем на обе части равенства (44) оператором P_n. Поскольку $\|P_n\|_{L(H_2,H_2)} \le 1$, из (44) следует

$$\begin{gathered}\left\|P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n),\alpha_n)F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n)]F'_\delta(x_n)(x^* - \xi)\right\|_{H_2} \le \\ \le \left\|P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n),\alpha_n)F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n)]F'_\delta(x_n)\right\|_{L(H_1,H_2)} \|x_n - x^*\|_{H_1} + \\ + \left\|P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n),\alpha_n)F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n)]\right\|_{L(H_2,H_2)} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2} + \\ + \|F_\delta(x_{n+1})\|_{H_2} + \|G_n\|_{H_2}, \quad 1 \le n \le N(\delta, F_\delta) - 1.\end{gathered} \tag{45}$$

В силу (7)

$$\forall\lambda \in [0, M^2], \quad |1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda| \le \frac{C_2(p^*)\alpha^{p^*}}{\lambda^{p^*}}.$$

Поэтому

$$\left\|P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n),\alpha_n)F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n)]F'_\delta(x_n)\right\|_{L(H_1,H_2)} \le \max_{\lambda\in[\nu,M^2]}\left(|1 - \Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda|\sqrt{\lambda}\right) \le C_8\alpha_n^{p^*}; \tag{46}$$

$$\left\|P_n[E_2 - \Theta(F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n),\alpha_n)F'_\delta(x_n)F'^*_\delta(x_n)]\right\|_{L(H_2,H_2)} \le \max_{\lambda\in[\nu,M^2]}|1 - \Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda| \le C_9\alpha_n^{p^*}. \tag{47}$$

Для оценки нормы элемента G_n воспользуемся (42) и (43). Имеем

$$\begin{gathered}\|x_{n+1} - x_n\|_{H_1} \le \left\|[E_1 - \Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - \xi)\right\|_{H_1} + \\ + \left\|\Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)\right\|_{L(H_2,H_1)} \|F_\delta(x_n)\|_{H_2}.\end{gathered} \tag{48}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\left\|[E_1 - \Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - \xi)\right\|_{H_1} \le \\ \le \left\|[E_1 - \Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - x^*)\right\|_{H_1} + \\ + \left\|[E_1 - \Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)](x^* - \xi)\right\|_{H_1}.\end{gathered} \tag{49}$$

Из (6) следует, что при $\lambda \in [0,\alpha]$ справедливо $|1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda| \le C_1 + 1$, а в силу (7) при $\lambda \in [\alpha, M]$ имеет место $|1 - \Theta(\lambda,\alpha)\lambda| \le C_2(p^*)$. Поэтому для первого слагаемого в правой части (49) выполняется

$$\begin{gathered}\left\|[E_1 - \Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)](x_n - x^*)\right\|_{H_1} \le \\ \le \|x_n - x^*\|_{H_1} \max_{\lambda\in[0,M^2]}|1 - \Theta(\lambda,\alpha_n)\lambda| \le C_{10}\|x_n - x^*\|_{H_1}.\end{gathered} \tag{50}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered}\left\|[E_1 - \Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n)](x^* - \xi)\right\|_{H_1} \le \\ \le \|[E_1 - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](x^* - \xi)\|_{H_1} + \\ + \left\|[\Theta(F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n),\alpha_n)F'^*_\delta(x_n)F'_\delta(x_n) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*),\alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](x^* - \xi)\right\|_{H_1}.\end{gathered} \tag{51}$$

Для первого слагаемого в правой части (51) с учетом (11) и (7) имеем оценку

$$\begin{gathered}\|[E_1 - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](x^* - \xi)\|_{H_1} = \\ = \|[E_1 - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](F'^*(x^*)F'(x^*))^p v\|_{H_1} \leq \\ \leq \|v\|_{H_1} \max_{\lambda\in[0,M^2]}\left(|1 - \Theta(\lambda, \alpha_n)\lambda|\lambda^p\right) \leq C_2(p^*)\|v\|_{H_1}\alpha_n^p.\end{gathered} \tag{52}$$

Заметим, что

$$\left\|F_\delta'^*(x_n) - F'^*(x^*)\right\|_{L(H_1,H_2)} \leq L\|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta.$$

Используя это неравенство, оценим второе слагаемое в правой части (51) по схеме из [3, с. 117]:

$$\begin{gathered}\left\|[\Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n) - \Theta(F'^*(x^*)F'(x^*), \alpha_n)F'^*(x^*)F'(x^*)](x^* - \xi)\right\|_{H_1} \leq \\ \leq C_{11}\|v\|_{H_1}(\|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta).\end{gathered} \tag{53}$$

Из (49)–(53) с учетом (30) следует

$$\|[E_1 - \Theta(F'^*(x_n)F'(x_n), \alpha_n)F'^*(x_n)F'(x_n)](x_n - \xi)\|_{H_1} \leq C_{12}[(l + \|v\|_{H_1} + \|v\|_{H_1} l)\alpha_n^p + \|v\|_{H_1}\delta]. \tag{54}$$

Для второго слагаемого в правой части (48) справедливо

$$\begin{gathered}\left\|\Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)\right\|_{L(H_2,H_1)}\|F_\delta(x_n)\|_{H_2} \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}}\|F_\delta(x_n)\|_{H_2} \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}}(\|F_\delta(x_n) - F_\delta(x^*)\|_{H_2} + \delta) \leq \\ \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}}(M\|x_n - x^*\|_{H_1} + \delta) \leq \frac{C_{13}}{\sqrt{\alpha_n}}(Ml\alpha_n^p + \delta).\end{gathered} \tag{55}$$

Из (43), (48), (54), (55) следует

$$\|G_n\|_{H_2} \leq C_{14}\left(l^2\alpha_n^{2p-1} + \frac{\delta^2}{\alpha_n}\right). \tag{56}$$

Обратимся к левой части неравенства (45). Обозначим через $Q(x) = \chi(F_\delta'^*(x)F_\delta'(x))$, $x \in \Omega_R(x^*)$, ортопроектор из H_1 на собственное подпространство оператора $F_\delta'^*(x)F_\delta'(x)$, соответствующее части его спектра в $[\nu, M^2]$, и положим $Q_n = Q(x_n)$. Кроме того, пусть $Q^* = \chi(F'^*(x^*)F'(x^*))$ — ортопроектор из H_1 на собственное подпространство оператора $F'^*(x^*)F'(x^*)$, соответствующее части его спектра в $[\nu, M^2]$. Отметим, что ненулевые части спектров операторов $F_\delta'^*(x)F_\delta'(x)$ и $F_\delta'(x)F_\delta'^*(x)$ совпадают. С использованием (8) и известного тождества (см. [3, с. 26])

$$\Theta(AA^*, \alpha)A = A\Theta(A^*A, \alpha), \quad A \in L(H_1, H_2), \quad \alpha > 0,$$

получаем оценку

$$\begin{gathered}\left\|P_n[E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta'(x_n)(x^* - \xi)\right\|_{H_2}^2 = \\ = \left\|F_\delta'(x_n)Q_n[E_1 - \Theta(F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n), \alpha_n)F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)](x^* - \xi)\right\|_{H_2}^2 = \\ = \int_\nu^{M^2}(1 - \lambda\Theta(\lambda, \alpha))^2\lambda d\|E_{n\lambda}(x^* - \xi)\|_{H_1}^2 \geq C_{15}\alpha_n^{2p^*}\int_\nu^{M^2} d\|E_{n\lambda}(x^* - \xi)\|_{H_1}^2 = C_{15}\alpha_n^{2p^*}\|Q_n(x^* - \xi)\|_{H_1}^2.\end{gathered} \tag{57}$$

Здесь $\{E_{n\lambda}\}$ есть семейство спектральных проекторов оператора $F_\delta'^*(x_n)F_\delta'(x_n)$.

Для дальнейшего нам потребуется следующее условие.

Условие 1. Точка $\lambda = \nu$ принадлежит резольвентному множеству оператора $F'^*(x^*)F'(x^*)$.

Ввиду условия 1, некоторая окрестность $(\nu - \varepsilon, \nu + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, свободна от точек спектра $F'^*(x^*)F'(x^*)$. Нам понадобится следующая оценка для нормы возмущения спектрального проектора (см., например, [14, § 135]).

Лемма 2. *Пусть A, B — ограниченные самосопряженные операторы в H_1,*

$$\|A\|_{L(H_1,H_1)}, \|B\|_{L(H_1,H_1)} \le M^2,$$

интервал $(\nu - \varepsilon_0, \nu + \varepsilon_0)$ лежит в резольвентном множестве операторов A, B и $Q_A = \chi(A)$, $Q_B = \chi(B)$. Тогда для некоторой константы $D = D(M, \nu, \varepsilon_0)$ выполняется

$$\|Q_A - Q_B\|_{L(H_1,H_1)} \le D\|A - B\|_{L(H_1,H_1)}.$$

Из (2), (3) следует, что

$$\left\|F_\delta'^*(x)F_\delta'(x) - F'^*(x^*)F'(x^*)\right\|_{L(H_1,H_1)} \le 2M\left(L\|x - x^*\|_{H_1} + \delta\right). \tag{58}$$

Положим в предыдущих построениях $n = N(\delta, F_\delta) - 1$. Ввиду (41) и (58), интервал $(\nu - \varepsilon/2, \nu + \varepsilon/2)$ свободен от точек спектра оператора $F_\delta'^*(x_{N(\delta,F_\delta)-1})F_\delta'(x_{N(\delta,F_\delta)-1})$ для всех $\delta \in (0, \delta_0]$ с достаточно малым $\delta_0 > 0$. Применяя лемму 2 к операторам $A = F_\delta'^*(x_{N(\delta,F_\delta)-1})F_\delta'(x_{N(\delta,F_\delta)-1})$, $B = F'^*(x^*)F'(x^*)$ и используя (58), получаем

$$\|Q_{N(\delta,F_\delta)-1} - Q^*\|_{L(H_1,H_1)} \le C_{16}\left(\|x_{N(\delta,F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \delta\right), \quad \delta \in (0, \delta_0]. \tag{59}$$

Из (57), (59) следует, что при $n = N(\delta, F_\delta) - 1$ величина

$$\left\|P_n[E_2 - \Theta(F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n), \alpha_n)F_\delta'(x_n)F_\delta'^*(x_n)]F_\delta'(x_n)(x^* - \xi)\right\|_{H_2} \tag{60}$$

оценивается снизу выражением

$$\sqrt{C_{15}}\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*}(\|Q^*(x^* - \xi)\|_{H_1} - C_{16}\|x_{N(\delta,F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} - C_{16}\delta).$$

В дополнение к сделанным ранее предположениям введем следующее условие.

Условие 2. Справедливо соотношение

$$Q^*(x^* - \xi) \ne 0_{H_1}.$$

При выполнении условия 2 заключаем, что величина (60) при $n = N(\delta, F_\delta) - 1$ оценивается снизу величиной $\kappa\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*}$, $\delta \in (0, \delta_1]$ с подходящим $0 < \delta_1 \le \delta_0$ и $\kappa = \sqrt{C_{15}}\|Q^*(x^* - \xi)\|_{H_1}/2$.

Объединяя (46), (47), (56), заключаем, что правая часть (45) при $n = N(\delta, F_\delta) - 1$ оценивается сверху выражением

$$C_{17}(\|x_{N(\delta,F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \|F_\delta(x_{N(\delta,F_\delta)-1}) - F_\delta(x^*)\|_{H_2} + \|F_\delta(x^*)\|_{H_2})\alpha_{N(\delta,F_\delta)-1}^{p^*} + \|F_\delta(x_{N(\delta,F_\delta)})\|_{H_2} +$$
$$+ C_{14}\left(l^2\alpha_{N(\delta,F_\delta)-1}^{2p-1} + \frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta,F_\delta)-1}}\right) \le C_{17}((M+1)\|x_{N(\delta,F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \delta)r^{p^*}\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*} +$$
$$+ \frac{\tau\delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}} + C_{14}l^2r^{2p-1}\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*} + C_{14}\frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}.$$

Здесь при выводе использовались соотношения (2), (5), (17) и условие $(p^* + 1)/2 \le p \le p^*$. Таким образом, при $\delta \in (0, \delta_1]$ выполняется

$$\kappa\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*} \le C_{17}((M+1)\|x_{N(\delta,F_\delta)-1} - x^*\|_{H_1} + \delta)r^{p^*}\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*} + \frac{\tau\delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}} + C_{14}l^2r^{2p-1}\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*} + C_{14}\frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}. \tag{61}$$

Величину l считаем выбранной настолько малой, что

$$C_{14} l^2 r^{2p^*-1} \le \kappa/2. \tag{62}$$

Тогда из (61) и (62) следует, что если $\delta \in (0, \delta_2]$ с подходящим $0 < \delta_2 \le \delta_1$, то

$$\frac{1}{4}\kappa\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*} \le \frac{\tau\delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}} + C_{14}\frac{\delta^2}{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}. \tag{63}$$

Решая квадратное неравенство (63) относительно $t = \delta/\sqrt{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}$, находим

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha_{N(\delta,F_\delta)}}} \ge C_{18}\alpha_{N(\delta,F_\delta)}^{p^*}.$$

Отсюда следует необходимая нам верхняя оценка $\alpha_{N(\delta,F_\delta)}$ в терминах δ:

$$\alpha_{N(\delta,F_\delta)} \le C_{19}\delta^{\frac{2}{2p^*+1}}. \tag{64}$$

Объединяя (64) и (40), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $(p^*+1)/2 \le p \le p^*$, *выполняются предположения теоремы* 1*, условия* 1, 2 *и соотношение* (62). *Тогда справедлива оценка*

$$\|x_{N(\delta,F_\delta)} - x^*\|_{H_1} \le C_{20}\delta^{\frac{2p}{2p^*+1}}, \quad \delta \in (0, \delta_2].$$

Замечание 2. Из доказательства теоремы 3 следует, что если показатель p в (11) удовлетворяет условию $(p^*+1)/2 + \varepsilon \le p \le p^*$, $\varepsilon > 0$, то условие (62) может быть снято.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г.* Нелинейные некорректные задачи. М.: Наука. Физматлит, 1995.
2. *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2008.
3. *Бакушинский А.Б., Кокурин М.Ю.* Алгоритмический анализ нерегулярных операторных уравнений. М.: ЛЕНАНД, 2012.
4. *Кокурин М.Ю.* О выпуклости функционала Тихонова и итеративно регуляризованных методах решения нерегулярных нелинейных операторных уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. № 4. С. 651–664.
5. *Кокурин М.Ю.* Об организации глобального поиска при реализации схемы Тихонова // Изв. вузов. Математика. 2010. № 12. С. 20–31.
6. *Engl H.W., Hanke M., Neubauer A.* Regularization of Inverse Problems. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Acad. Publ., 1996.
7. *Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю.* Итерационные процедуры в некорректных задачах. М.: Наука, 1986.
8. *Kaltenbacher B., Neubauer A., Scherzer O.* Iterative regularization methods for nonlinear ill-posed problems. Berlin: Walter de Gruyter, 2008.
9. *Jin Q., Tautenhahn U.* Inexact Newton regularization methods in Hilbert scales // Numer. Math. 2011. V. 117. № 3. P. 555–579.
10. *Jin Q.* A general convergence analysis of some Newton-type methods for nonlinear inverse problems // SIAM J. Numer. Anal. 2011. V. 49. № 2. P. 549–573.
11. *Bakushinsky A., Smirnova A.* On application of generalized discrepancy principle to iterative methods for nonlinear ill-posed problems // Numer. Funct. Anal. Optim. 2005. V. 26. № 1. P. 35–48.
12. *Pornsawad P., Bockmann C.* Modified iterative Runge–Kutta-type methods for nonlinear ill-posed problems // Numer. Funct. Anal. Optim. 2016. V. 37. № 12. P. 1562–1589.
13. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы: Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
14. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.