
**ОБЩИЕ
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**

УДК 519.63

ТОЖДЕСТВО ДЛЯ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ $\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0$ И ЕГО СЛЕДСТВИЯ

© 2021 г. С. И. Репин

191023 Санкт-Петербург, Фонтанка, 27, Санкт-Петербургское отд. Матем. ин-та
им. В.А. Стеклова РАН, Россия

e-mail: repin@pdmi.ras.ru

Поступила в редакцию 13.03.2021 г.
Переработанный вариант 13.03.2021 г.
Принята к публикации 04.08.2021 г.

Для класса эллиптических уравнений вида $\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0$ исследуется вопрос о том, как вычислить расстояние между функцией u и любым ее приближением v из соответствующего энергетического пространства. Анализ основан на тождестве, которому удовлетворяют нормы отклонений от точного решения этой задачи и точного решения двойственной задачи. Оно имеет ряд следствий. В частности, тождество позволяет оценить максимальное и минимальное расстояния до точного решения, используя только известное приближенное решение, данные задачи и решение специально сконструированной конечномерной задачи. При этом не требуется использовать интерполяционные неравенства Клемана (Clement's interpolation) или процедуры балансировки потока (flux equilibration). Показано, что оценки эквивалентны соответствующим нормам расстояния до решения и пригодны для широкого класса аппроксимаций, который включает как галеркинские приближения, так и достаточно грубые аппроксимации точного решения. Эти результаты проверены в серии численных экспериментов, где сравнивается эффективность различных методов. Библ. 36. Фиг. 6. Табл. 3.

Ключевые слова: уравнения эллиптического типа, оценки отклонения от точного решения, апостериорные оценки точности приближенных решений.

DOI: 10.31857/S0044466921120127

1. ВВЕДЕНИЕ

Найти точные решения математических моделей, основанных на уравнениях в частных производных, как правило, не удается и приходится использовать их приближения. При этом неизбежно встает вопрос об их точности. С математической точки зрения он сводится к оценке расстояния между приближенным и точным решениями задачи. Первоначально исследования этого вопроса проводились в рамках теории априорных (асимптотических) оценок скорости сходимости к точному решению (см., например, [1]– [3]). Эти методы позволяли оценить качественный характер сходимости при наличии повышенной регулярности решения, определенной регулярности сетки и гарантии точности всех вычислений. С начала 80-х годов прошлого века новые подходы к численному анализу становятся все более связанными с адаптивными методами, которые основаны на использовании апостериорных оценок, а с середины 90-х годов прошлого века начинается интенсивное исследование полностью вычисляемых и гарантированных оценок отклонения от точного решения. Подробное изложение соответствующей теории можно найти в [4].

В настоящее время известно несколько различных методов, которые используются для апостериорного анализа качества приближенных решений различных математических задач. При их сравнении надо учитывать несколько критериев. К ним относятся точность апостериорной оценки и затраты, необходимые для ее вычисления. Конечно, имеются и другие критерии, так что сравнение разных методов и соответствующих оценок имеет смысл только в том случае, когда четко определен набор необходимых требований. Мы будем обсуждать только те оценки, которые удовлетворяют трем обязательным условиям. Во-первых, они должны быть *гарантированными* мажорантами или минорантами нормы разности между точными и приближенными решениями. Заметим, что в настоящее время известно много разных *индикаторов* ошибок. Этим вопросам посвящено очень большое количество публикаций (см. монографии [5]– [8] и цитиро-

ванную в них литературу). Большинство индикаторов вычисляются достаточно просто и используются как критерии перестроения сеток в адаптивных методах. Обычно индикаторы правильно подсказывают пути разумного перестроения сетки, однако они не дают гарантированных оценок локальных или глобальных норм погрешности приближенных решений. Более того, существуют случаи, когда формальное использование индикаторов может приводить к ошибочным выводам. Из нашего рассмотрения такие методы исключаются.

Второе требование состоит в *экономичности* оценки. Это означает, что затраты на ее вычисление не должны многократно превышать затраты на вычисление самого приближенного решения. Третьим, и вероятно самым важным, является требование *универсальности* оценки, которая должна быть пригодна для широкого класса приближенных решений, включающего как галеркинские аппроксимации, так и те, что существенно отличаются от них. В реальных вычислениях всегда возникают различные ошибки, связанные с приближенным интегрированием, различными округлениями, дефектами в компьютерных программах и многими другими обстоятельствами. Точное выполнение условия галеркинской ортогональности (или другого специфического свойства аппроксимаций типа суперсходимости) трудно гарантировать и необходимо иметь методы контроля точности приближенных решений, свободные от этого и других условий, связанных с особенностями используемого численного метода. Фактически это условие означает, что оценки должны быть получены на функциональном уровне без привлечения дополнительной информации о способе дискретизации задачи, т.е. речь идет о получении вычисляемых оценок разности между точным решением u задачи и любой функцией v из соответствующего энергетического пространства (или между точным решением p^* двойственной задачи и соответствующим приближением y^*). Естественно назвать их оценками отклонения от точного решения.

В данной статье исследуются методы построения таких оценок для задач типа (2.1). Анализ основан на тождестве (2.5), которому удовлетворяют нормы отклонений от точного решения этой задачи и точного решения двойственной задачи. Основным результатом можно считать то, что для этого класса задач существуют гарантированные и полностью вычисляемые оценки норм функций $v - u$ и $y^* - p^*$ (в соответствующих пространствах), которые обладают указанными свойствами. Они обладают такими же асимптотическими свойствами (в смысле скорости сходимости к точному решению), как и сами нормы отклонения, причем для доказательства этого факта не требуется использования процедур “уравновешивания” потока y^* или каких-то других специальных условий, предъявляемых к v или y^* . Основная идея заключается в том, что та часть тождества (2.5), которая содержит неизвестную функцию $v - u$, может быть представлена через решение вспомогательной задачи. Более того, если точное решение этой задачи имеет повышенную регулярность, то можно точное решение вспомогательной задачи заменить на приближенное, а возникающие вследствие этого погрешности оценить с помощью стандартных интерполяционных оценок.

2. ТОЖДЕСТВО ДЛЯ НОРМ ОТКЛОНЕНИЙ ОТ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ

Мы рассматриваем класс линейных эллиптических уравнений дивергентного типа, которые могут быть представлены в форме

$$\Lambda^* \mathcal{A} \Lambda u + \ell = 0. \quad (2.1)$$

Пусть V — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_V$, V_0 — его подпространство, V_0^* — пространство, сопряженное к V_0 , а Y^* — гильбертово пространство со скалярным произведением (\cdot, \cdot) и нормой $\|\cdot\|$ (элементы Y^* соответствуют так называемым двойственным переменным и помечаются звездочками). Оператор $A : Y^* \rightarrow Y^*$ считается линейным, ограниченным и самосопряженным, а $\ell \in V_0^*$. Ограниченный линейный оператор $\Lambda : V \rightarrow Y^*$ имеет сопряженный оператор $\Lambda^* : Y^* \rightarrow V_0^*$, который определяется равенством

$$(y^*, \Lambda v) = (\Lambda^* y^*, v) \quad \forall v \in V, \quad y^* \in Y^*. \quad (2.2)$$

Предполагается, что

$$0 < \lambda_{\ominus} \|y^*\|^2 \leq (\mathcal{A} y^*, y^*) \leq \lambda_{\oplus} \|y^*\|^2 \quad \forall y^* \in Y^*. \quad (2.3)$$

При этом нормы $\|y^*\|_{\mathcal{A}} := (\mathcal{A}y^*, y^*)^{1/2}$ и $\|y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} := (\mathcal{A}^{-1}y^*, y^*)^{1/2}$ эквивалентны норме пространства Y^* . Обобщенное решение задачи (2.1) определяется как функция $u \in V_0 + u_0$ (где $u_0 \in V$ – задано), удовлетворяющая интегральному тождеству

$$(\mathcal{A}\Lambda u, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V_0. \quad (2.4)$$

Функция $p^* := \mathcal{A}\Lambda u$ удовлетворяет уравнению $\Lambda^*p^* + \ell = 0$ и представляет собой решение соответствующей двойственной задачи (в физических задачах ее принято называть потоком).

В дальнейшем функции $v \in V_0 + u_0$ и $y^* \in Y^*$ рассматриваются как аппроксимации u и p^* соответственно. Нас интересуют функции

$$e := v - u \in V_0 \quad \text{и} \quad e^* := y^* - p^* \in Y^*,$$

которые представляют собой отклонения от точных решений прямой и двойственной задач. Прежде всего установим тождество, которому удовлетворяют нормы этих функций.

Лемма 1. Для любых $v \in V_0 + u_0$ и $y^* \in Y^*$ выполняется тождество

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + 2\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle, \quad (2.5)$$

где $\mathcal{R}(y^*) = \ell + \Lambda^*y^*$.

Доказательство (2.5) очень простое. Поскольку $p^* = \mathcal{A}\Lambda u$, оно прямо следует из равенства

$$\|\mathcal{A}\Lambda e - e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 - 2\langle \Lambda e, e^* \rangle + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 - 2\langle \Lambda^*e^*, e \rangle + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$$

и того, что $\Lambda^*e^* = \Lambda^*(y^* - p^*) = \ell + \Lambda^*y^*$.

Тождество (2.5) имеет принципиальный характер. Его левая часть представляет собой естественную характеристику качества приближенных решений, заданную комбинированной (primal–dual) нормой функций отклонения. Отметим, что различные численные методы строят приближения v и y^* по-разному. Например, классический метод конечных элементов нацелен на вычисление функции v , а аппроксимация потока y^* обычно определяется как функция $\mathcal{A}\Lambda v$ или некоторая ее регуляризация. Напротив, в популярном методе конечных объемов главное внимание уделено аппроксимации потока y^* , а функция v играет вспомогательную роль. В смешанных методах аппроксимации прямой и двойственной переменных v и y^* равноправны. Тождество (2.5) никак не связано с особенностями различных методов и в равной степени пригодно для любого из них. Аналогичные тождества известны и для многих других (в том числе нелинейных) краевых задач (см. [9]). Соответствующая теория подробно рассматривается в монографии [10], где изучаются оценки точности математических моделей.

Первое слагаемое в правой части (2.5) не содержит неизвестных функций и может быть вычислено непосредственно. Проблема заключается в другом слагаемом, которое содержит неизвестную функцию u . Это слагаемое исчезает только при выполнении условия $e^* \in \text{Ker}\Lambda^*$, которое накладывает весьма жесткое ограничение на множество допустимых функций y^* , а именно,

$$y^* \in Q_\ell^* := \{y^* \in Y^* \mid \langle \Lambda^*y^* + \ell, w \rangle = 0 \quad \forall w \in V_0\}. \quad (2.6)$$

При выполнении (2.6) тождество (2.5) принимает вид

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2. \quad (2.7)$$

Существует целый класс апостериорных методов, основанных на использовании различных вариантов (2.7). В них y^* определяется как численная аппроксимация потока, построенная на некоторой сетке \mathcal{T}_h (обозначим ее y_h^*), а основные усилия направляются на то, чтобы выполнить (точно или приближенно) условие (2.6). Для этого применяются различные способы проектирования функции y_h^* на множество Q_ℓ^* (2.7) (см., например, [11]–[16], где рассматриваются оценки такого типа для конечноэлементных аппроксимаций). Численные процедуры, которые используются для построения соответствующего оператора $\mathbb{P}_{Q_\ell^*}^{\mathbb{P}} : Y^* \rightarrow Q_\ell^*$, могут быть достаточно сложными и, что самое важное, не всегда гарантируют точное выполнение условия (2.6). При этом неконтролируемый член $\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle$ в правой части тождества (2.5) считается малым и просто отбрасывается.

Возникает вопрос: можно ли существенно ослабить жесткие требования, накладываемые условием (2.6), и получить из тождества (2.5) вычисляемые и полностью гарантированные оценки для норм погрешностей, которые можно использовать для широкого класса аппроксимаций v и y^* ? Положительный ответ был дан в [4], [9], [17], [18], и ряде других публикаций. Пусть

$$y^* \in Q^* := \{\tau^* \in Y^* \in \Lambda^* \tau^* \in \mathcal{V}\},$$

где \mathcal{V} – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ такое, что $V_0 \subset \mathcal{V} \subset V_0^*$. Тогда Q^* также является гильбертовым пространством с произведением

$$(\tau_1^*, \tau_2^*)_{Q^*} := (\tau_1^*, \tau_2^*) + (\Lambda^* \tau_1^*, \Lambda \tau_2^*)_{\mathcal{V}}.$$

В дальнейшем мы считаем, что для любого $v^* \in \mathcal{V}$ имеет место представление $\langle v^*, v \rangle = (v^*, v)_{\mathcal{V}}$, $\ell \in \mathcal{V}$, а нормы согласованы, так что имеет место неравенство

$$\|w\|_{\mathcal{V}} \leq C_{\Lambda} \|\Lambda w\|_{\mathcal{A}} \quad \forall w \in V_0. \tag{2.8}$$

Заметим, что Q_{ℓ}^* является весьма узким аффинным подмножеством Q^* . Поэтому оператор $\mathbb{P}_{Q^*} : Y^* \rightarrow Q^*$ построить значительно проще, чем $\mathbb{P}_{Q_{\ell}^*}$. Такой оператор производит регуляризацию вычисленного приближенного потока y^* , если последний не принадлежит Q^* . При этом \mathbb{P}_{Q^*} может не быть ортогональным проектором, но должен удовлетворять естественным условиям

$$\mathbb{P}_{Q^*}(y^*) = y^*, \quad \text{если } y^* \in Q^*, \tag{2.9}$$

$$\|\mathbb{P}_{Q^*}(y^*) - \mathbb{P}_{Q^*}(q^*)\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq C_{\mathbb{P}} \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \quad \forall y^*, q^* \in Y^* \tag{2.10}$$

с постоянной $C_{\mathbb{P}} > 0$, которая зависит от свойств оператора и не зависит от y^* и q^* . Заметим, что норму в (2.10) можно заменить на эквивалентную норму $\|\cdot\|$ (при этом изменится только постоянная $C_{\mathbb{P}}$). Это условие является достаточно слабым. В частности, оно выполнено, если \mathbb{P}_{Q^*} является линейным ограниченным оператором. Никаких других специальных условий на \mathbb{P}_{Q^*} не накладывается.

Определим расстояние до множества Q_{ℓ}^* следующим образом:

$$d(y^*) := \inf_{q^* \in Q_{\ell}^*} \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}.$$

Вычисляемые мажоранты величины $d(y^*)$ изучались в [4], [17], [18] и ряде других работ. Было установлено, что если $y^* \in Q^*$, то

$$d(y^*) \leq C_{\Lambda} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}} \quad \forall y^* \in Q^*. \tag{2.11}$$

Замечание 1. Если Λ соответствует оператору градиента, то константа C_{Λ} определяется постоянной в неравенстве Фридриха (или Пуанкаре, в зависимости от типа краевых условий). Ее можно уменьшить, если сузить пространство Q^* и ввести промежуточное пространство \tilde{Q}^* такое, что $Q_f^* \subset \tilde{Q}^* \subset Q^*$ (такие оценки подробно рассмотрены в [4]). Конечно, при этом соответствующий оператор проектирования \mathbb{P}_{Q^*} может оказаться технически более сложным. В данной статье мы не фокусируем внимание на этих вопросах, поскольку анализ и основные результаты не зависят от конкретного выбора Q^* и соответствующего оператора \mathbb{P}_{Q^*} .

Первым следствием тождества (2.5) является следующая теорема.

Теорема 1. Для любых $v \in V_0 + u_0$, $w \in V_0$ и $y^* \in Q^*$ имеют место оценки

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + C_{\Lambda} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}, \tag{2.12}$$

$$\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + C_{\Lambda}^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}^2, \tag{2.13}$$

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \geq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - 2C_{\Lambda} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}, \tag{2.14}$$

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 \geq -\|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}^2 + 2(\mathcal{A} \Lambda v, \Lambda w) + 2\langle \ell, w \rangle. \tag{2.15}$$

Доказательство. Неравенство (2.12) следует из (2.7). Пусть $q^* \in Q_{\ell}^*$, тогда

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathcal{A} \Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}. \tag{2.16}$$

Переходя к инфимуму по q^* и используя (2.11), получаем (2.12).

Для доказательства (2.13) представим последнее слагаемое (2.5) в виде

$$2\langle \mathcal{R}(y^*), v - u \rangle = 2\langle \Lambda^*(y^* - q^*), w - u \rangle = 2(y^* - q^*, \Lambda(v - u)) \leq \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2,$$

где $q^* \in Q_\ell^*$. Подставив это неравенство в (2.5), получаем оценку

$$\|y^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2,$$

которая дает (2.13), если перейти к инфимуму по q^* .

Тождество (2.5) позволяет получить простую миноранту для суммы норм. Ясно, что

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|q^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} - \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}},$$

где $q^* \in Q_f^*$ и $y^* \in Q^*$. Поскольку

$$\|q^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \leq \|y^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}},$$

мы заключаем, что

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} - 2 \inf_{q^* \in Q_f^*} \|y^* - q^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}$$

и приходим к (2.14).

Также (2.5) позволяет вычислить нижнюю грань нормы $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}$. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 &= \inf_{y^* \in Y^*} \sup_{w \in V_0} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \langle \Lambda^* y^* + \ell, w \rangle \right\} \geq \\ &\geq \sup_{w \in V_0} \inf_{y^* \in Y^*} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + (y^*, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle \right\} = \\ &= \sup_{w \in V_0} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathcal{A}\Lambda v\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 - \frac{1}{2} \|\Lambda(w - v)\|_{\mathcal{S}}^2 + \langle \ell, w \rangle \right\} = \\ &= \sup_{w \in V_0} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{S}}^2 + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle \right\}, \end{aligned}$$

мы заключаем, что для любой функции $w \in V_0$ выполнено (2.15).

Замечание 2. Оценку (2.12) часто удобно представить в форме

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \beta' C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2, \quad (2.17)$$

где β и β' – любые положительные числа, удовлетворяющие условию $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$.

Использование (2.3), (2.8) и оценки

$$2(\Lambda^* e^*, e)_{V^*} \leq 2\|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*} \|e\|_{V^*} \leq 2C_\Lambda \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} \leq \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2 + \frac{1}{\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \quad (2.18)$$

с положительной постоянной γ дает двусторонние оценки для комбинированной нормы с весами. Из (2.5) следует, что

$$\|(e, e^*)\|_{V^*}^2 := \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - \tau^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2, \quad (2.19)$$

где $\gamma > 1$. Кроме того, мы получаем оценку снизу

$$\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - \tau^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 - \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(y^*)\|_{V^*}^2, \quad (2.20)$$

которая выполняется для любого $\gamma > 0$ (конечно, оценка (2.20) может быть грубой и при достаточно больших γ может стать неинтересной, поскольку ее правая часть становится отрицательной).

Правые части (2.12)–(2.14), (2.19) и (2.20) являются полностью вычисляемыми и дают гарантированные двусторонние оценки ошибок для любых аппроксимаций $v \in V_0 + u_0$ и $y^* \in Q^*$.

Единственная техническая проблема, которая может возникнуть, заключается в определении постоянной C_Λ . Для функций, обращающихся в нуль на всей границе области, эта проблема обычно преодолевается легко. В задачах с краевыми условиями смешанного типа можно использовать оценки, полученные в [10], [19], [20].

Оценки (2.12), (2.13), (2.19) и (2.20) являются достаточно точными, если величина $\|\mathcal{R}(y^*)\|_V$ мала по сравнению с $\|\mathcal{A}\Lambda v - \tau^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$. Если это не так, то точность оценок может существенно ухудшаться. Более того, пусть имеется последовательность приближенных решений $v_k \in V$ и $y_k^* \in Y^*$, которые удовлетворяет условию сходимости

$$v_k \rightarrow u \quad \text{в } V, \quad y_k^* \rightarrow p^* \quad \text{в } Y^*, \quad k \rightarrow +\infty. \tag{2.21}$$

Пусть $\tilde{y}_k^* := \mathbb{P}_{Q^*} y_k^*$ рассматривается как приближение p^* (так что $e_k^* = \tilde{y}_k^* - p^*$). Вследствие (2.10), $\tilde{y}_k^* \rightarrow p^*$ в Y^* и левая часть (2.19) стремится к нулю. Однако для стремления к нулю правой части требуется существенно более сильное условие, а именно,

$$\|\Lambda^* \tilde{y}_k^* + \ell\|_V \rightarrow 0, \tag{2.22}$$

т.е. требуется сходимость \tilde{y}_k^* к p^* в метрике Q^* . Простые методы регуляризации потока обычно не гарантируют выполнение этого условия даже в тех случаях, когда \tilde{y}_k^* строится путем регуляризации галеркинских решений. Поэтому использование простых процедур регуляризации может приводить к существенной переоценке величины отклонения. Более сложные процедуры (например, минимизация правой части (2.19) по y^*) могут требовать существенных дополнительных затрат (при этом, однако, удастся получить много дополнительной информации о приближенном решении и хорошие индикаторы локальных ошибок; см. [7]).

Далее мы показываем, как можно обойти эти трудности и получить более эффективные оценки ошибок, которые сходятся к нулю при выполнении (2.21). Для этого в дополнение к (2.9) и (2.10) достаточно потребовать выполнения гораздо более слабого условия ограниченности регуляризованного потока \tilde{y}_k^* в норме Q^* . Это условие эквивалентно тому, что

$$\|\Lambda^* \tilde{y}_k^* + \ell\|_V \leq c, \tag{2.23}$$

где c не зависит от k . Иными словами, вместо жесткого условия (2.22) мы требуем лишь ограниченности нормы $\|\Lambda^* \mathbb{P}_{Q^*} y_k^* + \ell\|_V$ некоторой (не обязательно маленькой) величиной. Поведение этой нормы в разных примерах показано ниже на фиг. 4, где продемонстрировано, что для галеркинских решений можно рассчитывать не только на ограниченность, но и на достаточно быстрое убывание этой нормы с ростом размерности аппроксимирующего подпространства.

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle$ С ПОМОЩЬЮ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

3.1. Вспомогательная задача и ее свойства

Определим функцию $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} \in V_0$ как решение задачи

$$\Lambda^* \mathcal{B} \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} = \mathcal{R}(y^*), \tag{3.1}$$

где $\mathcal{B} : Y^* \rightarrow Y^*$ – самосопряженный оператор такой, что

$$\mu_\ominus \|y\|_{\mathcal{A}}^2 \leq (\mathcal{B}y, y) \leq \mu_\oplus \|y\|_{\mathcal{A}}^2 \quad \forall y^* \in Y^*. \tag{3.2}$$

В выборе \mathcal{B} имеется достаточно широкая свобода. Мы можем использовать любой оператор, который спектрально эквивалентен \mathcal{A} . В частности, можно выбрать сам оператор \mathcal{A} , а можно, например, положить $\mathcal{B} = \lambda_\oplus \mathbb{I}$, где \mathbb{I} – тождественный оператор (в этом случае $\mu_\ominus = 1$ и $\mu_\oplus = \lambda_\oplus / \lambda_\ominus$). Свободу в выборе \mathcal{B} естественно использовать для того, чтобы задача (3.1) была “лучше”, чем (2.1) (проще с вычислительной точки зрения и с более регулярным решением). Функция $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} \in V_0$ удовлетворяет тождеству

$$(\mathcal{B} \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}, \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(y^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0. \tag{3.3}$$

Поскольку $(\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}) = (y^* - p^*, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}) \leq \|y^* - p^*\| \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|$, то

$$\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}} \leq \|y^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \leq \mu_{\ominus}^{-1/2} \|y^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}. \tag{3.4}$$

Таким образом, норма решения задачи (3.1) подчинена норме отклонения y^* от p^* .

Пусть функция $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*) \in V_0$ определена тождеством

$$(\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*), \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(y^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0. \tag{3.5}$$

Нетрудно установить, что для любого $y^* \in Y^*$ нормы функций $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*)$ и $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$ удовлетворяют неравенствам

$$\mu_{\ominus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{A}}^2 \leq \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2. \tag{3.6}$$

Выберем y^* специального вида, а именно, $y_v^* := \mathcal{A}\Lambda v$ и $\tilde{y}_v^* := \mathbb{P}_{Q^*} y_v^*$ и определим число

$$\epsilon_{Q^*} := \|y_v^* - \tilde{y}_v^*\|_{\mathcal{A}^{-1}},$$

которое представляет собой погрешность регуляризации, возникающую при проектировании $y_v^* \in Y^*$ на множество Q^* .

Лемма 2. Для $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)$ и $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)$ верны оценки

$$\frac{1}{\mu_{\oplus}} \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}} \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2, \tag{3.7}$$

$$\frac{1}{\mu_{\oplus}} (\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} - \epsilon_{Q^*})^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}} (\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \epsilon_{Q^*})^2, \tag{3.8}$$

где $e = v - u$ и $e^* = y_v^* - p^*$.

Доказательство. Из равенства

$$(\mathcal{A}\Lambda(v - u), \Lambda w) = \langle \ell, w \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) = \langle \ell + \Lambda^* y_v^*, w \rangle = \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0$$

следует, что $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y_v^*) = v - u$, так что

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} = \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{A}}. \tag{3.9}$$

Теперь из (3.6) и (3.9) получаем

$$\frac{1}{\mu_{\oplus}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}^2 \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2, \tag{3.10}$$

где $\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 = \|\Lambda(v - u)\|_{\mathcal{A}}^2 = \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$, так что (3.10) можно переписать в виде (3.7).

Для доказательства (3.8) напомним, что в соответствии с (3.5) функция $u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}$ удовлетворяет тождеству $(\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*), \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w \rangle$ для любых $w \in V_0$. Поскольку

$$\langle \mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), e \rangle = \langle \tilde{y}_v^* - p^*, \Lambda e \rangle = \langle \tilde{y}_v^* - y_v^*, \Lambda e \rangle + (\mathcal{A}\Lambda e, \Lambda e),$$

мы получаем

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 = (\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*), \Lambda e) + \langle y_v^* - \tilde{y}_v^*, \Lambda e \rangle \leq \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{A}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} + \epsilon_{Q^*} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}.$$

Таким образом,

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} - \epsilon_{Q^*} \leq \|\Lambda u_{\mathcal{A}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{A}} \leq \mu_{\oplus}^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}.$$

Отсюда следует левая часть (3.8). Для того чтобы получить правую часть, используем (3.3):

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*), \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)) &= \langle \tilde{y}_v^* - p^*, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*) \rangle \leq \\ &\leq \|\tilde{y}_v^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{\mu_{\ominus}^{1/2}} \|\tilde{y}_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Так как $\|\tilde{y}_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \epsilon_{Q^*}$, мы приходим к (3.8).

Первое из неравенств леммы 2 показывает, что норма $\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}$ эквивалентна норме отклонения $\|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}$. В частности, если $\mathcal{B} = \mathcal{A}$, то эти нормы просто совпадают. Поэтому норма решения задачи (3.1) ведет себя точно так же, как норма $\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}$, и ее использование не может привести к переоценке ошибки. Покажем, что это свойство имеет место и для решений задачи (3.1), порожденной \tilde{y}_v^* .

Лемма 3. Пусть $y^* \in Y^*$, $\tilde{y}^* := \mathbb{P}_{Q^*} y^*$, а оператор \mathbb{P}_{Q^*} удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10). Тогда для решений задачи (3.3) с правыми частями $\mathcal{R}(\tilde{y}^*)$ и $\mathcal{R}(y^*)$ верна оценка

$$\|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))\|_{\mathcal{B}} \leq \widehat{C}_{\mathbb{P}} \|y^* - p^*\|_{\mathcal{B}}. \tag{3.11}$$

Доказательство. Соответствующие решения $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)$ и $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$ удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*), \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))) &= \langle \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*) \rangle, \\ (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*), \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))) &= \langle \mathcal{R}(y^*), u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*) \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*))\|_{\mathcal{B}} \leq \|\tilde{y}^* - y^*\|_{\mathcal{B}^{-1}}.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}^* - y^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} &\leq \mu_{\ominus}^{-1/2} \|\tilde{y}^* - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \mu_{\ominus}^{-1/2} (\|\mathbb{P}_{Q^*}(y^* - p^*)\|_{\mathcal{A}^{-1}} + \|p^* - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}) \leq \\ &\leq \mu_{\ominus}^{-1/2} (1 + C_{\mathbb{P}}) \|y^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}} \leq \widehat{C}_{\mathbb{P}} \|y^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}}, \end{aligned}$$

получаем (3.11) с $\widehat{C}_{\mathbb{P}} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{\mu_{\ominus}}} (1 + C_{\mathbb{P}})$.

Из (3.11) и (3.7) следует, что если оператор \mathbb{P}_{Q^*} удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10), то

$$\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}} + \widehat{C}_{\mathbb{P}} \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \leq C \|y_v^* - p^*\|_{\mathcal{A}^{-1}},$$

где C зависит от μ_{\ominus} , μ_{\oplus} и $\widehat{C}_{\mathbb{P}}$. Таким образом, норма $\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}_v^*)\|_{\mathcal{B}}$ также подчинена $\|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}$.

3.2. Преобразование $\langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle$

Для $y^* \in Y^*$ с учетом (3.3) имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle &= |(\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*), \Lambda e)| \leq \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{B}} \leq \\ &\leq \sqrt{\mu_{\oplus}} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}} \leq \frac{\gamma}{2} \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2 + \frac{1}{2\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Из (2.5) и (3.12) следуют оценки (в (3.13) $\gamma \geq 1$):

$$\|(e, e^*)\|_{\gamma} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2, \tag{3.13}$$

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 - \gamma \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)\|_{\mathcal{B}}^2. \tag{3.14}$$

Определим $p_{\mathcal{B}\mathcal{R}}^* := \mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$. Тогда (3.13) можно переписать в виде

$$\|(e, e^*)\|_{\gamma} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}}^*\|_{\mathcal{B}^{-1}}^2. \tag{3.15}$$

Правая часть этих оценок стремится к нулю, если v стремится к u в V , а y^* стремится к p^* в Y^* . Более того, используя (3.4), получаем

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{A} \Lambda v - y^* \|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} \| \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*) \|_{\mathcal{B}}^2 \leq \\ & \leq (\| \mathcal{A} \Lambda(v - u) \|_{\mathcal{A}^{-1}} + \| p^* - y^* \|_{\mathcal{A}^{-1}})^2 + \gamma c_{\oplus} \| p^* - y^* \|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \\ & = (\| \Lambda e \|_{\mathcal{A}} + \| e^* \|_{\mathcal{A}^{-1}})^2 + \gamma c_{\oplus} \| e^* \|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \leq 2 \| \Lambda e \|_{\mathcal{A}}^2 + (2 + \gamma c_{\oplus}) \| e^* \|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \end{aligned} \tag{3.16}$$

с постоянной $c_{\oplus} = \mu_{\oplus} / \mu_{\ominus}$. Поэтому стремление к нулю правой и левой частей (3.13) происходит с одной скоростью.

Однако функции $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(y^*)$ и $p_{\mathcal{B}\mathcal{R}}^*$ нам неизвестны. Далее мы покажем, как модифицировать оценки (3.13)–(3.15), чтобы использовать их конечномерные аппроксимации.

3.3. Дискретная задача

Будем предполагать, что пространства V , Y^* , Q^* являются пространствами функций, определенных в ограниченной области Ω с липшицевой границей $\partial\Omega$. Область Ω разделена на непересекающиеся подобласти (ячейки, элементы) Ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, так что $\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^n \bar{\Omega}_i$. Это множество подобластей обозначим через \mathcal{T}_{Ω} . Сужения норм пространств Y^* , V и \mathcal{V} на Ω_i обозначаются $\| \cdot \|_{\Omega_i}$, $\| \cdot \|_{V(\Omega_i)}$ и $\| \cdot \|_{\mathcal{V}(\Omega_i)}$ соответственно.

Определим пространство $V_0^m \subset V_0$, $\dim V_0^m = m < \infty$, и зададим оператор интерполирования π_m , который удовлетворяет условиям

$$\pi_m w_m = w_m \quad \forall w_m \in V_0^m, \quad \| \pi_m w_m \| \leq c_{\pi} \| w \| \quad \forall w \in V_0,$$

где $c_{\pi} > 0$ не зависит от w . Величины

$$\chi_{m,\Omega_i}^{\Lambda}(w) := \| \Lambda(\pi_m w - w) \|_{\mathcal{V}(\Omega_i)} \quad \text{и} \quad \chi_{m,\Omega_i}(w) := \| \pi_m w - w \|_{\Omega_i}$$

обозначают погрешности интерполяции функции $w \in V_0$ на подпространстве V_0^m . Операторы интерполирования, которые используются в теории конечных элементов и других методов аппроксимации уравнений в частных производных, обычно удовлетворяют интерполяционным неравенствам вида

$$\chi_{m,\Omega_i}(w) \leq C_1(\Omega_i) \| w \|_{W(\Omega_i)} \quad \text{и} \quad \chi_{m,\Omega_i}^{\Lambda}(w) \leq C_2(\Omega_i) \| w \|_{W(\Omega_i)} \quad \forall w \in W. \tag{3.17}$$

В качестве Ω_i часто используются симплексы или другие выпуклые многоугольные элементы, а норма $\| w \|_W$ соответствует пространству W , которое компактно вложено в V (при этом областью определения оператора π_m является $W \cap V_0$). Постоянные в (3.17) пропорциональны $\text{diam} \Omega_i$, так что возникают веса, содержащие малый параметр. Как будет видно далее, это обстоятельство позволяет существенно улучшить оценки.

Свобода в выборе оператора \mathcal{B} позволяет улучшить свойства вспомогательной задачи. Может оказаться, что гарантировать повышенную регулярность решения в исходной задаче нельзя (например, в случае, когда \mathcal{A} соответствует матрице с разрывными коэффициентами). Однако \mathcal{B} можно выбрать достаточно гладким (или вообще не зависящим от координат), так что для любой функции $g \in \mathcal{V}$ точное решение $u_{\mathcal{R}}$ задачи $\Lambda^* \mathcal{B} \Lambda u = g$ принадлежит пространству W и выполнена оценка

$$\| u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} \|_{W(\Omega)} \leq C_{\text{reg}} \| g \|_{\mathcal{V}}. \tag{3.18}$$

В частности, если \mathcal{B} – тождественный оператор, то достаточно, чтобы повышенной регулярностью обладало решение задачи $\Lambda^* \Lambda u_{\mathcal{R}} = g$ с $g \in \mathcal{V}$. Если Λ соответствует оператору градиента, то данное условие означает повышенную регулярность решения задачи $\Delta u + g = 0$ для $g \in L^2(\Omega)$.

Определим $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m} \in V_0^m$ как решение задачи

$$(\mathcal{B} \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \Lambda w_m) = \langle \mathcal{R}(y^*), w_m \rangle \quad \forall w_m \in V_0^m, \tag{3.19}$$

и определим

$$p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* := \mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}.$$

Задачу (3.19) можно рассматривать как конечномерный аналог (3.3). Функции $u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}$ и $p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*$ можно вычислить с помощью соответствующей численной процедуры, и мы будем считать, что они известны.

Поскольку

$$(\mathcal{B}\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}), \Lambda w_m) = 0 \quad \forall w_m \in V_0^m, \tag{3.20}$$

то

$$\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}\|_{\mathbb{B}}^2 = \|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}\|_{\mathbb{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2 \tag{3.21}$$

и оценки (3.13) и (3.14) можно представить в виде

$$\|(e, e^*)\|_{\mathcal{V}} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 + \gamma \mu_{\oplus} (\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}\|_{\mathbb{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2), \tag{3.22}$$

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 + \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 \geq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 - \gamma \mu_{\oplus} (\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}\|_{\mathbb{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2). \tag{3.23}$$

Лемма 4. При выполнении условий леммы 3 и (3.18) имеют место оценки

$$\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)\|_{\mathbb{B}} \leq \|\tilde{y}^* - p^*\|_{\mathbb{B}^{-1}}, \tag{3.24}$$

$$\|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*) - \Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)\|_{\mathbb{B}}^2 \leq \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\Omega}, \tilde{y}^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(\tilde{y}^*)\|_{\mathcal{V}}, \tag{3.25}$$

где $\tau^* \in Q^*$, C_{reg} определено в (3.18),

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_{\Omega}, \tilde{y}^*, \tau^*) := \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 C_1^2(\Omega_i) \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 C_2^2(\Omega_i) \right)^{1/2}, \tag{3.26}$$

$$\sigma_i := \|\Lambda^* \tau^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*)\|_{\mathcal{V}(\Omega_i)} \quad \text{и} \quad \alpha_i := \|p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \tau^*\|_{\Omega_i}.$$

Доказательство. Неравенство (3.24) следует из соотношений

$$(\mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*), \Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)) = (\tilde{y}^* - p^*, \Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)) \leq \|\tilde{y}^* - p^*\|_{\mathbb{B}^{-1}} \|\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}(\tilde{y}^*)\|_{\mathbb{B}}.$$

Для оценки $\|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2$ используем тождество (2.5) в приложении к задаче

$$\Lambda^* \mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*) = \mathcal{R}(\tilde{y}^*). \tag{3.27}$$

Имеем

$$\|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2 + \|p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - p_{\mathbb{R}\mathbb{R}}^*\|_{\mathbb{B}^{-1}}^2 = \|\mathcal{B}\Lambda u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*\|_{\mathbb{B}^{-1}}^2 + 2\langle \Lambda^* p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle.$$

В силу определения функций $p_{\mathbb{R}\mathbb{R}}^*$ и $p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*$ следует, что

$$\|\Lambda(u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})\|_{\mathbb{B}}^2 = \langle \Lambda^* p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle. \tag{3.28}$$

Используя и (3.19) и (3.20), преобразуем правую часть (3.28) следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda^* p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), u_{\mathbb{R}\mathbb{R},m} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle &= \langle \Lambda_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), \pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rangle = \\ &= (p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^* - \tau^*, \Lambda(\pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})) + (\Lambda^* \tau^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), \pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}} - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}})_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Получились слагаемые, которые содержат погрешности интерполяции. Их можно оценить:

$$\begin{aligned} (p_{\mathbb{R}\mathbb{R},m}^*(\tilde{y}^*) - \tau^*, \Lambda(\pi_m u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*))) &\leq \sum_{i=1}^n \chi_{m,\Omega_i}^{\Lambda} (u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)) \alpha_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n C_2(\Omega_i) \alpha_i \|u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega_i)} \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 C_2^2(\Omega_i) \right)^{1/2} \|u_{\mathbb{R}\mathbb{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega)} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & (\Lambda^* \tau^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*), \pi_m u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*) - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*))_V \leq \sum_{i=1}^n \chi_{m, \Omega_i}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)) \sigma_i \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n C_1(\Omega_i) \sigma_i \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega_i)} \leq \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 C_1^2(\Omega_i) \right)^{1/2} \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}(\tilde{y}^*)\|_{W(\Omega)}. \end{aligned}$$

Их сумма оценивается величиной

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}^*, \tau^*) \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\| \leq \mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(\tilde{y}^*)\|$$

что приводит к (3.25).

Замечание 3. Можно выбрать $\tau^* = \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) := \mathbb{P}_Q \cdot p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) \in Q^*$, т.е. определить эту функцию как регуляризацию потока $\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}(\tilde{y}^*) \in Y^*$. В этом случае интерполяционный член можно оценить так:

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}^*, \tau^*) \leq C_1 \|\Lambda^* \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) - \Lambda^* \tilde{y}^* - \ell\|_{V(\Omega)}^2 + C_2 \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*) - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*(\tilde{y}^*)\|_\Omega^2, \tag{3.29}$$

где $C_1 = \max_i C_1(\Omega_i)$ и $C_2 = \max_i C_2(\Omega_i)$. Здесь норма $\|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*\|$ оценивает погрешность, связанную с регуляризацией, а норма $\|\Lambda^*(\tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{y}^*) - \ell\|$ оценивает невязку уравнения (3.1). Постоянные C_1 и C_2 определяются свойствами оператора интерполирования π_m и структурой сетки. Если постоянные $C_1(\Omega_i)$ и $C_2(\Omega_i)$ на разных ячейках сильно отличаются, то эта оценка может оказаться грубой. Однако она дает необходимую информацию об асимптотических свойствах \mathcal{E} (см. п. 5.3).

В заключение отметим, что норму разности $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$ можно оценить, не используя регулярность задачи (3.1).

Лемма 5. Для любой функции $\eta \in V_0$ такой, что $\Lambda^* \mathcal{B}\Lambda \eta \in \mathcal{V}$, имеет место оценка

$$\|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}}^2 \leq M^2(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*) + 2\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \eta), \tag{3.30}$$

где $\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \eta) := (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \Lambda \eta) + (\mathcal{R}(\tilde{y}^*), \eta)_V$, а

$$M(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*) := \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} + C_\Lambda \|\Lambda^*(\tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{y}^* + \mathcal{B}\Lambda \eta) - \ell\|_V.$$

Доказательство. Преобразуем (3.28) следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}}^2 &= (p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})) + \\ &+ (\Lambda^* \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \mathcal{R}(\tilde{y}^*) + \Lambda^* \mathcal{B}\Lambda \eta, u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})_V + (\mathcal{B}\Lambda \eta, \Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})). \end{aligned}$$

Поскольку

$$(\mathcal{B}\Lambda \eta, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}) = (\mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}, \Lambda \eta) = (\mathcal{R}(\tilde{y}^*), \eta)_V,$$

получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}}^2 &\leq \|p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*\|_{\mathcal{B}^{-1}} \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}} + \\ &+ \|\Lambda^*(\tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^* - \tilde{y}^* + \mathcal{B}\Lambda \eta) - \ell\|_V \|u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_V + (\mathcal{B}\Lambda \eta, \Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}) - (\mathcal{R}(\tilde{y}^*), \eta)_V \leq \\ &\leq M(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*) \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R}})\|_{\mathcal{B}} + \mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}, \eta), \end{aligned}$$

из которого следует (3.30).

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (3.1)

Покажем, как модифицировать оценки (3.13)–(3.15), чтобы использовать конечномерные аппроксимации $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}$ и $p_{\mathcal{B}\mathcal{R}, m}^*$.

4.1. Оценка комбинированной нормы

Если решение задачи (3.1) удовлетворяет условию (3.18), то из (3.22) и (3.25) следует, что для любых функций $v \in V_0 + u_0$ и $y^*, \tau^* \in Q^*$ выполняется следующая оценка:

$$\|(e, e^*)\|_\gamma \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma \mu_\oplus (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(y^*)\|), \tag{4.1}$$

где $\gamma \geq 1$, C_{reg} определено в (3.18), а $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$ определяется задачей (3.19).

Первые два слагаемых в правой части (4.1) вычисляются непосредственно и образуют главную часть оценки. Слагаемое $\mathcal{E}(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*)$ представляет собой остаточный (интерполяционный) член, появление которого обусловлено тем, что мы заменили точное решение $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$ на его приближение в рамках пространства V_0^m . Нетрудно видеть, что если заменить $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$ на $u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$ и выбрать $\tau^* = \mathcal{B}\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}$, то этот член обращается в нуль.

Из (3.30) следует другая оценка, которая не связана с условием (3.18):

$$\|(e, e^*)\|_\gamma \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma \mu_\oplus (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + M^2(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*) + 2\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \eta)),$$

где $\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \eta)$ и $M(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*)$ определены в лемме 5.

4.2. Оценки норм $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2$ и $\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}$

Оценка нормы $\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}$ следует из (3.13). Положив $\gamma = 1$, получаем

$$\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_\oplus \|\Lambda u_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}}^2. \tag{4.2}$$

Используя задачу (3.1), можно также получить двусторонние оценки отдельно для нормы $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2$. Для получения мажоранты умножим (2.1) на w , используем (2.2) и представим выражение в виде

$$(\mathcal{A}\Lambda(u - v), \Lambda w) + \langle \ell, w \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) = 0.$$

Положим $w = e$. Тогда

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 = (\mathcal{A}\Lambda e, \Lambda e) = \langle \Lambda^* y^* + \ell, e \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v - y^*, \Lambda e) \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \langle \mathcal{R}(y^*), e \rangle.$$

Последнее слагаемое можно преобразовать с помощью (3.3)

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}} \|\Lambda e\|_{\mathcal{B}},$$

что приводит к оценке

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \mu_\oplus^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}}. \tag{4.3}$$

С учетом (3.4), правую часть (4.3) можно оценить так:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \mu_\oplus^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + \|p^* - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + \mu_\oplus^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R}}\|_{\mathcal{B}} \leq \\ &\leq \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} + (1 + c_\oplus^{1/2}) \|p^* - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\|p^* - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \leq C \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}$, то оценка эквивалентна ошибке. Если в качестве y^* выбирается $y_v^* = \mathcal{A}\Lambda v$, то это условие очевидно выполняется с $C = 1$. Любая разумная регуляризация $\tilde{y}^* = \mathbb{P}_{Q^*} y_v^*$ должна стремиться к p^* с той же скоростью, с которой y_v^* стремится к p^* . Поэтому для \tilde{y}^* эквивалентность также имеет место.

Для того чтобы сделать оценку полностью вычисляемой, заменим решение задачи (3.3) на решение конечномерной задачи (3.19). Возводя обе части (4.3) в квадрат и используя (3.21) и (3.25), получаем

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_\oplus \beta' (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \|\Lambda(u_{\mathcal{B}\mathcal{R}} - u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m})\|_{\mathcal{B}}^2). \tag{4.4}$$

Для оценки последнего слагаемого можно использовать лемму 5. Этот способ приводит к оценке

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \beta' (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_B^2 + M^2(\eta, \tilde{y}^*, p_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*, \tilde{p}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}^*) + 2\mathcal{L}(u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \eta)). \quad (4.5)$$

Другой вариант заключается в использовании интерполяционных оценок. Применив их к (4.4), получаем

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \beta' (\|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \varepsilon), \quad (4.6)$$

где $\varepsilon := \mathcal{E}(\mathcal{T}_{\Omega}, y^*, \tau^*) C_{\text{reg}} \|\mathcal{R}(y^*)\|_{\mathcal{V}}$. Аналогичная процедура трансформирует (4.2) в оценку

$$\|e^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\Lambda v - y^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \varepsilon. \quad (4.7)$$

Для нормы $\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}$ можно получить оценку снизу.

Лемма 6. Пусть $y_v^* = \mathcal{A}\Lambda v$. Тогда

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{S}} = \|\Lambda u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{S}} \geq \mu_{\ominus}^{1/2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}(y_v^*)\|_{\mathcal{B}}, \quad (4.8)$$

где $u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)$ является решением задачи

$$(\mathcal{A}\Lambda u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*), \Lambda w) = \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0, \quad (4.9)$$

а $u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}(y_v^*)$ является решением задачи (3.19).

Доказательство. В соответствии с (2.15)

$$\frac{1}{2} \|\Lambda e\|_{\mathcal{S}}^2 \geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle y_v^*, \Lambda w \rangle + \langle \ell, w \rangle \right\} = \sup_{w \in V} J_{\mathcal{R}}(w), \quad J_{\mathcal{R}}(w) := -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{S}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle.$$

Супремум равен $\frac{1}{2} \|\Lambda u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)\|_{\mathcal{S}}^2$ и достигается на функции $u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*)$, которая решает задачу (4.9).

При этом из равенства

$$(\mathcal{A}\Lambda(v - u), \Lambda w) = \langle \ell, w \rangle + (\mathcal{A}\Lambda v, \Lambda w) = \langle \ell + \Lambda^* y_v^*, w \rangle = \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle$$

следует, что $u_{\mathcal{S}\mathcal{R}}(y_v^*) = v - u$. Заметим, что

$$J_{\mathcal{R}}(w) \geq -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \quad \forall w \in V_0.$$

Поэтому (см. (3.19))

$$\begin{aligned} \sup_{w \in V} J_{\mathcal{R}}(w) &\geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \right\} \geq \sup_{w \in V_0^m} \mu_{\ominus} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), w \rangle \right\} = \\ &= \mu_{\ominus} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \mathcal{R}(y_v^*), u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m} \rangle \right\} = \frac{\mu_{\ominus}}{2} \|\Lambda u_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 \end{aligned}$$

и мы получаем (4.8).

В задаче (3.19) $\mathcal{R}(y^*) \in V_0^*$. Для того чтобы использовать решение задачи с правой частью из более регулярного класса \mathcal{V} , используем регуляризацию $\tilde{y}_v^* := \mathbb{P}_{\mathcal{Q}^*} y_v^* \in \mathcal{Q}^*$. Определим $\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$ как решение задачи

$$(\mathcal{B}\Lambda \tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}, \Lambda w_m) = (\mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w_m)_{\mathcal{V}} \quad \forall w_m \in V_0^m. \quad (4.10)$$

Перепишем оценку в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 &\geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2} \|\Lambda w\|_{\mathcal{A}}^2 + \langle \Lambda^* y_v^* + \ell, w \rangle \right\} \geq \\ &\geq \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 + \langle \Lambda^*(y_v^* - \tilde{y}_v^*), w \rangle + (\mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w)_{\mathcal{V}} \right\} = \\ &= \sup_{w \in V} \left\{ -\frac{1}{2\mu_{\ominus}} \|\Lambda w\|_{\mathcal{B}}^2 - (y_v^* - \tilde{y}_v^*, \Lambda w) + (\mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), w)_{\mathcal{V}} \right\}. \end{aligned}$$

Выберем $w = t\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}$ и используем равенство $\|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 = \langle \mathcal{R}(\tilde{y}_v^*), \tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m} \rangle$. Оценка приобретает вид

$$\|\Lambda e\|_{\mathcal{A}}^2 \geq \sup_{t>0} \left\{ \left(2t - \frac{t^2}{\mu_{\ominus}} \right) \|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + 2t(\tilde{y}_v^* - y_v^*, \Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}) \right\}.$$

Вычисляя максимум по t , получаем простую миноранту для нормы отклонения от точного решения

$$\|\Lambda e\| \geq \frac{\mu_{\ominus}^{1/2}}{\|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}} \left(\|\Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}\|_{\mathcal{B}}^2 + (\tilde{y}_v^* - y_v^*, \Lambda\tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}) \right) =: M_{\ominus}(v, \tilde{u}_{\mathcal{B}\mathcal{R},m}), \tag{4.11}$$

которая использует решение задачи (4.10). Отметим, что миноранта (4.11) содержит только известные функции \tilde{y}_v^* , y_v^* и решение конечномерной задачи. Поскольку эти же функции используются и в мажоранте, необходимости в дополнительных вычислениях не возникает.

5. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В качестве примера рассмотрим краевую задачу для уравнения $\operatorname{div} \mathcal{A} \nabla u + f = 0$ в ограниченной липшицевой области Ω с краевым условием $u = u_0$ на границе $\partial\Omega$ и $f \in L^2(\Omega)$. В этом случае

$$\begin{aligned} V_0 &:= \dot{H}^1(\Omega), \quad \mathcal{V} = L^2(\Omega), \quad Y^* := L^2(\Omega, \mathbb{R}^d), \quad \Lambda v := \nabla v, \quad \ell(v) := \int_{\Omega} f v dx, \\ \Lambda^* y^* &:= -\operatorname{div} y^*, \quad Q^* = H(\Omega, \operatorname{div}) := \{q^* \in Y^* \mid \operatorname{div} q^* \in L^2(\Omega)\}, \end{aligned}$$

λ_{\ominus} и λ_{\oplus} соответствуют собственным числам положительно-определенной симметричной матрицы \mathcal{A} , а постоянную C_{Λ} в (2.8) можно положить равной $C_F \lambda_{\ominus}^{-1/2}$, где C_F — постоянная в неравенстве Фридрихса $\|w\| \leq C_F(\Omega) \|\nabla w\|$ для функций $w \in \dot{H}^1(\Omega)$.

Пусть $v = v_h \in V_{0h} + u_0$ является конформной аппроксимацией точного решения u на подпространстве, связанном с разбиением \mathcal{T}_h на конечные элементы с характерным размером h . В частности, v_h может совпадать с галеркинской аппроксимацией u_h , определенной соотношением

$$\int_{\Omega} \mathcal{A} \nabla u_h \cdot \nabla w_h dx = \int_{\Omega} f w_h dx \quad \forall w_h \in V_{0h} \subset V_0. \tag{5.1}$$

Вектор-функция $y_h^* = \mathcal{A} \nabla v_h$ является аппроксимацией точного потока $p^* = \mathcal{A} \nabla u$. Она не обладает никакой дополнительной регуляризованностью и может быть кусочно-непрерывной функцией. Оператор $\mathbb{P}_{\mathcal{Q}^*}$ обычно задается с помощью операции усреднения на отдельных фрагментах сетки \mathcal{T}_h (patch averaging) или глобально (global averaging). Мы будем обозначать его \mathbb{G}_h , так что $\tilde{y}_h^* := \mathbb{G}_h y_h^* \in Q^*$ является регуляризацией потока. В литературе подробно изучены различные операторы, которые часто используются для этой цели (см. [8], [21]–[26] и многие другие работы).

5.1. Оценки (2.12)–(2.15) и (2.19)

В рассматриваемом случае эти оценки имеют вид

$$\|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}} \leq \|\mathcal{A}\nabla v_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + C_\Lambda \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\| \quad (5.2)$$

$$\|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla w - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\|^2 \quad \forall w \in V_0 + u_0, \quad (5.3)$$

$$\|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 \geq -\|\nabla w\|_{\mathcal{S}}^2 + 2(\mathcal{A}\nabla v_h, \nabla w) + 2\langle \ell, w \rangle \quad \forall w \in V_0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma} \|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 + \|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla v_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \gamma C_\Lambda^2 \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\|^2, \quad (5.5)$$

$$\|\nabla(v_h - u)\|_{\mathcal{S}} + \|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} \geq \|\mathcal{A}\nabla v_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} - 2C_\Lambda \|\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)\| \quad (5.6)$$

где $\gamma \geq 1$, а $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*) = f - \operatorname{div} \tilde{y}_h^*$. Отметим, что эти оценки не используют вспомогательную задачу и интерполяционные оценки, но содержат постоянную $C_F(\Omega)$.

Замечание 4. Современные вычислительные технологии, как правило, используют адаптивные методы, которые решают задачу на последовательности сеток \mathcal{T}_k , $k = 1, 2, \dots, m$, которые последовательно улучшаются там, где это рекомендуют апостериорные индикаторы ошибок. Пусть v_k и $y_k^* := \mathcal{A}\nabla v_k$ обозначают приближенные решения, полученные на сетке \mathcal{T}_k , а $\tilde{y}_{k+1}^* := \mathbb{G}_{\mathcal{T}_k} y_{k+1}^* \in \mathcal{Q}^*$ является регуляризацией потока на \mathcal{T}_{k+1} . Теперь оценку (5.2) можно представить в виде

$$\|\nabla(v_k - u)\|_{\mathcal{S}} \leq \|\tilde{y}_k^* - \tilde{y}_{k+1}^*\|_{\mathcal{S}^{-1}} + C_\Lambda \|\mathcal{R}(\tilde{y}_{k+1}^*)\|. \quad (5.7)$$

Правая часть (5.7) полностью определяется приближенными решениями, полученными на \mathcal{T}_k и \mathcal{T}_{k+1} , и легко вычисляется. Эта оценка показывает правильную форму эвристического критерия Рунге, который часто используется в инженерных расчетах (вычисления прекращаются, если разность $v_k - v_{k+1}$ мала, т.е. уточнение сетки не приводит к существенному изменению приближенного решения). На самом деле близость v_k и v_{k+1} не гарантирует близости этих функций к точному решению. Оценка (5.7) показывает, что правильный критерий включает два слагаемых, одно из которых зависит от разности потоков, построенных на сетках \mathcal{T}_k и \mathcal{T}_{k+1} , а второе от нормы $\mathcal{R}(\tilde{y}_{k+1}^*)$.

5.2. Оценки, использующие решение задачи (3.1)

Приведем оценки, в которых используется решение вспомогательной задачи (см. также разд. 2.6.5 книги [10], где рассматривается двойственная (dual mixed) формулировка вспомогательной задачи).

В самом простом случае используется задача с единичным оператором \mathcal{B} . Пусть $u_{\mathcal{R}}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta u_{\mathcal{R}} + \mathcal{R}(\tilde{y}_h^*) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (5.8)$$

с однородными краевыми условиями. Предположим, что $u_{\mathcal{R}} \in H^2(\Omega)$ и, более того, нам известна постоянная c_{reg} в соответствующей оценке регулярности:

$$\|u_{\mathcal{R}}\|_{2,2,\Omega} \leq c_{\text{reg}} \|f\|_{\Omega}. \quad (5.9)$$

Например, в выпуклой области такая регулярность решения имеет место, причем $c_{\text{reg}} = 1$ (см. [27]).

В качестве V_0^m используем конечномерное пространство $V_{0h} \subset V_0$. Оно может быть вложено в V_{0h} или совпадать с этим пространством, но может быть и совершенно независимым. Будем считать, что соответствующая сетка \mathcal{T}_h образована подобластями Ω_i , $i = 1, 2, \dots, n_h$, с кусочно-гладки-

ми липшицевыми границами. Приближенное решение $\tilde{u}_{\mathcal{T}_h} \in V_{0h}$ задачи (5.8) удовлетворяет тождеству

$$\int_{\Omega} \nabla \tilde{u}_{\mathcal{T}_h} \cdot \nabla w_{0h} dx = \int_{\Omega} \mathcal{R}(\tilde{y}_h^*) w_h dx \quad \forall w_{0h} \in V_{0h}. \tag{5.10}$$

Существенным условием является наличие интерполяционного оператора π_h , который непрерывен и удовлетворяет условию $\pi_h w_{0h} = w_{0h}$ для любой функции $w_{0h} \in V_{0h}$.

Если области Ω_i являются симплексами, а $w \in H^2$, то π_h может быть ассоциирован с хорошо изученным интерполяционным оператором, который определяется условиями $\pi_h w \in P^1(\Omega_i)$ и $\pi_h w(x_i) = w(x_i)$, где x_i – вершины симплекса. Оценки (3.17) приобретают вид

$$\|w - \pi_h w\|_{2,\Omega_i} \leq C_{h,1}(\Omega_i) \|w\|_{2,2,\Omega_i}, \quad \|\nabla(w - \pi_h w)\|_{2,\Omega_i}(w) \leq C_{h,2}(\Omega_i) \|w\|_{2,2,\Omega_i}. \tag{5.11}$$

Ряд исследований был посвящен получению достаточно точных оценок констант $C_{h,1}$ и $C_{h,2}$ для аффинных интерполянтов функций из H^2 на треугольных и четырехугольных элементах T_h (см. [28]–[30]). Известно, что для такого оператора интерполяционные константы удовлетворяют условиям $C_{h,1} \leq c_1 h^2$ и $C_{h,2} \leq c_1 h$ (см., например, [2]). Работа [31] обобщает эти результаты и обосуждает их применение для построения априорных и апостериорных оценок в задаче $\Delta u + f = 0$ с однородными условиями Дирихле. В частности, для треугольной области $T_h \in \mathbb{R}^2$ со сторонами n и α_n ($\alpha > 0$) и углом $\theta \in (0, 2\pi)$ между ними было показано, что

$$C_{h,1}(T_h) \leq \frac{v_+(\alpha, \theta)}{2} h^2 C_1, \quad C_{h,2}(T_h) \leq \frac{v_+(\alpha, \theta)}{\sqrt{2v_-(\alpha, \theta)}} h C_2, \tag{5.12}$$

где $v_-(\alpha, \theta) = 1 + \alpha^2 - \sqrt{1 + 2\alpha^2 \cos 2\theta + \alpha^4}$ и $v_+(\alpha, \theta) = 1 + \alpha^2 + \sqrt{1 + 2\alpha^2 \cos 2\theta + \alpha^4}$. Известно, что $C_1 \leq 0.361$, а $C_2 \leq 0.5$, причем вычисления дают значения $C_2 \approx 0.489$ и $C_1 \approx 0.168$ (см. [31]).

Теперь интерполяционный член (4.1) вычисляется по формуле

$$\mathcal{E}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tau^*) = \left(\sum_{i=1}^{n_h} \sigma_i^2 C_{h,1}^2(\Omega_i) \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n_h} \alpha_i^2 C_{h,2}^2(\Omega_i) \right)^{1/2},$$

где $\alpha_i = \|\nabla u_{\mathcal{T}_h} - \tau^*\|_{\Omega_i}$ и $\sigma_i = \|\operatorname{div}(\tilde{y}_h^* - \tau^*) - f\|_{\Omega_i}$. Оценка (4.1) приобретает вид

$$\frac{\gamma-1}{\gamma} \|\nabla(u_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 + \|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \frac{\gamma}{\lambda_{\ominus}} [\|\nabla u_{\mathcal{T}_h}\|^2 + \epsilon] \tag{5.13}$$

$$c \epsilon = \mathcal{E}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tau^*) \|\operatorname{div} \tilde{y}_h^* - f\|.$$

Приведем также оценки (4.6) и (4.7) :

$$\|\nabla(u_h - u)\|_{\mathcal{S}}^2 \leq \beta \|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} \beta' (\|\nabla u_{\mathcal{T}_h}\|^2 + \epsilon), \tag{5.14}$$

$$\|\tilde{y}_h^* - p^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 \leq \|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{S}^{-1}}^2 + \mu_{\oplus} (\|\nabla u_{\mathcal{T}_h}\|^2 + \epsilon). \tag{5.15}$$

5.3. Асимптотические свойства оценок

Рассмотрим важный частный случай, когда задачи (2.1) и (3.1) приближенно решаются на одной и той же сетке \mathcal{T}_h (т.е. $h = n$). Естественно выбрать $\tau^* = \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^* := \mathbb{G}_h \nabla u_{\mathcal{R},h}$, где \mathbb{G}_h – введенный выше оператор регуляризации (осреднения). В этом случае $\alpha_i = \|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\|_{\Omega_i}$ представляет собой погрешность регуляризации, а σ_i характеризует невязку уравнения (5.8), возникшую вследствие того, что вектор-функция $p_{\mathcal{R},h}^*$ заменена на регуляризацию $\mathbb{G}_h p_{\mathcal{R},h}^*$.

Предположим, что задача решается на последовательности сеток \mathcal{T}_h , которые удовлетворяют необходимым условиям регулярности (см., например, [2], [6]), так что $\|\nabla(u - u_h)\|$ убывает пропорционально h . Пусть оператор \mathbb{G}_h на сетках \mathcal{T}_h удовлетворяет условиям (2.9), (2.10) и (2.23).

Тогда p_h^* стремится к p^* в норме $L^2(\Omega)$ со скоростью h и, согласно (2.10), \tilde{p}_h^* стремится к p^* в норме $L^2(\Omega)$ также со скоростью h .

Левая часть (5.13) убывает пропорционально h^2 . Нетрудно видеть, что $\|\mathcal{A}\nabla u_h - \tilde{y}_h^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2$ также убывает со скоростью h^2 . В соответствии с (3.24) норма $\|\nabla u_{\mathcal{R},m}\|^2$ убывает с той же скоростью. Рассмотрим последнее слагаемое. Норма $\|\operatorname{div} \tilde{y}_h^* - f\|$ ограничена постоянной, не зависящей от h . Поэтому асимптотические свойства определяются поведением $\mathcal{R}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tau^*)$. В соответствии с (3.29)

$$\mathcal{R}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*) \leq C_1 \|\operatorname{div}(\tilde{p}_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{y}_h^*) - f\|^2 + C_2 \|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\|$$

где $C_1 \sim h^2$ и $C_2 \sim h$. Поскольку \mathbb{G}_h удовлетворяет (2.23), норма $\|\operatorname{div}(\tilde{p}_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{y}_h^*) - f\|$ ограничена и первое слагаемое убывает не медленнее, чем h^2 . С помощью (2.9) и (2.10) второе слагаемое можно оценить так:

$$\|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\| \leq \|p_{\mathcal{R},h}^* - p_{\mathcal{R}}^*\| + \|p_{\mathcal{R}}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\| \leq (1 + C_{\mathbb{P}}) \|p_{\mathcal{R}}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\| = (1 + C_{\mathbb{P}}) \|\nabla u_{\mathcal{R},h} - \nabla u_{\mathcal{R}}\|.$$

На последовательности сеток \mathcal{T}_h решения вспомогательной задачи сходятся к $u_{\mathcal{R}}$ в норме H^1 со скоростью h (эта задача является упрощением исходной, поэтому скорость сходимости $u_{\mathcal{R},h}$ к точному решению не хуже, чем скорость сходимости u_h , определенной (5.1)). Поэтому норма $\|p_{\mathcal{R},h}^* - \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*\|$ убывает не медленнее, чем h . Таким образом, величина ϵ убывает как h^2 и мы заключаем, что правая часть (5.13) убывает с той же скоростью, что и норма отклонения в левой части. Такими же асимптотическими свойствами обладают оценки (5.14) и (5.15).

В ряде случаев (при дополнительной регулярности точного решения u и специальных свойств аппроксимирующих подпространств) удастся доказать, что \tilde{y}_h^* сходится к p^* (в норме Y^*) быстрее чем u_h^* (этот феномен известен как *суперсходимость*, см. [21], [23], [24], [26], [32]– [35]). Тогда оценка (3.24) показывает, что норма решения вспомогательной задачи $\|\nabla u_{\mathcal{R},h}(\tilde{y}_h^*)\|_{\mathcal{R}}$ также убывает с повышенной скоростью, что улучшает качество оценок (5.14) и (5.15). Более того, в этом случае естественно ожидать, что суперсходимость можно получить и в более простой вспомогательной задаче и что член $\mathcal{R}(\mathcal{T}_h, \tilde{y}_h^*, \tilde{p}_{\mathcal{R},h}^*)$ будет также убывать с повышенной скоростью.

5.4. Сравнение с интерполяционными оценками Клемана

Большая часть работ, посвященных апостериорным оценкам для уравнений в частных производных, связана с так называемым методом невязок (explicit residual method, см., например, [8]). Этот метод использует галеркинскую ортогональность приближенного решения и весьма сложные операторы интерполирования, такие как оператор Клемана (см. [36]). Для подобласти (конечного элемента) Ω_k и общей для Ω_k и Ω_l грани Γ_{kl} оценки Клемана имеют вид

$$\|v - \pi_h v\|_{\Omega_k} \leq \gamma_{1k} \operatorname{diam}(\Omega_k) \|v\|_{1,2,\omega_{1k}(\Omega_k)}, \tag{5.16}$$

$$\|v - \pi_h v\|_{\Gamma_{kl}} \leq \gamma_{2k} |\Gamma_{kl}|^{1/2} \|v\|_{1,2,\omega_{2k}(\Gamma_{kl})}, \tag{5.17}$$

где справа стоят H^1 -нормы для областей ω_{1k} и ω_{2k} , которые содержат не только Ω_i , но и определенный набор соседних подобластей (элементов). Поэтому постоянные γ_{1k} и γ_{2k} сильно зависят от структуры сетки. Их значения трудно определить и необходимо пересчитывать при каждом новом перестроении сетки. При оценке интеграла невязки с помощью (5.16), (5.17) неизбежно происходит переоценка (поскольку норма по Ω_i суммируется многократно). Кроме того, сам метод построения апостериорных оценок по методу невязок связан с переоценкой ряда слагаемых.

В (5.13)–(5.15) используются простые интерполяционные оценки (5.11). Нормы, стоящие в их правой части, определяются только на том элементе, где осуществляется интерполирование, а постоянные (5.12) известны и при изменении сетки эти постоянные легко пересчитываются. Оценки (5.13)–(5.15) не используют ортогональность галеркинских аппроксимаций и верны для любых приближенных решений. Приведенные ниже примеры подтверждают их эффективность

для самых разных приближенных решений. Конечно, эти преимущества основаны на использовании повышенной регулярности решения вспомогательной задачи. Проверка этого требования может быть простой в одних случаях (например, для выпуклых областей или областей с гладкими границами) и сложной в других.

5.5. Пример

Мы сравним эффективность различных оценок на примере простой краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \rho(x) \frac{du}{dx} = f(x), \quad x \in I := (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0, \tag{5.18}$$

где $\rho_{\oplus} \geq \rho(x) \geq \rho_{\ominus} > 0$, а f – заданная ограниченная функция. Несмотря на простоту, эта задача обладает достаточным разнообразием, чтобы проверить эффективность оценок в различных ситуациях. В этом случае $\Lambda u = \frac{du}{dx}$, $\Lambda^* y^* = -\frac{dy^*}{dx}$. Точное решение задачи (5.18) имеет вид

$$u(x) = \int_0^x \frac{g(t) + c}{\rho(t)} dt, \quad u'(x) = \frac{g(x) + c}{\rho(x)}, \quad g(x) := \int_0^x f(t) dt, \tag{5.19}$$

где

$$c := \left(-\int_I \frac{g(t)}{\rho(t)} dt \right) \left(\int_I \frac{1}{\rho(t)} dt \right)^{-1}.$$

При этом

$$p^* = \rho(x) \frac{du}{dx} = g(x) + c, \quad \mu_{\oplus} = \rho_{\oplus}, \quad \mu_{\ominus} = \rho_{\ominus},$$

$$\|e\|_A^2 = \int_I \rho |e'|^2 dx, \quad \|e^*\|_{\mathcal{A}^{-1}}^2 = \int_I \rho^{-1} |e^*|^2 dx.$$

Постоянная C_{Λ} определяется условием $\|w\|^2 \leq C_{\Lambda}^2 \int_I \rho |w'|^2 dx$, поэтому можно положить $C_{\Lambda} = 1/\rho_{\ominus}^{1/2} \pi$. В качестве задачи (3.1) выберем

$$\frac{d^2 u_{\mathcal{R}}}{dx^2} = f - \frac{dy^*}{dx}, \quad x \in I, \quad u_{\mathcal{R}}(0) = u_{\mathcal{R}}(1) = 0. \tag{5.20}$$

Ее точное решение задается соотношениями

$$u_{\mathcal{R}}(x) = \int_0^x (g(t) - y^*) dt + c_{\mathcal{R}} x, \quad u'_{\mathcal{R}}(x) = c_{\mathcal{R}} + g(x) - y^*, \quad p_{\mathcal{R}}^* = \frac{du_{\mathcal{R}}}{dx}, \tag{5.21}$$

где

$$c_{\mathcal{R}} := -\int_0^1 (g(t) - y^*) dt.$$

Приближенные решения строятся на равномерной сетке. Галеркинские решения задач (5.18) и (5.20) обозначим u_h и $u_{\mathcal{R},h}$ соответственно. Оператор \mathbb{G}_h сглаживает приближенный поток $p_h^* = \rho u_h'$ с помощью стандартного метода, состоящего в усреднении значений справа и слева от узла и аффинном продолжении полученных таким образом значений. При этом $\mathcal{R}(y^*) = (\mathbb{G}_h \rho u_h')' - f$. Подчеркнем, что во всех примерах функция \tilde{y}_h^* была построена с помощью этой простой процедуры регуляризации и никакой дополнительной обработки этой функции, направленной на минимизацию нормы невязки $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$, не применялось.

Рассмотрим интервал $I_h = (0, h)$, и пусть $w \in H^2(I_h)$, $w(0) = w(h) = 0$. Нетрудно показать, что

$$\|w'\|_{I_h} \leq \frac{h}{2\pi} \|w''\|_{I_h}, \quad \|w\|_{I_h} \leq \frac{h^2}{4\pi^2} \|w''\|_{I_h}. \tag{5.22}$$

Таблица 1. Сравнение норм отклонения от решения с оценками (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15)

Тип	$\ e\ _{sd}$	$M(e)$	$+M(e)$	$\ e^*\ _{sd^{-1}}$	$M(e^*)$	$+M(e^*)$	$\ (e, e^*)\ _\gamma$	$M(e, e^*)$	$+M(e, e^*)$
1	0.016	0.045	0.018	0.002	0.033	0.017	0.012	0.043	0.017
1	0.024	0.248	0.036	0.016	0.232	0.026	0.023	0.328	0.033
1	0.039	0.504	0.059	0.034	0.487	0.046	0.044	0.689	0.062
1	0.055	0.730	0.080	0.050	0.711	0.064	0.063	1.013	0.089
2	0.017	0.122	0.020	0.003	0.106	0.017	0.013	0.149	0.018
2	0.038	0.762	0.0502	0.0153	0.729	0.037	0.031	1.032	0.041
2	0.084	1.553	0.111	0.032	1.483	0.082	0.068	2.091	0.090
2	0.296	6.483	0.383	0.121	6.241	0.283	0.242	8.823	0.314

Поэтому интерполяционный член имеет вид

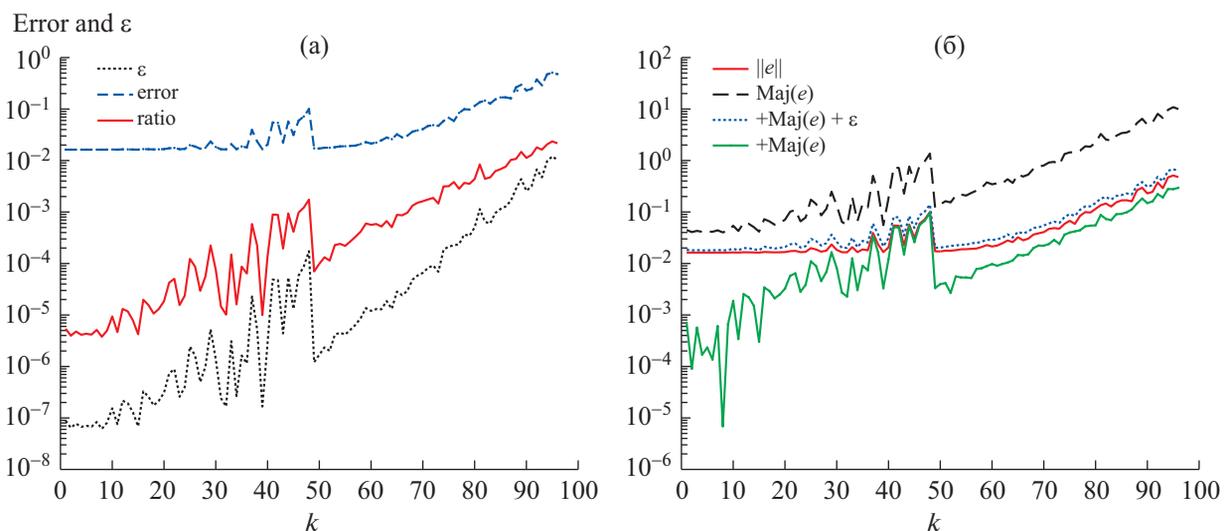
$$\varepsilon(\mathcal{T}_\Omega, \tilde{y}_h^*, \tau^*) := \frac{h^2}{4\pi^2} \|(\mathbb{G}_h \rho(u'_{\mathcal{R},h} + u'_h))' + f\|_l + \frac{h}{2\pi} \|\rho u'_{\mathcal{R},h} - \mathbb{G}_h \rho u'_{\mathcal{R},h}\|_l.$$

Эффективность оценок (5.2), (5.3), (5.5) (5.13)–(5.15) сравнивалась в серии примеров с различными функциями ρ и f . Ниже приведены несколько характерных примеров, где эти функции выбирались гладкими и негладкими, а именно,

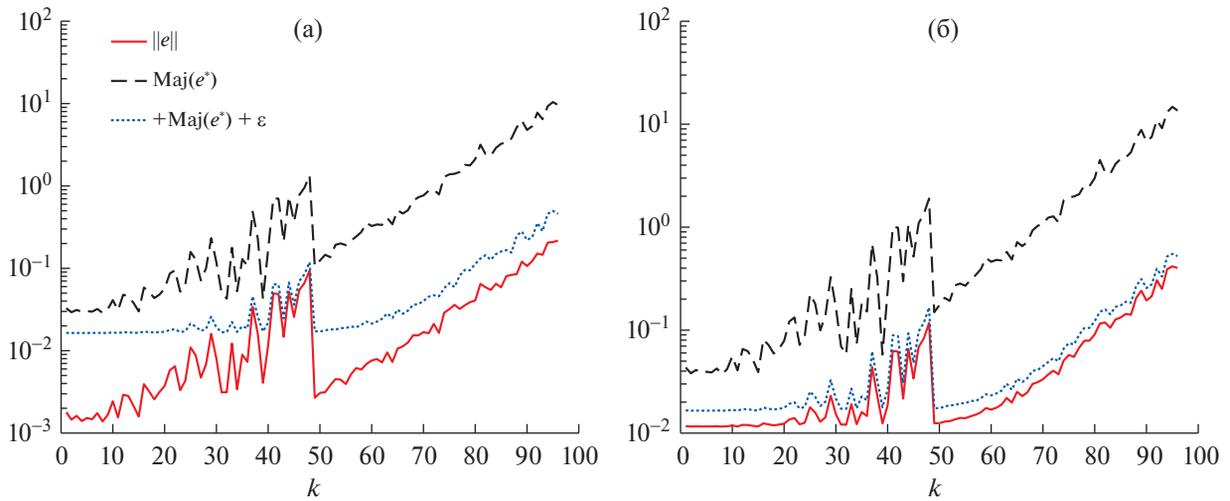
$$f_1 := 1 + 2x \quad \text{и} \quad f_2 := \begin{cases} -1 & x \leq 1/2, \\ 1 & x > 1/2, \end{cases}$$

$$\rho_1 := 1 + 0.5 \sin(8\pi x), \quad \rho_2 = 0.5 + 2 \sin^2(\pi x) \quad \text{и} \quad \rho_3 := \begin{cases} 1 + 4x & x \in [0, 1/4), \\ 3 - 4x & x \in [1/4, 1/2), \\ 4x - 1 & x \in [1/4, 1/2), \\ 5 - 4x & x \in [1/4, 1/2). \end{cases}$$

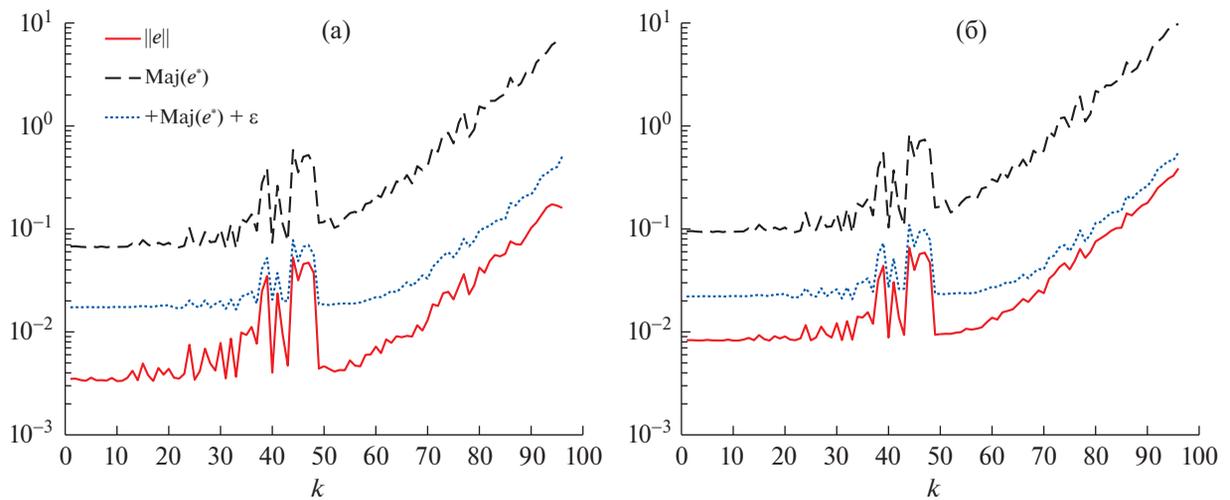
Нас интересует, насколько правильно (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15) оценивают расстояние до точного решения не только для галеркинских приближений u_h (когда функция \tilde{y}_h^* может быть хорошей аппроксимацией p^*), но и для широкого набора различных приближенных решений, включая и такие, которые достаточно сильно отличаются от u_h (так что $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$ не является малой



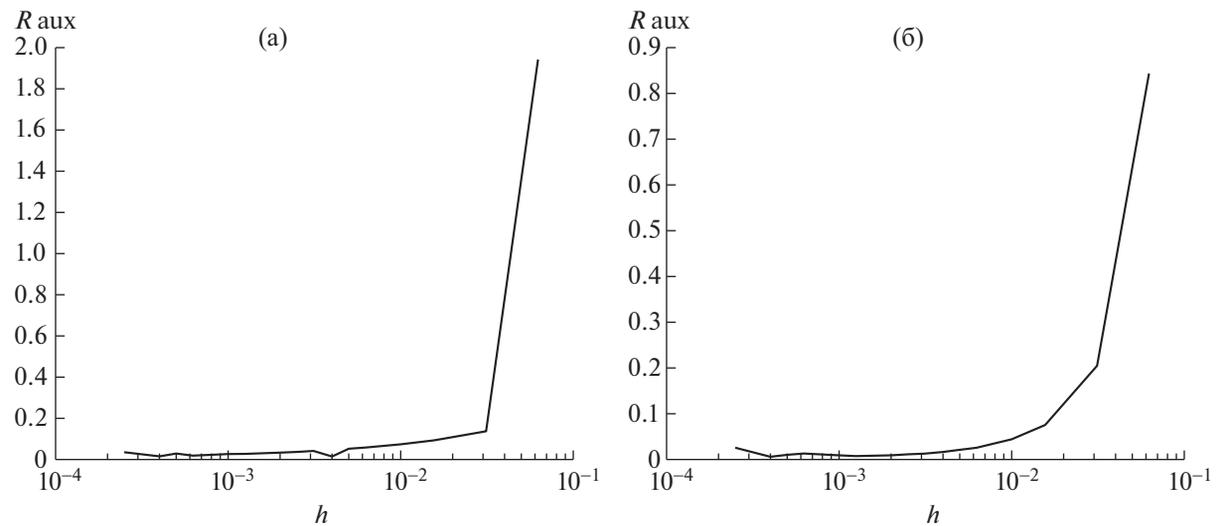
Фиг. 1. Слагаемое $\varepsilon(\mathcal{T}_\Omega, y^*, \tau^*)$ (а) и оценки (5.2) и (5.14) (б).



Фиг. 2. Норма $\|e^*\|_{S^{d-1}}$ и ее мажоранты (5.3) и (5.13) (а), норма $\|(e, e^*)\|_{\gamma}$ и ее мажоранты (5.5) и (5.13) (б).



Фиг. 3. Норма $\|e^*\|_{S^{d-1}}$ и ее мажоранты (5.3) и (5.15) (а), норма $\|(e, e^*)\|_{\gamma}$ и ее мажоранты (5.5) и (5.13) (б).



Фиг. 4. Норма $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$ в зависимости от h (для первой и второй серий примеров).

Таблица 2. Сравнение точных значений отклонения от решения с оценками (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15)

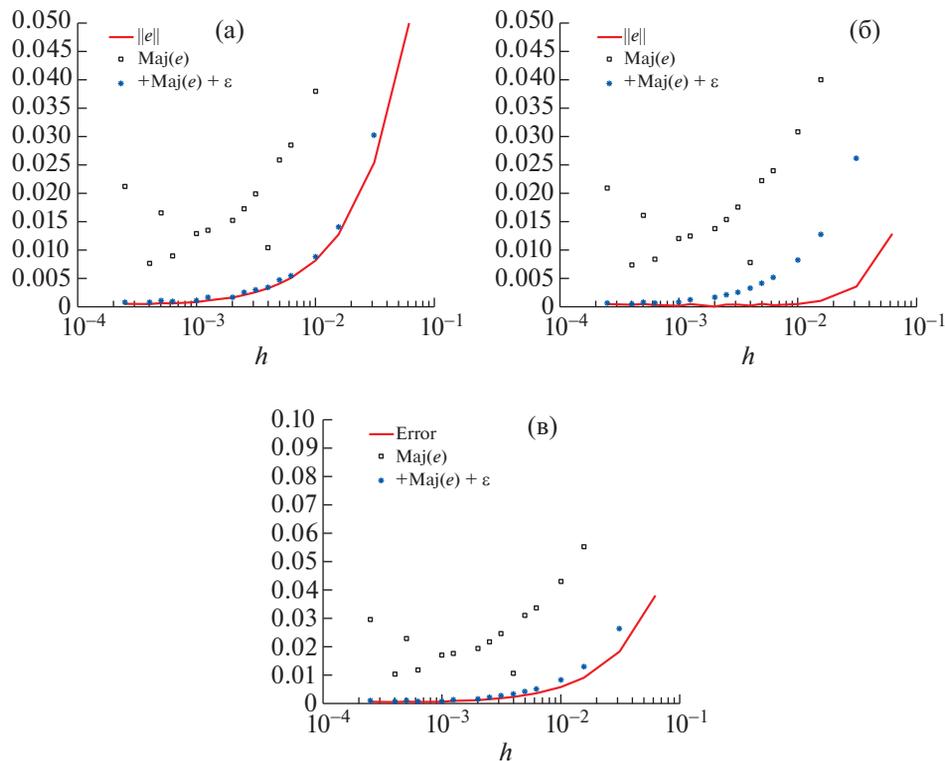
Тип	$\ e\ _{sl}$	$M(e)$	$+M(e)$	$\ e^*\ _{sl^{-1}}$	$M(e^*)$	$+M(e^*)$	$\ (e, e^*) \ _\gamma$	$M(e, e^*)$	$+M(e, e^*)$
1	0.011	0.077	0.033	0.004	0.068	0.017	0.008	0.095	0.022
1	0.013	0.106	0.033	0.008	0.096	0.019	0.012	0.135	0.025
1	0.027	0.274	0.062	0.024	0.263	0.037	0.031	0.371	0.052
1	0.034	0.366	0.079	0.032	0.355	0.049	0.040	0.501	0.068
2	0.012	0.125	0.032	0.004	0.114	0.019	0.010	0.161	0.024
2	0.074	1.432	0.136	0.036	1.373	0.080	0.064	1.942	0.097
2	0.208	3.441	0.345	0.084	3.272	0.211	0.169	4.633	0.244
2	0.316	5.433	0.579	0.162	5.172	0.345	0.276	7.312	0.411

Таблица 3. Галеркинские аппроксимации

N_{int}	$\ e\ _{sl}$	$M(e)$	$+M(e)$	$\ (e, e^*) \ _\gamma$	$M(e, e^*)$	$+M(e, e^*)$
16	5.06e-02	1.14e+00	1.63e-01	3.80e-02	1.54e+00	1.64e-01
32	2.54e-02	8.42e-02	3.03e-02	1.83e-02	8.66e-02	2.65e-02
64	1.27e-02	5.07e-02	1.41e-02	9.06e-03	5.52e-02	1.29e-02
100	8.14e-03	3.79e-02	8.76e-03	5.78e-03	4.29e-02	8.20e-03
200	4.10e-03	2.59e-02	4.73e-03	2.95e-03	3.11e-02	4.18e-03
400	2.07e-03	1.73e-02	2.52e-03	1.52e-03	2.17e-02	2.15e-03
800	1.12e-03	1.35e-02	1.61e-03	9.27e-04	1.77e-02	1.32e-03
1000	8.32e-04	1.28e-02	1.03e-03	6.12e-04	1.70e-02	8.68e-04
2000	6.41e-04	1.66e-02	1.03e-03	6.71e-04	2.29e-02	9.66e-04
4000	5.28e-04	2.12e-02	8.12e-04	6.13e-04	2.97e-02	8.84e-04
16	3.39e-02	7.02e-01	1.45e-01	5.04e-02	9.18e-01	1.06e-01
32	1.65e-02	2.12e-01	3.47e-02	1.40e-02	2.77e-01	2.45e-02
64	8.33e-03	6.84e-02	1.27e-02	6.26e-03	8.53e-02	9.39e-03
100	5.33e-03	3.27e-02	7.00e-03	3.88e-03	3.91e-02	5.59e-03
200	2.70e-03	1.48e-02	3.56e-03	1.96e-03	1.74e-02	2.81e-03
400	1.34e-03	7.72e-03	1.65e-03	9.61e-04	9.13e-03	1.37e-03
800	7.18e-04	6.73e-03	1.21e-03	5.73e-04	8.60e-03	8.63e-04
1000	5.37e-04	7.46e-03	6.57e-04	3.84e-04	9.80e-03	5.48e-04
2000	2.71e-04	8.57e-03	3.65e-04	1.98e-04	1.17e-02	2.84e-04
4000	4.46e-04	2.25e-02	1.01e-03	5.30e-04	3.16e-02	8.89e-04

величиной). Для этого в u_h вносились возмущения двух разных типов. В первом случае возмущения были обусловлены функциями $\phi_1 = x(1-x)$, $\phi_2 = \sin 8\pi x$ и $\phi_3 = |x - 0.5| - 0.5$, которые добавлялись со случайными весами. Будем говорить, что это возмущения типа 1. В зависимости от разрешенной магнитуды возмущений получаются достаточно хорошие приближения или, напротив, весьма грубые. Во втором случае возмущения задавались случайным образом в каждом узле независимо (возмущения типа 2). Заметим, что на практике погрешности могут возникать вследствие самых разных причин (от систематических погрешностей численного интегрирования до случайных ошибок, связанных с дефектами компьютерных программ). Поэтому важно проверить устойчивость оценок к возмущениям любых типов.

В первой серии экспериментов $f = f_1$ и $\rho = \rho_2$. При вычислении комбинированной нормы было выбрано $\gamma = 2$. В табл. 1 представлены численные результаты. В первом столбце указан тип возмущения. В третьем и четвертом столбцах приведены значения оценок (5.2) и (5.14), в шестом и седьмом – (5.3) и (5.15), а в девятом и десятом показаны значения оценок комбинированной



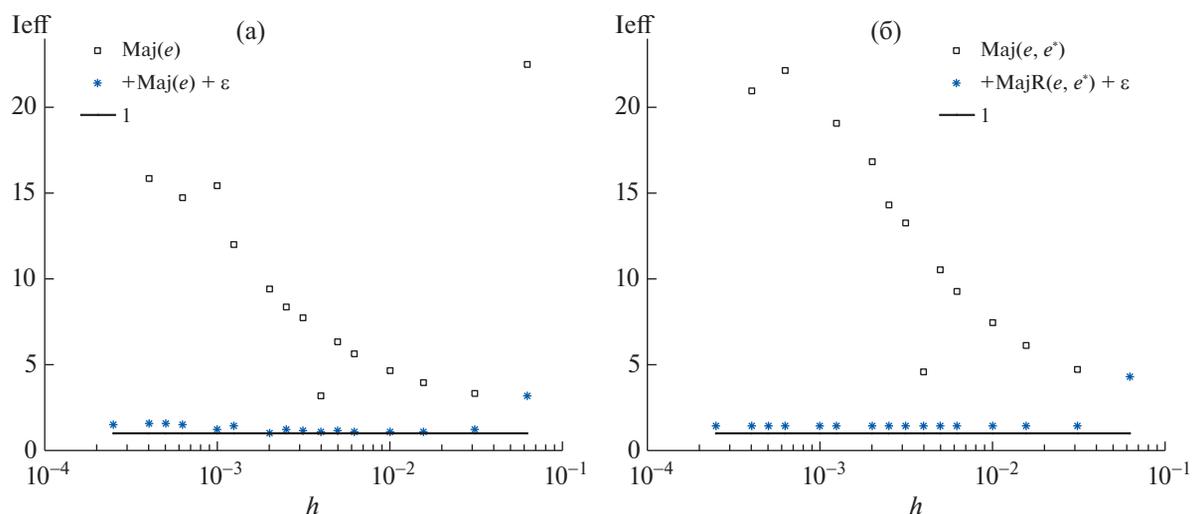
Фиг. 5. Нормы отклонений $\|e\|_{\mathcal{S}l}$ (а), $\|e^*\|_{\mathcal{S}l^{-1}}$ (б), $\|(e, e^*)\|_{\gamma}$ (в) и их мажоранты.

нормы (5.5) и (5.13). Сначала магнитуда возмущения очень мала, так что первая строка в верхней и нижней половинах таблицы соответствует приближенному решению, которое мало отличается от u_h . Затем магнитуда постепенно возрастает и последние строки соответствуют решениям, которые достаточно сильно отклоняются от точного. Графически эти данные представлены на фиг. 1б. Ось абсцисс соответствует номеру эксперимента, причем левая часть относится к возмущениям типа 1, а правая к возмущениям типа 2 (этим объясняется скачок в середине графика). С ростом номера эксперимента величина возмущения возрастает и, вместе с этим, возрастает норма ошибки (сплошная красная линия). Относительная норма погрешности $\|e\|_p / \|u\|_p$ меняется от 0.033 до 0.584. Соответствующая оценка по формуле (5.2) представлена пунктирной линией, а оценка (5.14), использующая решение вспомогательной задачи, обозначена точками. Нижняя линия показывает значения миноранты. Видно, что оценка (5.14) прекрасно воспроизводит значения нормы отклонения, однако (5.2) может существенно завышать эту величину. Эффективность оценки (5.14) обеспечивается малостью величины $\varepsilon(\mathcal{T}_{\Omega}, y^*, \tau^*)$, которая изображена на фиг. 1а. На этом графике верхняя линия показывает величину нормы отклонения от точного решения, а нижняя — величину интерполяционного члена $\varepsilon(\mathcal{T}_{\Omega}, y^*, \tau^*)$. Средняя линия показывает отношение этих величин. Во всех примерах слагаемое $\varepsilon(\mathcal{T}_{\Omega}, y^*, \tau^*)$ намного меньше, чем норма отклонения.

На фиг. 2 показано поведение норм и соответствующих мажорант. Видно, что оценки, использующие решение вспомогательной задачи, намного точнее и устойчивы к различным возмущениям. Они хорошо работают как для точных, так и для грубых аппроксимаций точного решения. Соответствующие результаты графически представлены на фиг. 3.

Далее исследовалось поведение оценок для задачи с периодическим коэффициентом $\rho = \rho_1$ и скачкообразной правой частью f_2 . В табл. 2 показаны нормы отклонений и соответствующие оценки. Тестировались самые разные приближенные решения, у которых относительная норма погрешности варьировалась от 6.9 до 204%.

В заключение приведем примеры, показывающие поведение оценок для галеркинских аппроксимаций при увеличении числа интервалов N_{int} . В первой серии примеров, приведенных в



Фиг. 6. Индексы эффективности оценок для галеркинских аппроксимаций.

верхней половине табл. 3, использовались функции ρ_3 и f_1 , а в нижней показаны результаты второй серии для функций ρ_2 и f_2 . При измельчении сетки относительная ошибка галеркинской аппроксимации уменьшалась от 10 до 0.1% в первом случае и от 21 до 3% во втором. На фиг. 4 показана зависимость от h нормы функции $\mathcal{R}(\tilde{y}_h^*)$, которая используется во вспомогательной задаче (5.8). Видно, что эта норма не только ограничена, но и быстро убывает с убыванием h . На фиг. 5 показано, как изменяются точные значения различных норм погрешности и значения оценок (5.2), (5.3), (5.5), (5.13)–(5.15) в зависимости от h в первой серии тестов. Результаты для второй серии вполне аналогичны. Как и в предыдущих примерах, оценки, использующие решение вспомогательной задачи (они обозначены звездочками), оказались намного точнее. Поведение индексов эффективности этих оценок приведено на фиг. 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brezzi F., Fortin M. Mixed and hybrid finite element methods. Springer Ser. in Computat. Math. 15, New York, 1991.
2. Ciarlet P. The finite element method for elliptic problems. North-Holland, 1987.
3. Roberts J.E., Thomas J.-M. Mixed and hybrid methods. In: Handbook of Numerical Analysis, V. II. North-Holland, Amsterdam, 1991, p. 523–639.
4. Repin S. A posteriori estimates for partial differential equations. Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2008.
5. Ainsworth M., Oden J.T. A posteriori error estimation in finite element analysis. John Wiley & Sons, New York, 2000.
6. Eriksson K., Estep D., Hansbo P., Johnson C. Introduction to adaptive methods for differential equations // Acta Numer. 1995. P. 105–158.
7. Mali O., Nettaanmäki P., Repin S. Accuracy verification methods. Theory and Algorithms. Springer, Berlin, 2014.
8. Verfürth R. A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques. Wiley-Teubner, Stuttgart, 1996.
9. Repin S. Two-sided estimates of deviation from exact solutions of uniformly elliptic equations // Am. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 2003. V. 209. P. 143–171.
10. Repin S., Sauter S. Accuracy of mathematical models. Dimension reduction, simplification and homogenization // EMS Tracts in Math. 2020. V. 33.
11. Kelly D.W. The self equilibration of residuals and complementary error estimates in the finite element method // Int. J. Numer. Meth. Engrg. 1984. V. 20. P. 1491–1506.
12. Ladevéze P., Leguillon D. Error estimate procedure in the finite element method and applications // SIAM J. Numer. Anal. 1983. V. 20. P. 485–509.
13. Braess D. Finite elements. Cambridge Univer. Press, Cambridge, 1997.

14. *Braess D., Schöberl J.* Equilibrated residual error estimator for edge elements // *Math. Comp.* 2008. V. 77. № 262. 651–672.
15. *Ern A., Nicaise S., Vohralik M.* An accurate $H(\text{div})$ flux reconstruction for discontinuous Galerkin approximations of elliptic problems // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 2007. V. 345. № 12. P. 709–712.
16. *Ern A., Vohralik M.* Four closely related equilibrated flux reconstructions for nonconforming finite elements // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris.* 2013. V. 351. № 1–2. P. 77–80.
17. *Repin S.* A posteriori error estimation for nonlinear variational problems by duality theory // *Zapiski Nauchnih Seminarov, V.A. Steklov Math. Inst. (POMI.)* 1997. V. 243. P. 201–214.
18. *Repin S.* A posteriori error estimation for variational problems with uniformly convex functionals // *Math. Comp.* 2000. V. 69. № 230. P. 481–500.
19. *Repin S.* Computable majorants of constants in the Poincaré and Friedrichs inequalities // *J. Math. Sci. (N.Y.)* 2012. V. 186. № 2. P. 307–321.
20. *Repin S.* Poincaré type inequalities for vector functions with zero mean normal traces on the boundary and applications to interpolation methods, in *Contributions to partial differential equations and applications*, P. 411–432, *Comput. Meth. Appl. Sci.* V. 47, Springer, Cham, 2019.
21. *Carstensen C., Bartels S.* Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I Low order conforming, non-conforming and mixed FEM // *Math. Comp.* 2002. V. 71. № 239. P. 945–969.
22. *Carstensen C., Funken S.A.* Fully reliable localized error control in the FEM // *SIAM J. Sci. Comput.* 2000. V. 21. № 4. P. 1465–1484.
23. *Křížek M., Neittaanmäki P.* Superconvergence phenomenon in the finite element method arising from averaging gradients // *Numer. Math.* 1984. V. 45. № 1. P. 105–116.
24. *Wahlbin L.B.* Superconvergence in Galerkin finite element methods // *Lecture Notes in Math.* N 1605, Springer, 1995.
25. *Zhang Z., Naga A.* A new finite element gradient recovery method: superconvergence property // *SIAM J. Sci. Comput.* 2005. V. 26. № 4. P. 1192–1213.
26. *Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z.* A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis // *Inter. J. Numer. Meth. Engng.* 1987. V. 24. P. 337–357.
27. *Ladyzhenskaya O.A.* The boundary value problems of mathematical physics, Springer-Verlag, New York, 1985.
28. *Arbenz P.* Computable finite element error bounds for poisson’s equation // *IMA J. of Numer. Anal.* 1982. V. 29. P. 475–479.
29. *Barnhill R.E., Brown J.H., Mitchell A.R.* A comparison of finite element error bounds for Poisson’s equation // *IMA J. Numer. Anal.* 1981. V. 1. P. 95–103.
30. *Natterer F.* Berechenbare Fehlerschranken für die Methode der finite Elemente // *Inter. Ser. of Numer. Math.* 1975. V. 28. P. 109–121.
31. *Liu X., Kikuchi F.* Analysis and estimation of error constants for P0 and P1 interpolations over triangular finite elements // *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 2010. V. 17. P. 27–78.
32. *Chow S.-S., Carey G.F., Lazarov R.D.* Natural and post-processed superconvergence in semilinear problems // *Numer. Meth. Partial Diff. Eqs.* 1991. V. 7. P. 245–259.
33. *Ewing R.E., Lazarov R.D., Wang J.* Superconvergence of the velocity along the Gauss lines in mixed finite element methods // *SIAM J. Numer. Anal.* 1991. V. 18. P. 1015–1029.
34. *Lazarov R.D.* Superconvergence of the gradient for triangular and tetrahedral finite elements of a solution of linear problems in elasticity theory // *Computat. Processes and Syst.* 1988. V. 6. P. 180–191 (in Russian).
35. *Zlamal M.* Some superconvergence results in the finite element method. In: *Mathematical Aspects of Finite Element Method* (eds. A. Dold and B. Eckmann), Springer Lecture Notes in Math., N. 606, 1975.
36. *Clément P.* Approximation by the finite element functions using local regularization // *RAIRO Sér. Rouge Anal. Numér. R-2.* 1975. V. 9. P. 77–84.